Das Uneigentliche Integral

Defn Sei $f: [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$.

Falls $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und sagen dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist und das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Bsp. $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konvergiert

$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = \frac{1}{e}$$

Bsp.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \text{divergent falls } s \leq 1 \\ \text{konvergiert falls } s > 1 \end{cases}$$

Falls $s > 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1}$

Lemma Majoranten Kriterium

Sei $f: [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$

1) Falls $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar

2) Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Bsp. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^s}\,dx$ konv. falls $s > 1$, div. falls $s \leq 1$

$\left(\frac{1}{2x^s} \leq \frac{1}{1+x^s} \leq \frac{1}{x^s}, \text{ falls } x \geq 1 \right)$

//

Satz Sei $f: [1, \infty[\to [0, \infty[$ monotone fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert und in diesem Fall gilt

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x)\,dx \le f(1)$$

(Integral test for Reihen).

Bsp. 1 $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für alle $s > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^s}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \log|b| & s=1 \\ \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^b & s\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{divergent} & , s\le 1 \\ \text{konv. gegen } \frac{1}{s-1} & , s>1 \end{cases}$$

Falls $s > 1$,

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx}_{\frac{1}{s-1}} \le f(1) = 1$$

$$0 \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}}_{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \le 1$$

$$\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le \frac{s}{s-1}, \quad \forall s>1.$$

T.

Bsp 2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s}$.

$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^s}$ mon. fallend.

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_2^b \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx}.$$

$$\int_2^b \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx.$$

$u = \log x$
$du = \frac{1}{x}\,dx.$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\log 2}^{\log b.} \frac{du}{u^s} \to \begin{cases} \text{konv} & \text{falls } s > 1 \\ \text{div.} & \text{falls } s \leq 1 \end{cases}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s}$ konv $\Longleftrightarrow$ $s > 1$.

Defn: Sei $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $a < b$.

Falls $\lim_{a\to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ und sagen, dass f auf $]-\infty, b]$ integ- ist und das Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ konvergiert.

Defn

Sei f eine Funktion auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar. $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ ist **integrierbar** falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{existiert.}$$

In diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

Analog: falls f auf jedem Intervall $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, beschränkt und integrierbar ist, ist $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ **integrierbar** falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{existiert.}$$

Bsp. $\int_0^1 \frac{1}{x^s}$, $]\underline{0}, 1]$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 & s = 1 \\ \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_\varepsilon^1 & s \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\ln|\varepsilon| & s = 1 \\ \underbrace{\frac{1}{1-s} - \frac{\varepsilon^{1-s}}{1-s}}_{\frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s}} & s \neq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \text{divergent} & s \geq 1 \\ \frac{1}{1-s} & s < 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \text{div. falls } s \geq 1 \\ \text{konv } \frac{1}{1-s} \text{ falls } s < 1 \end{cases}}$$

Bmk. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ist definiert als.

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx .$$

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx .$$

Im Allg. Sei f eine Fnk. auf einem off. Interval $]a,b[$, deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[\tilde{a},\tilde{b}]$ integrierbar ist. Dann ist das uneigentliche Integral von f von a bis b definiert als.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\tilde{a} \searrow a} \lim_{\tilde{b} \nearrow b} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)\,dx$$

Falls diese Grenzwert existieren, heisst f über $]a,b[$ integrierbar. (a, b können $\pm\infty$ sein).

Bmk. Vorsicht! Die beiden Grenzwerte müssen im Allg. unabhängig voneinander genommen werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} x\,dx \quad \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) \text{ divergiert.}$$

$$\cancel{\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} x\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{x^2}{2}\Big|_{-b}^{b}\right] = \lim_{b \to \infty} 0 = 0.}$$

Bmk. Alle Grundeigenschaften und Integrationstechniken für das bestimmte Integral gelten ebenso für das uneigentliche Integral.

Wichtige Bsp.

Die Gamma Funktion (Euler)

Defn. Die Gamma Funktion ist definiert als

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx.$$

Bmk. $\Gamma(s)$ "interpoliert" die Funktion $n \longmapsto (n-1)!$

d.h. $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx.$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{g'} \underbrace{x^n}_{f}\, dx.$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x} x^n \Big|_0^b + n\int_0^b e^{-x} x^{n-1}\, dx \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} b^n - 0\right) + n \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} x^{n-1}\, dx.$$

0

$$= n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = n\Gamma(n).$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots$$
$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \ldots$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots 1 \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}$$

$f = x^n$	$g' = e^{-x}$
$f' = nx^{n-1}$	$g = -e^{-x}$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad , \text{ für } s \in \mathbb{R}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx}_{A} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx}_{B}$$

Für $s<1$, $x^{s-1} = \frac{1}{x^{1-s}}$ ist nicht definiert in $x=0$

A . $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx$

$\forall x \in]0,1]$, $\underline{e^{-x} x^{s-1} \leq x^{s-1}}$ (*).

(**) . $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{divergent} & \text{falls } \alpha \geq 1 \\ \text{konv, } \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases}$

Aus (*), und (**), folgt das.

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}\,dx}_{\text{konv. falls } 1-s<1}.$$

d.h.

