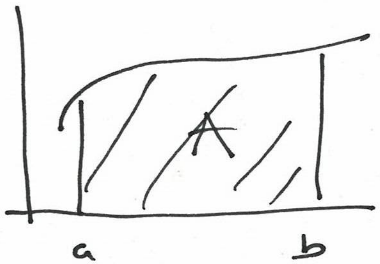
Das Riemann Integral.

Motivation: $f:[a,b]\to[0,\infty)$ stetig

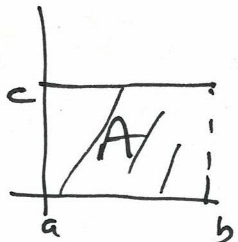
Gesucht: Flächeninhalts des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graph von f



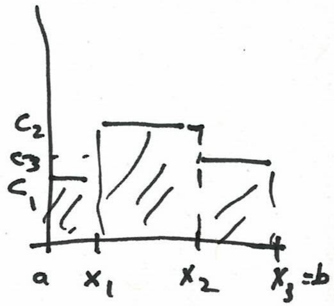
$A = ?$

- Falls $f = c$ ist, so ist

$A = c(b-a)$



- Falls $f(x) = \begin{cases} c_1 & x \in I_1 \\ c_2 & x \in I_2 \\ c_3 & x \in I_3 \end{cases}$



$A = c_1(x_1-a) + c_2(x_2-x_1) + c_3(x_3-x_2)$

Idee:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt.

1) Zerlege das Intervall $[a,b]$ in kleine Teilintervale $I_1, I_2, \ldots, I_n$

$I_k = [x_{k-1}, x_k]$

2) Wähle in jedem Intervall I_k einen punkt ξ_k aus

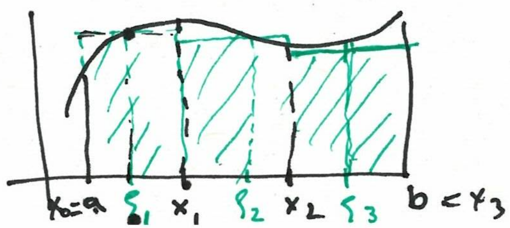
z.B. kann man ξ_k so wählen dass $f(\xi_k) = \max\{f(x) \mid x \in I_k\}$

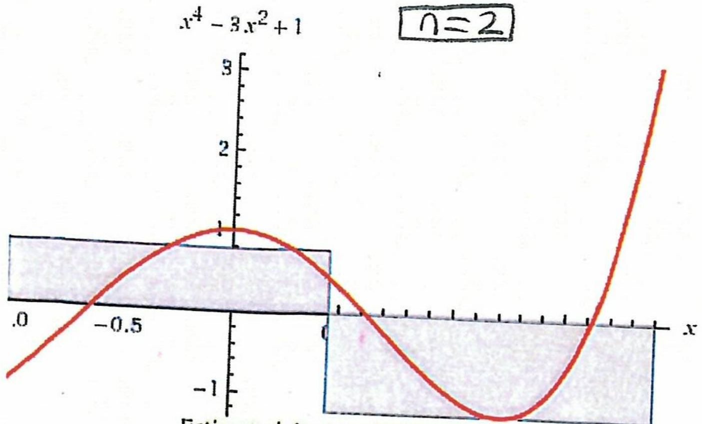
oder $f(\xi_k) = \min\{f(x) \mid x \in I_k\}$.

sind.

3) Die Summe (Riemannsche Summe)

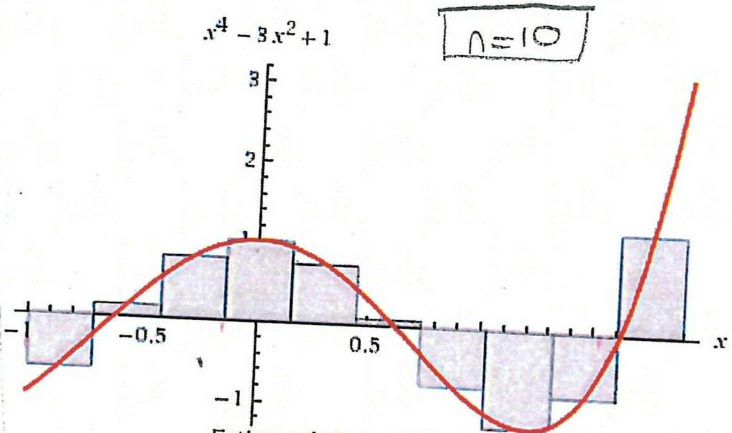
$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ ist eine Approx. für Flächeninhalt A





