Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, λf, fg, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ integrierbar.

Falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ so ist f/g integrierbar

Satz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar

Konvention: $\int_a^a f(x)\,dx := 0$

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Gebietsadditivität

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Satz Sei $I = [a,b]$ ein kompakte Intervall, sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Kor $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)^{1/2}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

//

Defn Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F stetig differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F'=f$ in $[a,b]$ gilt.

Bsp: $f(x)=x$. Dann $F(x)=\frac{x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von f.

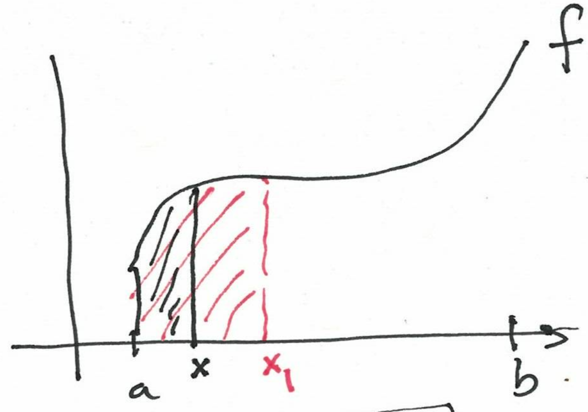
Satz **Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung (HID)**

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.
Die Funktion

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt \quad ; \; a\le x\le b$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und $\underline{F'(x)=f(x)}$ $\forall x\in[a,b]$.

d.h. $\int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f.



$$\boxed{F(x):=\int_a^x f(t)\,dt}$$

$$F(x_1)=\int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

Bmk. 1) Für jede stetige Funktion f, gibt es ein Stammfunktion F, s.d. $F'(x)=f(x)$.
Und kann man $\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$ nehmen.

Bmk 2 Falls $F(x)$, $G(x)$ ~~[illegible]~~ 2 Stammfunktionen von f sind

~~Dann~~, da $F'(x) = f$ und
$G'(x) = f$

dann gilt

$$F'(x) - G'(x) = f - f = 0.$$

d.h $\frac{d}{dx}\left[(F-G)(x)\right] = 0 \quad \forall_{x \in [a,b]}$

$\Rightarrow$ $F - G$ ist ein konstant

$\Rightarrow$ $F(x) - G(x) = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Jede Stammfunktion von eine stetige Funkt. f hat der Gestalt

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

Bsp.

$f(x) = x$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$

$G(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

$\frac{x^2}{2} + e$,

Beweis (HID). Seien $x, x_0 \in [a,b]$.

z.z. $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

z.z. $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

$$\underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{= F(x_0)} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{= F(x)}.$$

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

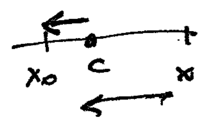
Aus MWS der Integralrechnung, folgt dass es $c \in [x_0, x]$ gibt so dass

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(c)(x - x_0)$$

$$F(x) - F(x_0) = f(c)(x - x_0)$$

für ein $c \in [x_0, x]$.

Für $x \neq x_0$ folgt dann



$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c)$$

Da c zwischen x_0 und x liegt, folgt dass wenn x gegen x_0 strebt muss c auch gegen x_0 streben.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(c) = \lim_{c \to x_0} f(c)$$

Da f stetig ist, $\lim_{c \to x_0} f(c) = f(x_0)$

Somit $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

d.h. $F'(x_0) = f(x_0)$

Da x_0 beliebig war, $F'(x) = f(x)$. $\blacksquare$

$$\int_0^1 (x^2 - x)\,dx \underset{\text{Rieman summe}}{=} -\frac{1}{6}.$$

Mit ein Stammfunktion, lässt sich das Integral einer gegebenen Funktion auf ein Intervall $[a,b]$ sehr leicht berechnen. Dies ist der Inhalt des Fundamentalsatz der Analysis

Satz (Fund. Satz der Analysis)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis. Existenz des Stammfunktion ist nach H.I.D.

Eindeutigkeit bis auf eine additive Konstante ist nach die Bemerkung 2.