$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx$ konv. falls $s>0$

Falls $x \in]0,1]$ und $s \leq 0$.

Dann gilt $e^{-x} x^{s-1} \geq e^{-1} x^{s-1}$

$= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x^{1-s}}$.

Somit $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx \geq \frac{1}{e} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}\,dx}_{\text{div. falls } s \leq 0.}$

Somit

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad \text{konv} \iff s>0.$$

B

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig, $x>1$

Dann gibt es M s.d.

$$x^{s-1} \le M e^{x/2} \quad \forall x \ge 1$$

(Da $\frac{x^{s-1}}{e^{x/2}} = e^{-x/2} x^{s-1}$ ist auf $[1,\infty)$ stetig und gegen 0 konvergiert als $x \to \infty$)

Woraus folgt dass

$$e^{-x} x^{s-1} \le M e^{-x/2}.$$

Da $\int_1^\infty e^{-x/2}\, dx$ konvergiert,

konv. auch $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$ für alle s.

Es folgt dass $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$

konv. für alle $s>0$.

Satz (Bohr–Mollerup.).

1) Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen

a) $\Gamma(1) = 1$

b) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \quad \forall s>0$,

c) $\Gamma(s)$ ist logarithmisch konvex.

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^{\lambda}\,\Gamma(y)^{1-\lambda}$$

$\forall x,y>0$, und $0 \leq \lambda \leq 1$.

2) Die Γ-funktion ist die einzige Funktion : $]0,\infty[\to]0,\infty[$, die a), b), c) erfüllt.

Darüber hinaus gilt

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \forall x>0.$$

Bmk- a) ist einfach

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

b) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \quad s>0$ beweis man (wie wir gemacht haben für $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$) mittels Partielle Integration.

Bmk- "Stirlings estimate" für $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} + \left(1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right)$$

Stirling's estimate for $\Gamma(s)$

$$\Gamma(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^{s}\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right).$$

($f = O(g)$ falls $|f(s)| \leq M g(s)$)

Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Beweis Wir benutzen die Substitution. Zu erst:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{\substack{v=t^2 \\ dv = 2t\,dt \\ dt = \frac{dv}{2\sqrt{v}}}}{=} \int_{0}^{\infty} e^{-v}\frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{1}{2}-1}\,dv = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Im Analysis II, werden wir zeigen dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}.$$

Rationale Funktion:

$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

wobei $P(x)$, $Q(x)$ Polynom.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Um Rationale Funktion zu integrieren benutzen wir die "Partialbruchzerlegung"

Die Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von $R(x)$ als Summe von "elementaren" rationale Funktionen.

z.B. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

$$= \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 = a(x+1) + b(x-1) = (a+b)x + a-b$$

$\Rightarrow a+b=0$, $a-b=1 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a=-b$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Satz (Partialbruchzerlegung)

Sei $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$ eine Rationale Funktion und

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0.$$

$$= \prod_{k=1}^{N} (x-x_k)^{n_k} \prod_{j=1}^{M} \left(x-(\alpha_j+i\beta_j)\right)^{m_j} \left(x-(\alpha_j-i\beta_j)\right)^{m_j}$$

$$= \prod_{k=1}^{N} (x-x_k)^{n_k} \prod_{j=1}^{M} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}$$

d.h. $Q(x)$ besitzt die reelle Nullstellen x_k mit Vielfachheit n_k und komplexen Nullstellen $z_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ mit Vielfachheit m_j

Dann gilt

$$R(x) = P_1(x) + \sum_{k=1}^{N} R_k(x) + \sum_{j=1}^{M} S_j(x)$$

wobei $P_1(x)$ = Polynom.

$$R_k(x) = \frac{a_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{a_{k2}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{a_{kn_k}}{(x-x_k)^{n_k}}$$

$$S_j(x) = \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{\left((x-\alpha_j)^2 + (\beta_j)^2\right)} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{\left((x-\alpha_j)^2 + (\beta_j)^2\right)^{m_j}}$$

<u>Bmk.</u> 1) Das Polynom $P_1(x)$ tritt nur auf falls $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$. In diesem Fall berechnet man $P_1(x)$ mit Polynom Division und es gilt

$$P(x) = P_1(x)\,Q(x) + P_2(x)$$

$$\operatorname{grad} P_2 < \operatorname{grad} Q.$$

2) Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen,

a_{kl}, $k = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots n_k$.

b_{jl}, d_{jl}, $l = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots M$.

3) Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die Rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Bsp. $R(x) = \dfrac{1-x}{x^2(x^2+1)}$

$$= \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{bx+d}{x^2+1}$$

Ausmultiplizieren

$$1 - x = a_1(x)(x^2+1) + a_2(x^2+1) + (bx+d)x^2$$

$$= (a_1+b)x^3 + (a_2+d)x^2 + a_1 x + a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b = 0 \\ a_2 + d = 0 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \\ b = 1 \\ d = -1, \end{array}$$

$$R(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

$$\int R(x)\,dx = \underbrace{\int \frac{-1}{x}\,dx}_{-\ln|x|} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2}\,dx}_{\frac{-1}{x}} + \underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \arctan x + C.$$