- Eine **Partition eines Intervalls** $I = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge
$P = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$.

- $\mathcal{P}(I) := \{ P \subset I \mid P \text{ ist eine Partition von } I \}$

- die **Feinheit** der Partition
$$\delta(P) := \max_{1 \le i \le n} \delta_i = \max (x_i - x_{i-1})$$

- Die **Riemannsche Summe** der **Partition P und Zwischenpunkte** $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
$$= \boxed{S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta_i}$$

Sei f eine beschränkte Funktion.

- Die **Untersumme** $= \underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} f_i\, \delta_i$
wobei $f_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$ $\quad I_i = [x_{i-1}, x_i]$

- Die **Obersumme** $= \overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} F_i\, \delta_i$
wobei $F_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$

Für eine feste P gilt stetts
$$\underline{S}(f, P) \le S(f, P, \xi) \le \overline{S}(f, P)$$

Lemma Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $P, Q \in \mathcal{P}(I)$

1) $P \subset Q \Rightarrow \underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, Q) \le \overline{S}(f, Q) \le \overline{S}(f, P)$

2) Für jede $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt
$$\underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, Q)$$

Defn $\underline{S}(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P)$

Untere-Integral von f

$\overline{S}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)$

- **Obere Integral von f**

Defn $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, ist **Riemann-integrierbar** falls
$$\boxed{\underline{S}(f) = \overline{S}(f) =: \int_a^b f(x)\,dx}$$

Kriterien für Integrierbarkeit

Satz (Riem. Kriterium)
$f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt, ist integrierbar

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ so dass
$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I) := \{P \in \mathcal{P}(I) \mid \delta(P) < \delta\}$.
$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ so dass
$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$ und $\xi_1 \cdots \xi_n$ zwischen
Punkte ::

$$|A - S(f, P, \xi)| < \varepsilon$$

und

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Satz $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt monoton $\Rightarrow$ f ist integrierbar.

Bsp $f(x) = x^{\bullet}$ ist integrierbar.
auf $[a, b]$.

§5.2 Integrierbare Funktionen

Wir haben schon gesehen dass
$f(x) = c$. oder $f(x) = x$
oder jede mon. func f
integrierbar ist.

Satz Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$
beschränkt, integrierbar und
$\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$,
λf, fg, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$
integrierbar.
Falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.
so ist f/g integrierbar.

Bmk: Die Menge $\{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ intg.}\}$
bilden ein Vektorraum.

Beweis Idee.

(a) Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Dann
$$\boxed{\sup_{x,y\in[a,b]} (\phi(x) - \phi(y)) = \sup_{x\in[a,b]} \phi(x) - \inf_{x\in[a,b]} \phi(x).} \quad (*)$$

Wir wenden das Riem. Krit. an

(*) d.h. $\boxed{f \text{ ist integ} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists P\in \mathcal{P}(I) \text{ mit } \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon}$

z.z. f, g integ $\Rightarrow f+g$ integrierbar.

Sei P_1, P_2 so dass

$\overline{S}(f,P_1) - \underline{S}(f,P_1) < \varepsilon$ (Da f integr ist)

$\overline{S}(g,P_2) - \underline{S}(g,P_2) < \varepsilon$ (Da g int. ist)

Sei $P = P_1 \cup P_2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon \\ \overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) < \varepsilon\end{array}}$

Sei $h(x) = f(x) + g(x)$

$|h(x) - h(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$

$\sup|h(x) - h(y)| = \sup h(x) - \inf h(x).$

$\Rightarrow \overline{S}(h,P) - \underline{S}(h,P) \leq \underbrace{\left(\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right)}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left(\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P)\right)}_{<\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Wir haben ein Partition $P = P_1 \cup P_2$ gefunden mit

$\overline{S}(h,P) - \underline{S}(h,P) < 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ mittels Riem. Kriter. : h ist Integrierbar.

$\blacksquare$

Kor Jede Polynom auf $[a,b]$ ist integrierbar.

Seien P, Q zwei Polynome in dem und $[a,b]$ ein Intervall

Q keine Nullstelle besitzt.

Dann ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ integrierbar.

Ziel: Wir werden zeigen dass stetige Funktionen auf $[a,b]$ integrierbar sind.

Defn. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in D gleichmässig stetig (uniformly convergent) falls

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in D$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f ist stetig auf D:

$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0$ so dass

$\forall y \in D: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Bsp. $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ ist stetig aber nicht glm. stetig

Satz Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.

Bsp. $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$ ist glm. stetig.

