Satz Partielle Integration

Seien $a<b$ reelle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Bsp.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int (\ln x) \cdot 1\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

Satz (Substitution). Sei $a<b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ mit $\phi([a,b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

2 Lesarten:

(I) links → rechts: Liegt ein Integral explizit in der Form $\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt$ vor, so können wir die Subs. regel von links nach rechts anwenden.

Bsp. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int_2^{1+e} \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{1+e}{2}\right|$

$\downarrow$

$x = 1+e^t$

(II) rechts → links: Ein Integral liegt der Gestalt $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ mit gewissen Grenzen α, β vor das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneter Substitution $x = \phi(t)$ dieses Integral umzuformulieren so dass Subs.-regel anwendbar ist wobei $\phi(a) = \alpha$ und $\phi(b) = \beta$ gelten muss.

Bsp. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Integration konvergenter Reihen

Satz Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Satz Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho$ f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Bsp. a) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, $|x|<1$

b) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$, $|x|<1$

Kor a) $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

b) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$

Bsp. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot 2x \, dx$

$1-x^2 = u$

$-2x\,dx = du.$

$-\int_1^0 u^{1/2} du. = \int_0^1 u^{1/2} du$

Wir haben gesehen dass falls $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, und $(P^{(n)})$ eine Folge von Partitionen mit $\delta(P^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und sei $(\xi^{(n)})$ zwischen Punkten

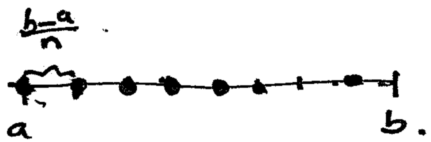
Dann

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \xi^n) = \int_a^b f(t)\,dt$$

---

z.B. $P^{(n)} = \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2(\frac{b-a}{n}), \dots a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\}$.

$\delta(P^n) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$\xi_k^{(n)} = \left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \qquad k = 0, \dots n-1$

Dann

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \cdot \frac{(b-a)}{n}.$$

Falls $[a,b] = [0,1]$, ist, dann

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \xi^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Bsp. Sei $f(x) = x^m$, $a=0$, $b=1$

Dann ist die R. Summe für $f(x)$ mit uniform Partition und ξ_k wie oben

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^m \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 x^m\,dx = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

d.h. $$\frac{1}{n^{m+1}}\left(0+1+2^m+\dots+(n-1)^m\right) \longrightarrow \frac{1}{m+1}$$

oder $$\boxed{1+2^m+\dots+(n-1)^m \approx \frac{n^{m+1}}{m+1}}$$

für ganz gross n.

Bsp. $$\underbrace{1+2+\dots+n-1}_{:=\frac{n(n-1)}{2}} \approx \frac{n^2}{2}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

$$\underbrace{1+2^2+\dots+(n-1)^2}_{:=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}} \approx \frac{n^3}{3}$$

$$\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \approx \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$$

⋮

Bsp. wie gross ist $n!$?

$n! = 1\cdot 2\cdot\ \dots\ \cdot n$ ein Produkt

Wir möchten eine Summe, deswegen betrachten wir

$$\frac{1}{n}\left(\log n!\right) = \left(\log 1 + \log 2 + \dots + \log n\right)\frac{1}{n}.$$

wie $f(k)$, nicht $f(k/n)$.

$1 = \frac{1}{n} \cdot n \;,\quad 2 = \frac{2}{n} \cdot n \;, \;\ldots\ldots$

$\log 1 = \log \frac{1}{n} + \log n$

$\log 2 = \log \frac{2}{n} + \log n$

$\vdots$

$$\frac{1}{n} \log n! = \frac{1}{n} \left(\log \frac{1}{n} + \log n + \log \frac{2}{n} + \log n + \cdots + \log \frac{n}{n} + \log n \right).$$

$$= \frac{1}{n} \left[n \log n + \underbrace{\left(\log \frac{1}{n} + \log \frac{2}{n} + \cdots + \log \frac{n}{n} \right)} \right]$$

Riem. Summe for $\log x$ auf $[0,1]$

$$\frac{1}{n} \log n! = \log n + S(\ln x, P^n, \xi^n).$$

$$\frac{1}{n} \log n! - \log n = S(\ln x, P^{(n)}, \xi^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{0^-}^{1} \log x$$

$\cancel{\int \log x \, dx}$

$$\int_{0^-}^{1} \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_{0^-}^{1} \to -1.$$

$$\frac{1}{n} \log n! - \log n \xrightarrow[n\to\infty.]{} -1$$

$$\log (n!)^{1/n} - \log n \to -1$$

$$\exp(\qquad) \to e^{-1}$$

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} \to e^{-1}$$

$$\boxed{n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$ for gross n.

