Hauptsatz der Integral und Diff-rechnung (HID)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar

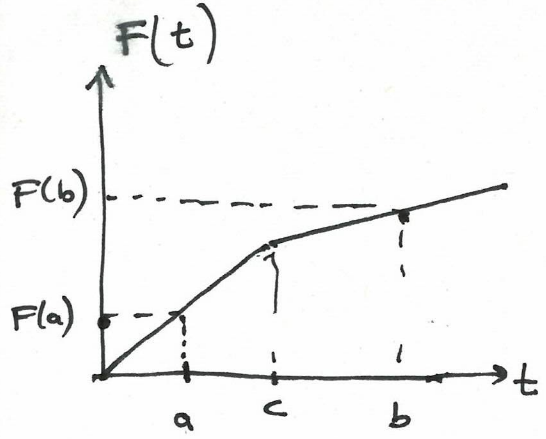
und $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

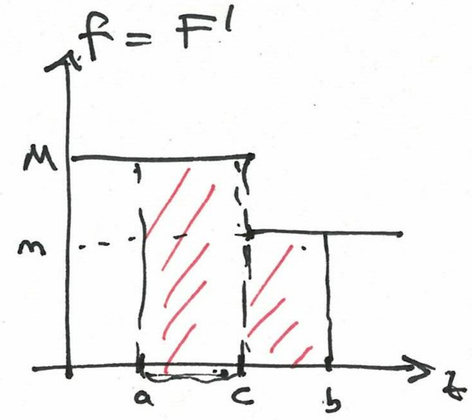
d.h $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist ein Stammfunk von f.

Satz Fundamental satz der Analysis

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$





$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad F' = f.$$

Satz Partielle Integration

Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = \underbrace{f(x)g(x)\Big|_a^b}_{f(b)g(b) - f(a)g(a)} - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx.}$$

11

Bsp.

(b) $\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$
$= xe^x - e^x + C.$

(1) $\int \ln x\,dx = \int \underbrace{(\ln x)}_{f}\underbrace{(1)}_{g'}\,dx$

$f(x) = \ln x \qquad g'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = x.$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \underbrace{\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx}_{\underbrace{\int 1\,dx}_{x}}$$

$$\boxed{\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C}$$

(2) $I = \int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx \qquad f = e^x \quad g' = \cos x$
$\qquad f' = e^x \quad g = \sin x$

$I = e^x\sin x - \int e^x \sin x\,dx.$

$\int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx \qquad f' = e^x \quad g' = \sin x$
$\qquad g = -\cos x$

$= -e^x\cos x + \underbrace{\int e^x\cos x\,dx}_{I}$

$I = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$

$I = e^x\sin x - [-e^x\cos x + I].$

$I = e^x\sin x + e^x\cos x - I$

$2I = e^x[\sin x + \cos x]$

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Methode der Substitution

Methode der Subs. ist eine Umkehrung der Kettenregel

Sei $a<b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff., und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subset I$ und $F : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann ist $(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

(Kettenregel).

Falls F eine Stammfunk von eine Funk f ist, ie $F' = f$ dann ist $F \circ \phi$ ist eine Stammfunk von $F'(\phi(t))\,\phi'(t)$

$= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$.

Satz 5.4.6. (Substitution) Sei $a<b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff. $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\phi([a,b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funk

Dann gilt.

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx.$$

Kor Für die Unbestimmte Integral gilt

$$\int f(x)\, dx \Big|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\, dt + C$$

Dies Formel bedeutet folgendes:
Die Linke seite als Funktion von x ist gleich der rechten Seite als Funktion von t vermöge der Relation $x=\phi(t)$.

Beweis: Sei F eine Stammfunk. von f auf einem Interval $[c,d] \supseteq (\phi([a,b]))$

Dann nach Kettenregel $F \circ \phi$ eine Stammfunk. von

$$f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

Dann folgt aus F. Satz der Analy.

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt \overset{FS}{=} (F\circ\phi)(b) - (F\circ\phi)(a)$$

$$= F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

$$\overset{FS}{=} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

Für die Subs. regel

Bmk: gibt es im Prinzip 2

Lesarten:

Man kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts nach links anwenden.