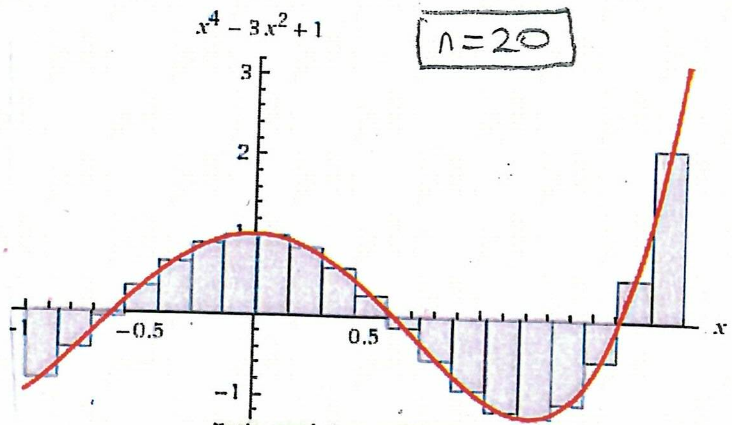
Estimated Area = −0.662513

Actual Area = 0.193198



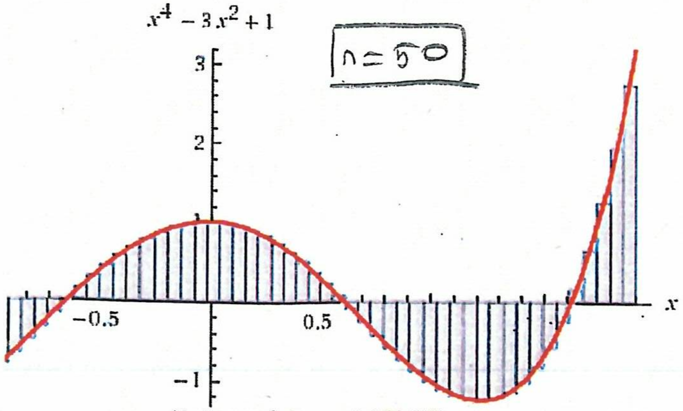
Estimated Area = 0.144612

Actual Area = 0.193198



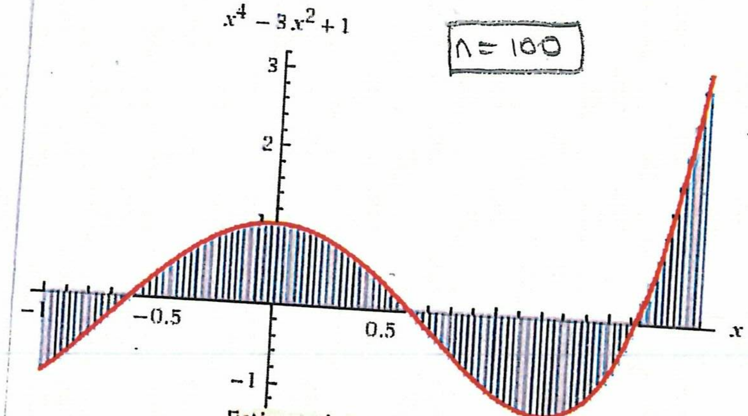
Estimated Area = 0.180939

Actual Area = 0.193198



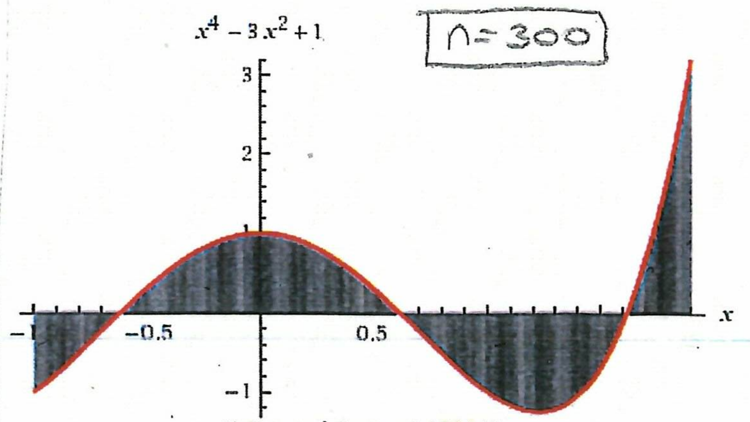
Estimated Area = 0.191232

Actual Area = 0.193198



Estimated Area = 0.192706

Actual Area = 0.193198



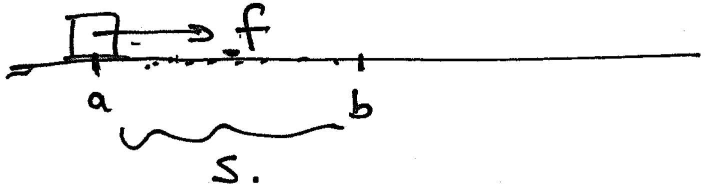
Estimated Area = 0.193143

Actual Area = 0.193198

Generated using Wolfram Math World Riemann Sum

2. Wirkt eine konstante Kraft f längs eines Weges der Länge s und zwar der x-Achse vom Punkt a bis zum Punkt $b = a + s$, so versteht man unter der von der konstanten Kraft f geleisteten Arbeit das Produkt

$$A = f \cdot s = (b - a) f$$



Ist f die Kraft, jedoch örtlich variable d.h. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion des Ortes $x \in [a,b]$, so wird man folgendermaßen vorgehen.

Zerlege das Intervall $I = [a,b]$ in kleine Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, \dots N$. Wähle in jedem Intervall einen Punkt $\xi_k \in I_k$ aus.

Dann wird man die "Riemannsche Summe"

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als Näherung für die gesuchte Arbeit.

3. Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Gesucht ist eine "Stammfunktion" (primitive). d.h. eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

$$\begin{tikzcd} ?\,F \arrow[r] & \boxed{d/dx} \arrow[r] & f \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

s.d. $F' = f$.

$$g \longrightarrow \boxed{d/dx} \longrightarrow g'$$

---

§5-1 Definition und Integrabilitätskriterien

Sei $I = [a,b]$ ein Intervall.

Defn 1) Eine Partition (Zerlegung, Einteilung) eines Intervalls $I = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots x_n = b\} \subset I$$

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$, und $\{a, b\} \subset P$.

Sei $\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \mid P$ ist endlich, $a, b \in P\}$.

Wir ~~der~~ bezeichnen $\delta_i := x_i - x_{i-1}$

2) Die Feinheit der Partition ist definiert durch

$$\boxed{\delta(P) := \max_{1 \le i \le n} \delta_i = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})}$$

3) Sei $\xi_i \in I_i$ Zwischenpunkten (Stützstellen).

4) Jede Summe der Form $P = \{x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b\}$.

$$\boxed{S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\delta_i}$$

nennt man die Riemannsche Summe der Partition P, und Zwischen Punkte $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Sei nun $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

d.h. $\exists M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$.

Wir definieren die <u>Untersumme</u>

$$\underline{s}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x\in I_i} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})$$