Satz 5.7.1.

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei $|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}\frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

Stirling's estimate.

Clicker Frage.

Welche der Folgenden Funktionen sind für $x > 0$ mon. wachsend

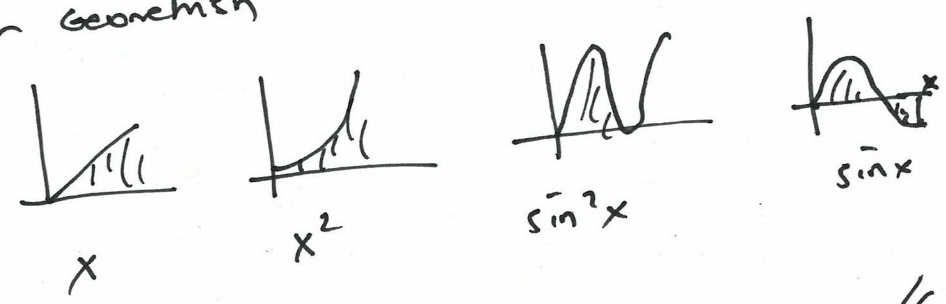
$x \xmapsto{F} \int_0^x t\,dt$ ✓ $\quad F'(x) = x > 0$

$x \xmapsto{F} \int_0^x t^2\,dt$ ✓ $\quad F'(x) = x^2 > 0$

$x \xmapsto{F} \int_0^x \sin t\,dt$ ✗ . $\quad F'(x) = \sin x$ ist nicht immer positiv.

$x \xmapsto{F} \int_0^x \sin^2 t\,dt$ ✓ $\quad F'(x) = \sin^2 x > 0$

oder geometrisch



Uneigentliche Integral.

Unsere defn des R. Integrals setzt voraus $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist und $[a,b]$ ein kompaktes Intervall ist.

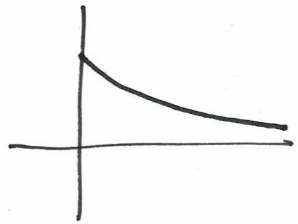
Wir möchten auch Funktionen auf unbeschränkten Intervallen z.B $[1, \infty[$ $]-\infty, \infty[$ integrieren.

Oder auch unbeschränkte Funktionen integrieren.

z.B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} = ?$ oder $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = ?$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = ?$ oder

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} = ?$



$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ hat keinen sinn da $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in 0 nicht definiert ist

Aber $\forall \varepsilon > 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[\varepsilon, 1]$ integrierbar. Der wert des Integrals

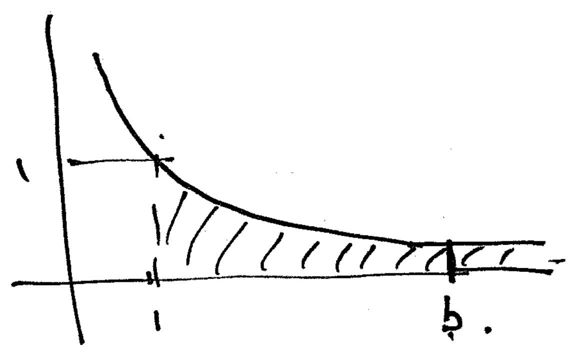
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_\varepsilon^1 = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

Also existiert

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2 - 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

<u>Oder</u>.

Wir können eine Funktion auf ein unendliche Intervall betrachten: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.



Um eine solche Integral zu definieren können wir

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{für } b \in \mathbb{R} \text{ betrachten}$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1.$$

Wir können sagen dass

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ konvergiert gegen } 1.$$

<u>Defn.</u> Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$.