Für $x \in [a,b]$, definiere

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist $F_0(x)$ ein Stammfunktion von f (nach H.I.D)

$$F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$F_0(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Somit $\boxed{F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt.}$

Für beliebige Stammfunktion F gilt (mit Bmk 1)

$F = F_0 + C$ für eine Konstante,

Somit $F(b) - F(a) = (F_0(b) + C) - (F_0(a) + C)$

$= F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)\,dt$ ☒

<u>Bsp.</u> $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx$

$f(x) = x^2 - x$

Ein Stammfunk für f ist

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

$\Longrightarrow \int_0^1 (x^2 - x)\,dx \underset{\text{FSA.}}{=} F(1) - F(0) = F(x)\Big|_0^1$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)$

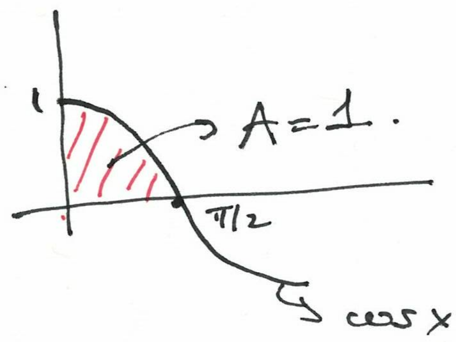
$= -\frac{1}{6}.$

<u>Bsp.</u> $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

$f(x) = \cos x$

$F(x) = \sin x$

da $F' = (\sin x)'$
$= \cos x$
$= f.$



$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2}$

$= \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1.$

Clicker Frage.

$$F(x) = \int_0^{x^2+5} \underline{\sin^2 t}\, dt$$

$$F'(x) = \,?$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Dann ist $G'(x) = f(x)$.

Falls $\boxed{G(x) = \int_0^x \sin^2 t\, dt}$ ist

Dann $G'(x) = \sin^2 *$

$$F(x) = G(x^2+5) = (G \circ H)(x)$$

wobei $G(x) = \int_0^x \sin^2 t\, dt$

$$H(x) = x^2+5.$$

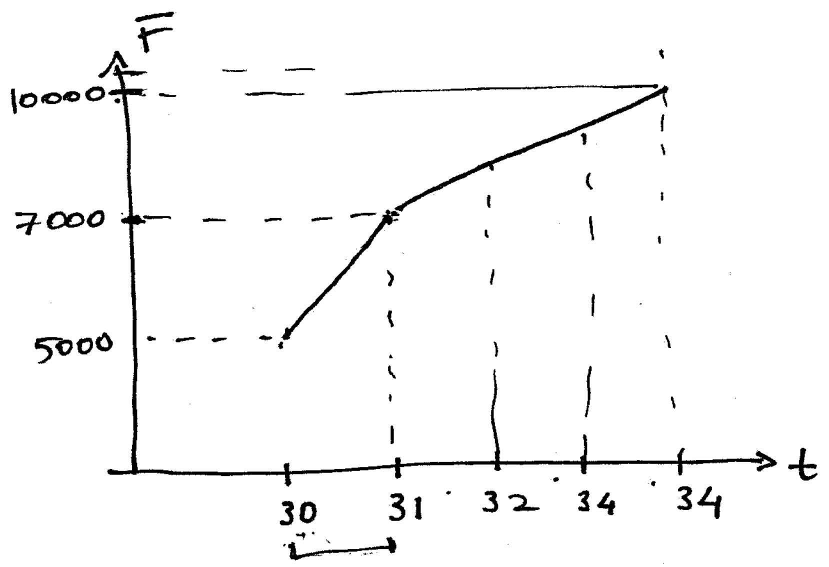
$$F'(x) = \underbrace{G'(\underline{H(x)})} \cdot \underbrace{H'(x)}$$ mit Kettenregel.

$$= \left(\sin^2(x^2+5)\right) \cdot 2x$$

$$F'(x) = 2x \sin^2(x^2+5)$$

Wir betrachten ~~das~~ folgende aktuelle Problem

Sei $F(t)$ die <u>Gesamtzahl</u> der Covid-19 Fälle zu t Tagen nach dem ersten bestätigten Fall.



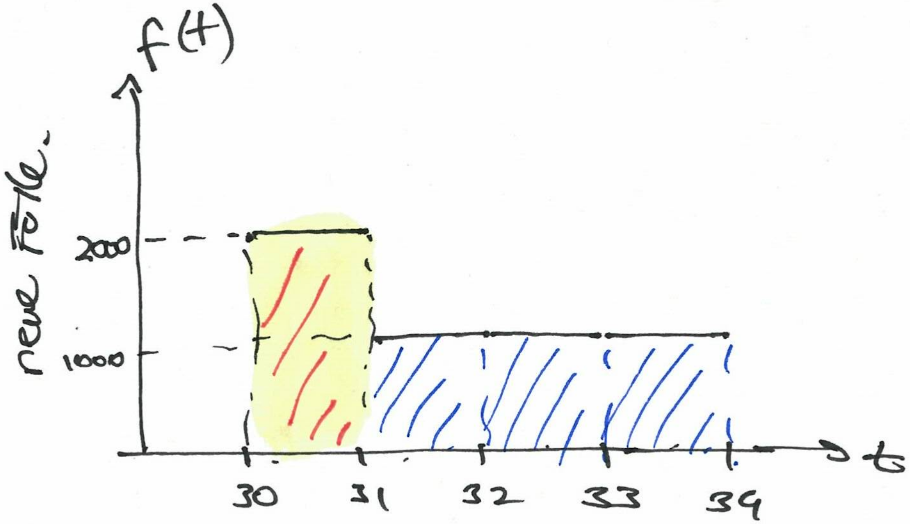
Falls wir die Gesamtzahl der <u>neuen</u> Fälle zwischen Tag 30 und 34 finden wollen, dann können wir dies sehr einfach mit dem Graph von F berechnen. Nämlich.