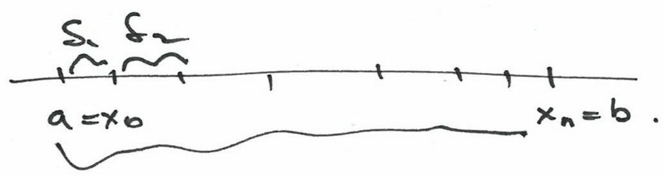
Satz $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Beweis f ist glm. stetig.
(f ist beschränkt nach min-max Satz)

d.h. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$$

Sei $P \in \mathcal{P}(I)$ mit Feinheit $\delta(P) < \delta$.



$$\delta(P) = \max \delta_i < \delta.$$

Dann folgt dass für alle $x, y \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$

folgt dann $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/(b-a)$

und deshalb $\sup\limits_{I_i} f - \inf\limits_{I_i} f \leq \varepsilon/(b-a)$.

Woraus folgt dass

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\right)\delta_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\delta_i$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Lemma Seien $a < b < c$

$f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$. beschränkt

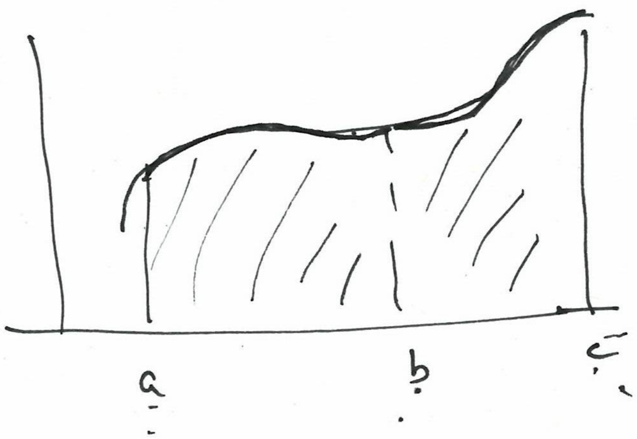
mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar.

Dann ist f auf $[a, c]$ integrierbar

und Gebietsadditivität

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx} \quad (**)$$

Beweis: Die Summe einer Obersumme (Untersumme) für $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ ergibt eine Obersumme (Untersumme) für f.



Sei $a < b$

Nun erweitern wir die Defn von $\int_a^b f\,dx$ auf

Konvention

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Dann gilt $(**)$ für alle Tripel a, b, c.

Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, kompakt mit Endpunkten a, b.
Sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\int_a^b \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

d.h. Die Abbildung.

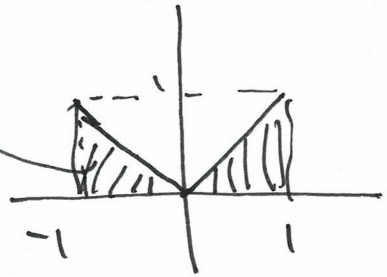
$$\mathcal{R}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

ist eine lineare Abbildung.

$\mathcal{R}(I)$ ist Vektorraum von integrierbare Funktionen

Clicker Frage

$$\int_{-1}^{1} |t|\,dt$$



$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Bsp. $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx$. | $f(x) = x^2 - x$ ist integrierbar da $x^2 - x$ stetig ist.

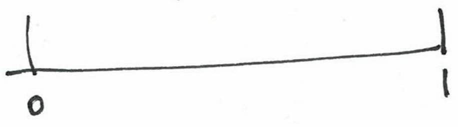
Wir wenden die folgende Kriterium an. Sei $P^{(n)}$ eine Folge von Partition des Intervall $[0,1]$ mit $\delta(P^{(n)}) \to 0$ für $n \to \infty$; und $\{\xi^{(n)}\}$ eine feste Wahl von Zwischen Punkte zur Partition $P^{(n)}$

Dann $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$

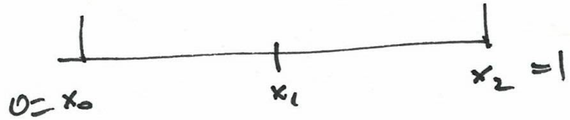
Sei $P^{(n)}$ uniform Partition

$\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$, $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$

$k = 0, 1, \dots n.$



$n = 2$



$\delta_k = \frac{1}{n}.$

$\delta(P^{(n)}) = \frac{1}{n} \to 0$

Wir wählen die rechten Endpunkte des Intervals

$$I_k := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \text{ als}$$

zwischen Punke.

$$\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n}. \qquad f(x) = x^2 - x$$

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k^{(n)})}\, \delta_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)\right) \frac{1}{n}.$$

$$= \frac{1}{n^3} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.} - \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \frac{2}{6} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = -\frac{1}{6}.}$$

§5-3. Ungleichungen und der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

R-Integral ist linear

Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>Beweis</u>: Es genügt ~~zu~~ zu zeigen dass