Falls $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert

mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und

sagen dass f auf $[a, \infty[$

integrierbar ist. Falls ~~der~~ der

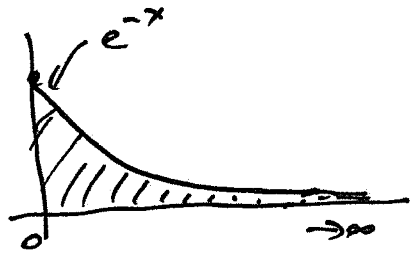
Grenzwert existiert, sagen wir

das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert

sonst divergiert.

Bsp. 1) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1$



2) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\cancel{s}}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^{\cancel{s}}}\,dx$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \ln|x| \Big|_1^b & s=1 \\ \dfrac{x^{-s+1}}{1-s} \Big|_1^b & s\neq 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \ln|b| & s=1 \\ \dfrac{b^{1-s}}{1-s} - \dfrac{1}{1-s} & s\neq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \infty & s=1 \\ \xrightarrow{1-s>0} \infty \quad \xrightarrow{1-s<0} \dfrac{1}{s-1} & s\neq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \longrightarrow \text{divergent falls } \cancel{s} \leq 1$$

konvergent falls $s > 1$.

3) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = ?$

$$\int_0^b x e^{-x^2}\,dx \underset{\substack{u = x^2 \\ du = 2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\Big|_0^{b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right) \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}.}$$

Analog kann man $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$

als $\displaystyle\lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx$ definieren.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = ?$$

Lemma (Majoranten Kriterium)

Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$

i) Falls $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar.

2) Falls $0 \leq g(x) < f(x)$

und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert,

so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Bsp. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx.$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx \underset{x=-u}{=} \int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{\text{normales Integral}} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx}$$

Für $x > 1$, $\underline{e^{-x^2} < e^{-x}}$

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx \to \frac{1}{e} < \infty$$

Somit, mittels Maj. kriter.,

konvergiert auch $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$

und auch $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

und auch $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx.$

Bsp. Sei $\alpha > 0$. Wir untersuchen wann $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$ konvergiert.

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx + \int_1^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$$

Nun ist, $\forall x \geq 1$

$$\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

woraus folgt

$$\underbrace{\int_1^b \frac{1}{2x^\alpha}\,dx}_{\text{Als } b\to\infty \text{, divergiert für } \alpha\leq 1} \leq \int_1^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx \leq \underbrace{\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{Als } b\to\infty \text{ konv falls } \alpha>1}$$

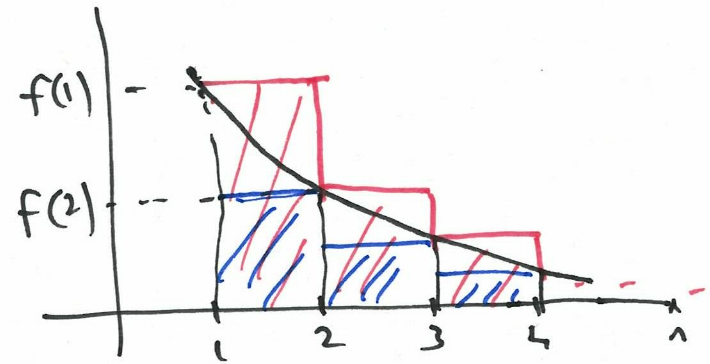
$\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$ konv falls $\alpha > 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$ div. falls $\alpha \leq 1$.

<u>Satz.</u> Sei $f : [1, \infty[\to [0,\infty[$ mon. fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert und in diesem Fall gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1)$$

<u>Beweis</u>



$$f(1)+f(2)+\dots f(n-1) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq f(2)+f(3)+\dots+f(n)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)\right) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) \quad (*).$$

Aus $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx$

folgt dass $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq \infty$ ist

dann $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.

Aus $\int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$

folgt dass: aus $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.

folgt $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$.

d.h. $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konv $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konv.

Aus (*) folgt dass

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1)$$

$\boxtimes$

/15