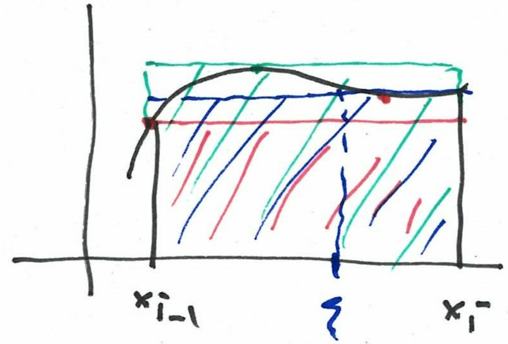
$$\inf_{x\in I_i} f(x) =: f_i \qquad = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i$$

und die <u>Obersumme</u>

$$\overline{S}(f,P) := \sum \left(\sup_{I_i} f\right)\delta_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i$$

$$F_i := \sup_{x\in I_i} f$$

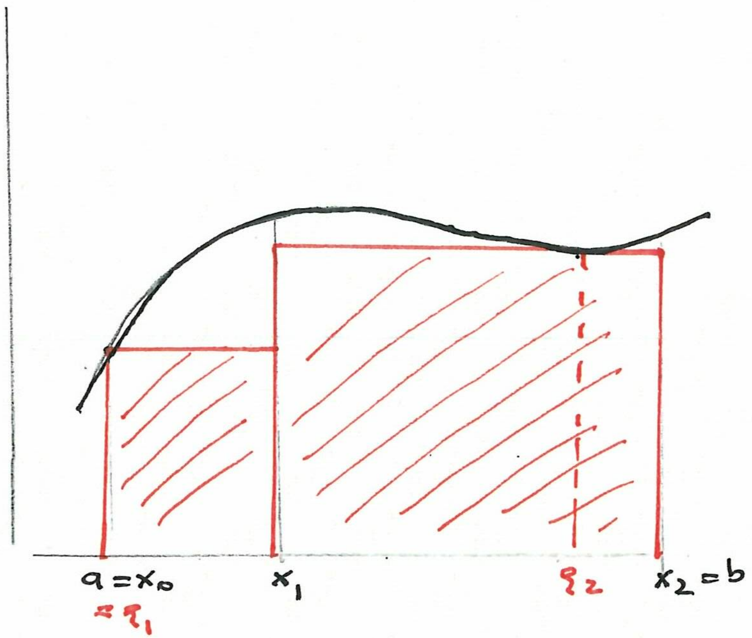
$-M < f(x) < M \quad \forall x \in [a,b]$



Da $-M \leq \inf_{I_i} f = f_i \leq F_i = \sup_{I_i} f \leq M$.

Für eine feste P gilt stets.

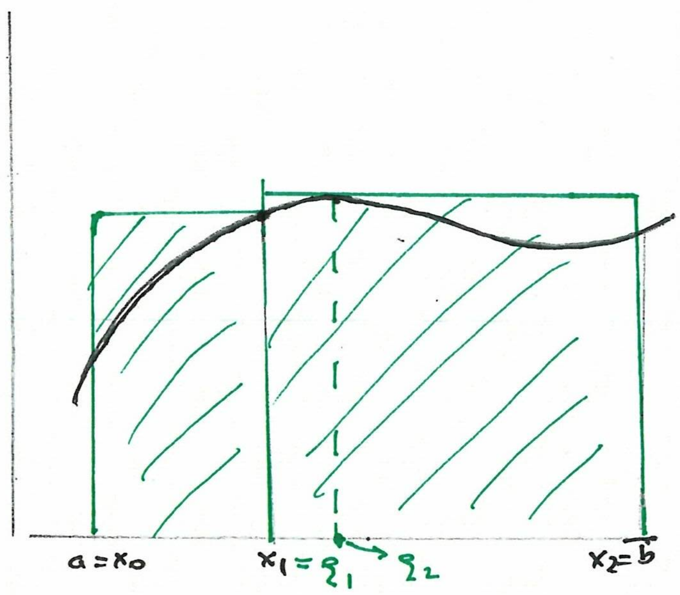
$$-M(b-a) \leq \underline{s}(f,P) \leq S(f,P,\xi)$$
$$\leq \overline{S}(f,P) \leq M(b-a)$$