$\boxed{\text{(A) (links} \to \text{rechts)}}$

Liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

vor, so können wir die Subs.regel von links nach rechts anwenden.

Bsp. $\int_0^1 (1+t^2)^{104} \cdot 2t \, dt$

Setzt man $x = 1+t^2 = \phi(t) \Rightarrow \phi'(t) = 2t$
$dx = 2t\,dt$

$$\int_0^1 (1+t^2)^{104} \, \underline{2t\, dt}$$

$$= \int_1^2 x^{104}\, dx = \frac{x^{105}}{105}\Big|_1^2$$

$$\int_0^1 (1+t^2)^{104} 2t\,dt = \frac{(2^{105}-1)}{105}.$$

Bmk. Wenn man beshmmte Integral berechnet gibt es 2 methoden mit den Integrations-grenzen umzugehen.

ⓐ Man substituiert $x = \phi(t)$, berechnet eine Stammfunktion in x und ersetzt danach neue variable x mit der alten t und benützt die Grenzen für t.

$$\int_0^1 (1+t^2)^{104} 2t\,dt \Big|_{x=1+t^2} = \int_{t=0}^{t=1} x^{104}\,dx$$

$$= \frac{x^{105}}{105} = \frac{(1+t^2)^{105}}{105}\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{2^{105}}{105} - \frac{1}{105}.$$

ⓑ Man ändert die Integrations-grenzen während der Substitution.

Bsp. $$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt \qquad \begin{aligned} x &= 1+e^t \\ dx &= e^t dt \end{aligned}$$

$$= \int_2^{1+e} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_2^{1+e} = \ln|1+e| - \ln 2$$

$$= \ln\left|\frac{1+e}{2}\right|$$

$$\int_{t=0}^{t=1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{t=0}^{t=1}$$
$$= \ln|1+e^t| \Big|_{t=0}^{t=1}.$$
$$= \ln|1+e| - \ln|2|$$
$$= \ln\left|\frac{1+e}{2}\right|$$

(B) (rechts $\longrightarrow$ links).

Ein Integral liegt der Gestellt $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ mit Gewisse Grenzen α, β vor das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneter Substitution $x = \phi(t)$ dieses Integral umzuformulieren

so dass die Subs. regel anwendbar ist wobei $\phi(t_0) = \alpha$ $\phi(t_1) = \beta$ gelten muss

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t_1)} f(x)\,dx.$$

Bsp. $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Mit der Substitution $x = \sin t$
$dx = \cos t\,dt$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}\,\cos t\,dt$$

$x = 0 \Rightarrow x = \sin t = 0 \Rightarrow t = \cancel{\pi/2}\ 0$
$x = 1 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = I$$

(a) Mit der Subst. $x = \cos t$

$dx = -\sin t \, dt$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\pi/2}^{0} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{\sin t} \cdot (-\sin t)\, dt$$

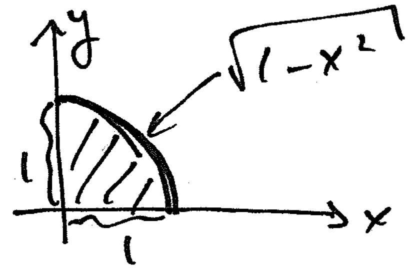
$$I = -\int_0^{\pi/2} (\sin t)(-\sin t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt.$$

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} \, dt$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I = \pi/4}$$



$y = \sqrt{1-x^2}$

(b) Mit Trig. Formel

$$\cos^2 t - \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} = \cos 2t$$

$$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$$

$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

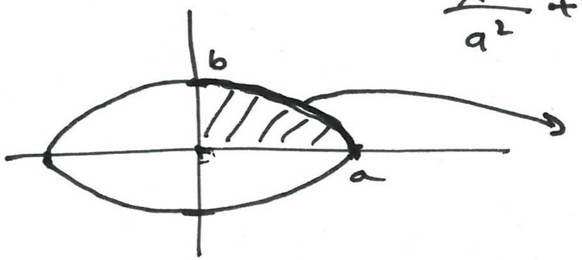
(E) Übung.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t}_{f} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'} \, dt$$

$$\underset{\text{P. Integration}}{=} \; \ldots$$

Bsp. Flächeninhalt einer Ellipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$



$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\text{Flächeninhalt} = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx \qquad \begin{array}{l} x = au \\ dx = a\,du \end{array}$$

$$= 4 \int_0^1 b \sqrt{1-u^2} \, a \, du = 4ab \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du}_{\pi/4}$$

Flächeninhalt einer Ellipse $= \pi ab$.