$$F(34) - F(30) = 10000 - 5000 = 5000.$$

Gibt es eine andere Möglichkeit, die gleiche Zahl zu berechnen?

Wir betrachten nun die Funktion $f(t)$ die Zahl der neuen Fälle angibt

Von Tag 30 bis Tag 31, gibt es einen Tag, und in diesem Zeitraum gibt es 2000 neue Fälle.



Dann gibt es von Tag 31 bis Tag 34, eine Zunahme von 1000 Fälle pro Tag.

Um die Zahl der neuen Fälle zu bestimmten betrachten wir also die Steigerungsrate, ~~die~~ von F, die durch die Ableitung von F gegeben ist.

$f(t) = F'(t)$

Wir berechnen nun die gleiche Menge, d.h die Anzahl der neuen Fälle von Tag 30 bis Tag 34 unter der Verwendung der Funktion f.

Tag 30 – Tag 31 2000/Tage

Tag 31 – Tag 34 1000/Tage.

$(2000)(1) + (1000)(3) = 2000 + 3000 = 5000.$

$$\boxed{\int_{30}^{34} f(t)\,dt = 5000 = F(34) - F(30),}$$

Die Gesamtveränderung der Funk F zwischen Tag 30 – Tag 34 $= F(34) - F(30)$

$= \sum \underbrace{(\text{Änderungsrate})}_{F' = f} \times \underbrace{(\text{mit dieser Rate verbrachte Zeit})}_{\Delta t}$

$$F(34) - F(30)$$

$$= \sum \underbrace{(\text{And. rate})}_{F' = f} (\Delta t)$$

$$\downarrow$$

$$\int_{30}^{34} f(t)\,dt .$$

<u>Bmk.</u> Falls f stetig ist, nach HID gibt es ein Stammfunk $F(x)$ und jede andere Stammfunktion ist $F(x) + C$ für eine konstante C.

Ein <u>Stammfunktion</u> von f heisst auch <u>unbestimmtes Integral</u> von f und

wird mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet

In diesem Fall schreiben

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C .$$

2) Das unbestimmtes Integral kann man als Umkehr Operation zur Ableitung interpretieren.

$$F \to \boxed{d/dx} \to \underset{\substack{\| \\ F'}}{f} \to \boxed{\int} \to F .$$

Bsp. **Stammfunktion.**

Defn Bereich.	Funkt f	StamF $= \int f\,dx$.
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$(-1,1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\mathbb{R}$.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$(0,\infty)$	$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$

$$F(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x} & x < 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Integrationsmethoden.

Da das Integrieren die Umkehr von Differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregeln eine für das Integral.

Satz (Partielle Integration).

Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \big(f(b)g(b) - f(a)g(a)\big) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx}$$

Beweis: Sei $H(x) = f(x)g(x)$

H ist diff. und

$$H'(x) = f'g + g'f = (fg)'$$

d.h. $H(x) = f(x)g(x)$ ist ein Stammfunk von $f'(x)\,g(x) + g'(x)f(x)$.

Aus Fund. S. A folgt

$$\int_a^b \big[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big]\,dx$$

$$= H(b) - H(a)$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$\square$

Bmk. Wir schreiben die Par. Int of in Kurzschreibweise als

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Bsp. $\int_0^1 x e^x \, dx$

~~Wir~~ setzen $f(x) = x$ $\quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x$

$$\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx$$

$$= x e^x \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x \, dx}_{e^x \big|_0^1}$$

$$= x e^x - e^x \Big|_0^1 = (e^1 - e^1) - (0 - 1)$$

$$= 1.$$

Bmk

Der Schlüsselpunkt bei der PI ist, die Funktionen f, g' geeignet zu wählen, die die Rollen f und g übernehmen.

Falls z.B. $\int x e^x \, dx$ zu berechnen

~~Falls~~ setzen wir $f(x) = e^x \quad g'(x) = x$

$f' = e^x \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\int \underbrace{x}_{g'} \underbrace{e^x}_{f} \, dx = fg - \int f'g \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} e^x - \boxed{\int e^x \cdot \frac{x^2}{2} \, dx}$$