$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$

$\xi_{min} = \{\xi_1 = a, \xi_2\}$

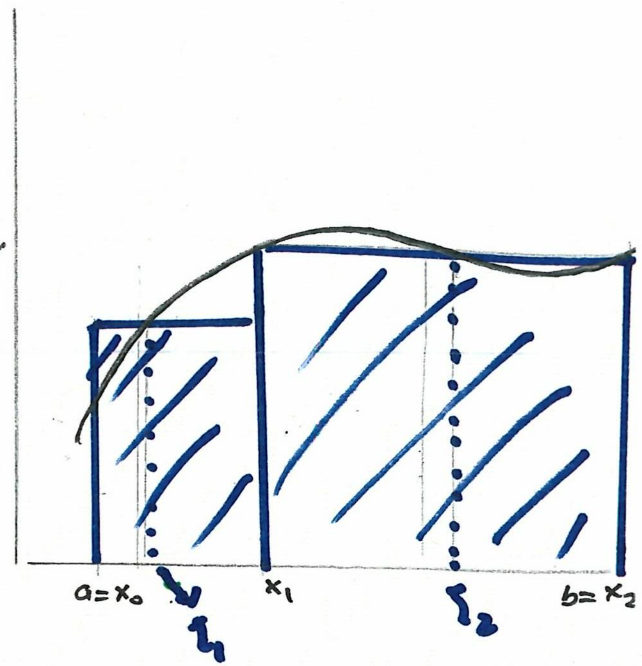
Minimum punkte



$P = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$

$\xi_{Max} = \{\xi_1 = x_1, \xi_2\}$

Maximum Punkte



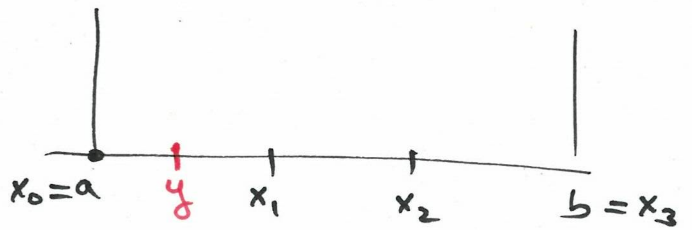
$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$

$\xi = \{\xi_1, \xi_2\}.$

$$\underline{S}(f,P) = S(f,P,\xi_{min}) \leq \underline{S(f,P,\xi)} \leq S(f,P,\xi_{Max}) = \overline{S}(f,P)$$

5-9

Defn. Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P falls $P \subset P'$



P.

$P' = \{x_0 < y < x_1 < x_2 < x_3\}$

Vereinigung $P_1 \cup P_2$ zweier Partitionen ist wieder eine Partition. Insbesondere haben 2 Partitionen immer eine gemeinsame Verfeinerung.

$P_1 \subset P_1 \cup P_2, \quad P_2 \subset P_1 \cup P_2.$

Lemma 5.1.2. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(1) Sei $P, Q \in \mathcal{P}(I)$.

$$P \subset Q \Longrightarrow$$

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

Q ist eine Verfeinerung von P.

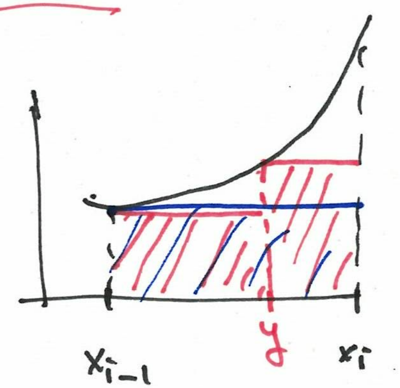
(2) Für jede $P, Q \in \mathcal{P}(I)$

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$$

Insbesondere.

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,Q)$$

Beweis (1)



$\underline{s}(f,P) \leq \underline{s}(f,Q)$

Sei $P = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$
Q eine Verfeinerung von P die durch hinzufügen eines Punktes y zu P entsteht. Sei $y \in [x_{i-1}, x_i]$.

Eine allgemeine Verfeinerung Q von P lässt sich als sukzessive ein-Punkt-Verfeinerung von P ausgehend darstellen.

(2) Da $P \cup Q$ eine Verfeinerung von P und Q ist, folgt aus (1)

$$\underline{s}(f,P) \leq \underline{s}(f, P\cup Q) \leq \overline{S}(f, P\cup Q) \leq \overline{S}(f,Q)$$

so erhalten wir

$$\underline{s}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q) \quad \forall P,Q \in \mathcal{P}(I).$$

Aus defn des Supremums als kleinste obere Schranke folgt dass

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \underline{s}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q) \quad \forall Q \in \mathcal{P}(I)$$

d.h. wiederum dass die Zahl

$$\underline{s}(f) := \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \underline{s}(f,P)$$

eine Unterschranke für $\{\overline{S}(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}(I)\}$.