Kor Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a+c$, $b+c$ in I enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) \, dx = \int_a^b f(t+c) \, dt$$

2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, mit $c \neq 0$ so dass $[ac, bc] \subset I$.

Dann gilt

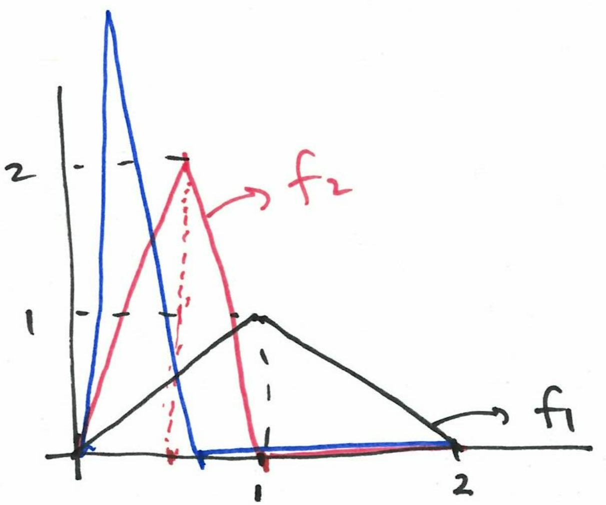
$$\int_a^b f(ct) \, dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) \, dx .$$

Beweis 1) $\phi(t) = t + c$ 2) $\phi(t) = ct$

§ 5.5 Integration konvergenter Reihen

~~Für~~ $n \geq 1$ sei

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Dann gilt 1) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$

2) $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1.$

$$\int_0^{1/n} n^2 x\,dx + \int_{1/n}^{2/n} 2n - n^2 dx + \int_{2/n}^{2} 0\,dx$$

Also folgt: $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1.$

$$\#$$

3) $\int_0^2 \left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^2 0\,dx = 0.$

~~$f_n dx$~~ $f_n \xrightarrow[\text{p.w.}]{} 0$ aber nicht gleichmässig

$$\sup_{x \in [0,2]} |f_n(x) - 0| = n \not\to 0.$$

Satz Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a\ b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

Kor Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge besch. und. integrierbare Funktionen so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergiert.

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

Kor Sei $f(x) := \sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho$ f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

~~We~~ Wir errinnern uns:

Satz 4.4.2. $f = \sum c_k x^k$ ... $[-r, r]$ diff.
Dann ist f auf ... und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

Bmk Man kann Potenzreihen in ihrer Konvergenzbereich gliedweise differenzieren und Integrieren.

Bsp. Die Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \qquad |x|<1$$

Dann haben wir

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$$

$$= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 \dots)\, dt$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \qquad |x|<1$$

Leibniz Satz: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

$$\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k} (-1)^{k+1}$$

$$= \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \dots}_{=:S}$$

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leq S \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Wir betrachten den Grenzwert als $x \to 1^-$

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leq \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k}(-1)^{k+1} \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow x \to 1^-$$

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \leq \ln(2) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Somit als $n \to \infty$ erhalten wir

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Bsp. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \cdots \qquad |x|<1$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$$

$$= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\,dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad |x|<1$$

Wie im vorherigen Bsp erhalten wir mit $x \to 1^-$

$$\arctan 1 = \boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots}$$

Man kann oft ein Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ nicht genau berechnen aber gut approximieren.

Bsp. $f(x) = e^{-x^2}$ $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \,?$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x}$$

Im Allg. $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\,dt$

$$= \int_0^{x} \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \cdots \right) dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots$$

$$= g(x)$$

Für $x \in (0,1)$.

$$\underbrace{a_1 - a_3}_{x - \frac{x^3}{3}} < S < \underbrace{a_1}_{x}$$

$\big\downarrow \; x \to 1$

$$\boxed{1 - \frac{1}{3} < \int_0^1 e^{-t^2}\,dt < 1.}$$