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \ge 0.$$

Da $g - f \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$,

Für jede Partition P von $[a,b]$

$$\overline{S}(g-f, P) \ge \underline{S}((g-f), P) \ge 0.$$

Somit $\overline{S}(g-f) = \underline{S}(g-f) = \int_a^b (g-f)\,dx \ge 0.$

<u>Kor</u> Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, beschränkt folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

<u>Beweis</u> $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

Wir wenden die Monotonität an und erhalten wir

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

<u>Satz</u> <u>Cauchy-Schwarz Ungleichung.</u>

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.}$$

<u>Beweis</u>: Übung. CS in $\mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

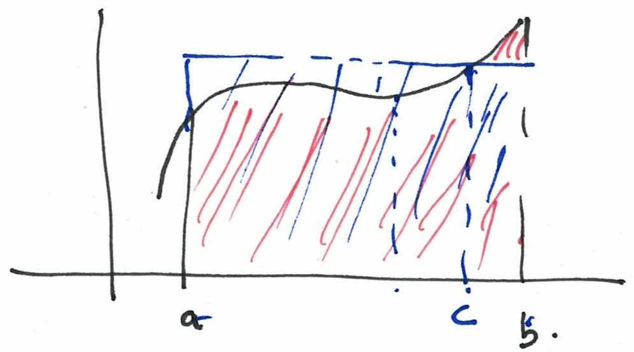
$$\langle f,f\rangle := \int_a^b f^2(x)\,dx =: \|f\|^2$$

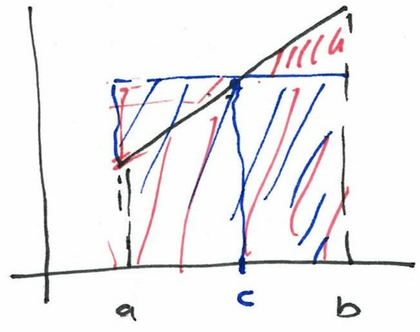
Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gibt es $c \in [a,b]$

mit
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$





Beweis Mit min-max Satz,

$\exists\ u, v \in [a,b]$ mit

$$m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = f(u)$$

$$M = \max\{f \qquad\} = f(v)$$

$$f(u) \le f(x) \le f(v)$$

$$\int_a^b f(u)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(v)\,dx$$

$$f(u)\underbrace{\int_a^b 1\,dx}_{b-a} \le \int_a^b f(x)\,dx \le f(v)\underbrace{\int_a^b 1\,dx}_{b-a}$$

Wir nehmen an dass $a<b$.

$$f(u) \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{ein Zahl } Y} \leq f(v).$$

$$\underline{f(u)} \leq Y \leq \underline{f(v)}.$$

f ist stetig., wegen Zwischenwertsatz ~~haben~~ es $c \in [a,b]$ mit

$$f(c) = \cancel{g}\, Y$$

$$\Rightarrow f(c) = Y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$\Rightarrow \exists\, c \in [a, b]$ so dass

$$c(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Satz (Cauchy) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~ab~~ in f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$.

Dann gibt es $c \in [a,b]$ mit

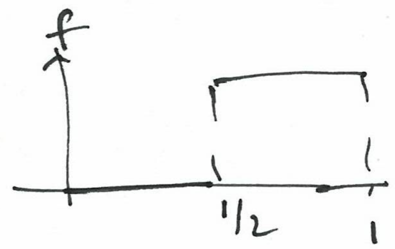
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Bmk

Falls $g \equiv 1$, dann erhalten wir MWS der Integralen.

!! **Bmk !!** Die Voraussetzung dass f stetig ist, ist wichtig!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Dann $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 0\,dx + \int_{1/2}^1 1\,dx = \frac{1}{2}$

Es gibt kein $c \in [0,1]$ so dass $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} = f(c)\,[1-0] = f(c)$

§5.4 Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung

F. S. der Analysis.

Nun können wir die Zusammenhang zwischen die Ableitung und das Integral geben.

Defn. Sei $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f falls F stetig differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.

HID

Satz (Hauptsatz der Diff. und Int. Rechnung)

Seien $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \le x \le b.$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

d.h. $\int_a^x f(t)\,dt$ ist ein Stammfunk. von f.

Bmk 1) Wegen HID, hat jede stetige Funktion f mindestens eine Stammfunk. nämlich

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\begin{tikzcd} ?\ F \arrow[r] & \boxed{d/dx} \arrow[r] & f = F' \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

$$f \longrightarrow \boxed{\int_a} \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt = F \longrightarrow \boxed{d/dx} \longrightarrow f$$