Aus der defn des Inf. als grösste untere Schranke folgt dass

$$\underbrace{\sup_{P\in\mathcal{P}I} \underline{s}(f,P)}_{=:\underline{s}(f)} \leq \underbrace{\inf_{Q\in\mathcal{P}(I)} (\overline{S}(f,Q))}_{=:\overline{S}(f)}.$$

Defn. $$\boxed{\underline{S}(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P)}$$

heisst ~~das~~ Untere (Riemann) Integral von f.

$$\boxed{\overline{S}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)}$$

heisst obere (Riemann) Integral von f

Aus Lemma folgt dass

$$\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f).$$

Defn. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar (oder einfach integrierbar) falls

$$\boxed{\underline{S}(f) = \overline{S}(f)}$$

In diesem Fall bezeichnen den gemeinsamen ~~Wert~~ Wert von $\underline{S}(f)$ und $\overline{S}(f)$ mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \underline{S}(f) = \overline{S}(f)}$$

Bmk.: Das Symbol $\int$ ist ein stilisiertes S für Summe.

dx ist wie $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ in die Riemannsche Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

b = obere Grenze von $\int$

a = untere Grenze von $\int$.

f = Integrand (eine Funktion).

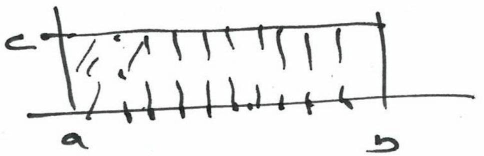
x = Integrations variable.

Bsp. 1/ Sei $c \in \mathbb{R}$

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{konst. Funk.}$$
$$x \longmapsto c.$$

Für jede Partition P gilt

$$\underline{s}(f,P) = \overline{S}(f,P) = (b-a)c.$$



$$\Rightarrow \sup \underline{s}(f,P) = \inf \overline{S}(f,P)$$
$$\underline{s}(f) = \overline{S}(f) \Rightarrow f \text{ ist integ.}$$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ rationale Zahl} \\ 0 & x \text{ irrational und in } [0,1]. \end{cases}$

Jede Teilintervall $I_k \subset [0,1]$ in jeder Partition enthält rationale und irrationale Zahlen.

$$\underline{s}(f,P) = 0 \qquad \underset{\min_{I_i} f}{f_i} = 0 \quad \forall i$$
$$\overline{S}(f,P) = 1. \qquad \underset{\max_{I_i} f}{F_i} = 1 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \underline{s}(f) = 0$$
$$\overline{S}(f) = 1$$

$\Rightarrow f$ ist nicht integrierbar.

Kriterien für Integrierbarkeit

Satz 5.1.4. (Riemannsche Kriterium)

Eine beschränkte Funktion f auf $[a,b]$ ist integrierbar (a)

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit (b)

$$\overline{S}(f,P) - \underline{s}(f,P) < \varepsilon.$$

Beweis ($\Leftarrow$) (b) $\Rightarrow$ (a)

Für alle $Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt

$$0 \leq \underbrace{\overline{S}(f)}_{=\inf\limits_{Q\in\mathcal{P}} \overline{S}(f,Q)} - \underbrace{\underline{S}(f)}_{=\sup\limits_{Q\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,Q)} < \overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q)$$

Aus (b) folgt dass $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{S}(f) = \underline{S}(f) \Rightarrow f \text{ ist integ.}$$

(a) $\Rightarrow$ (b)

($\Longrightarrow$) Wir nehmen an dass f integ. ist.

und $A := \int_a^b f(x)\,dx = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f,P)$

$= \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f,P)$

Nach defn von Sup und Inf folgt dass zwei Partitionen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I)$ existieren so dass

(1) $A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f, P_1)$

(2) $\overline{S}(f, P_2) \leq A + \frac{\varepsilon}{2}$

Definiere $Q = P_1 \cup P_2$

Dann $P_1 \subset Q$, $P_2 \subset Q$

Nach Lemma.

(3) $\underline{S}(f,P_1) \leq \boxed{\underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q)} \leq \overline{S}(f,P_2)$

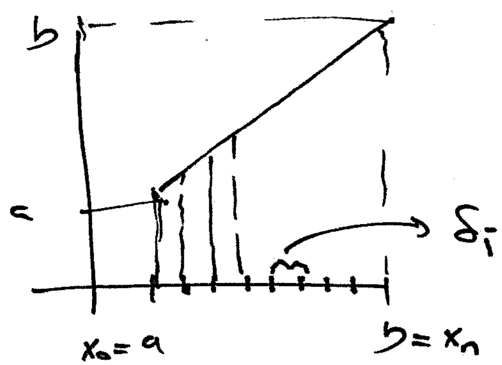
Dann gilt

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{\leq} \underline{S}(f,P_1) \underset{(3)}{\leq} \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \underset{(3)}{\leq} \overline{S}(f,P_2) \underset{(2)}{\leq} A + \varepsilon/2.$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ (b) gilt. ∎

Bsp. $f(x) = x \quad : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x$



$\delta_i = \frac{b-a}{n} \qquad i = 1, \ldots n,$

Sei $\quad P_n = \{a + ih \mid 0 \leq i \leq n\}$

wobei $\quad h = \frac{b-a}{n}.$

die Uniforme Partition.
oder äquidistanten Partition.

d.h. $\quad x_i = a + \frac{b-a}{n} i \qquad 0 \leq i \leq n.$

Dann ist

$$\underline{s}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(x_{i-1})}^{f_i} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[a + (i-1) \underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{h} \right] \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a + (i-1) h. \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[na + h \frac{n(n-1)}{2} \right].$$

$$= (b-a) a + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{(n-1)}{n}.$$

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i (h). \ldots$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{s}(f, P_n) = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Für gegebene $\varepsilon > 0$, wähle n so dass $\frac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon. \xRightarrow{\text{Satz}} f$ ist integ.

Satz. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Folgende Aussagen sind äquivalent

(I) f ist integrierbar.

(II) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass

$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$ = die Menge aller Partitionen von ~~…~~ P von I für welche $\delta(P) \leq \delta$,

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

Kor $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt
FASÄ. (1) f ist integrierbar, $\int_a^b f = A$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass für jede Partition $P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1 \dots \xi_n$ zwischen Punkte, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$:

$$\Big|A - \underbrace{S(f, P, \xi)}_{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}\Big| < \varepsilon$$

Bmk. Dieser Satz lässt sich auch so formulieren
Eine beschränkte Funkt $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi) \quad \text{existiert}$$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

für alle P mit $\delta(P) \to 0$.

und haben wir
$$\lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bsp. $f(x) = x$.

Wir haben gesehen dass

$$\overline{S}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\downarrow \delta(P_n) \to 0$$

$$(b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\uparrow$$

$$\underline{S}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

P_n ist ein Folge von Partitionen

mit $\delta(P_n) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{(b-a)^2}{2} + a(b-a)$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}$$

Satz 5.2.8. Sei $f = [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Dann ist f integrierbar.

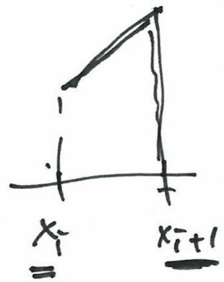
Beweis Sei f mon $\nearrow$

Sei $P_n \in \mathcal{P}(I)$ unif Partition

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i \qquad i = 0, \dots, n.$$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\left(\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$



$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$f(x_1) - f(x_0)$$
$$+ f(x_2) - f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$= f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$$

Für jede gegebene $\varepsilon > 0$
haben wir für hinreichende
gross n

$$\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) < \varepsilon .$$

d.h. für diese genug gross n

haben wir

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \varepsilon .$$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar.

Riem.
Kriterium.

$\blacksquare$