Defn Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge

1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere (bzw. untere) Schranke von A falls

$$\forall a \in A : \quad a \leq c \qquad (c \leq a)$$

2) Die Menge A heisst nach oben (unten) beschränkt falls es eine obere (untere) Schranke von A gibt.

3) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Maximum (Minimum) von A falls $m \in A$ und m eine obere (untere) Schranke von A ist.

Satz Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Sei A nach oben beschränkt. Dann $\exists$ ein kleinste obere Schranke von A

d.h es gibt $c \in \mathbb{R}$ so dass

(i) $\forall a \in A : \quad a \leq c$ (c ist eine obere Schranke)

(ii) Falls $a \leq x \ \forall a \in A$, ist $c \leq x$

(c ist kleiner als jede andere obere Schranke)

$c := \sup A$, Supremum von A

$S = \operatorname{Sup} A \iff$

$$\underbrace{(\forall a \in A : a \leq S)}_{\text{S ist eine obere Schranke.}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : a > S - \varepsilon)}_{\text{S ist die kleinste}}$$

S ist eine obere Schranke.

S ist die kleinste d.h: für jede $\varepsilon > 0$ $S - \varepsilon$ ist kein obere Schranke.

$I = \operatorname{Inf} A \iff$

$$\underbrace{(\forall a \in A : a \geq I)}_{\text{I ist eine untere Schranke}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : a < I + \varepsilon)}_{\text{I ist die grösste untere Schranke.}}$$

I ist eine untere Schranke

I ist die grösste untere Schranke.

Konvention: Falls A nicht nach oben (resp nicht nach unten) beschränkt ist, definieren wir

$$\operatorname{Sup} A = +\infty \quad (\text{resp } \operatorname{Inf} A = -\infty)$$

Eigenschaften von Sup und Inf

1) Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Falls B nach oben beschränkt ist, folgt

$$\sup A \leq \sup B$$

b) B ist nach unten beschränkt $\Rightarrow$ $\inf B \leq \inf A$

2) Falls $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$, dann gilt

$$\sup A \leq \inf B.$$

3) $$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

$$\sup(cA) = \begin{cases} c \sup A & \text{for } c > 0 \\ c \inf A & \text{for } c < 0. \end{cases}$$

$$\sup\{A \cup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

§1.2 Euklidische Raum

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $c \cdot x := (cx_1, \dots, cx_n)$

$c \in \mathbb{R}$.

$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\qquad$ Das Skalarprodukt

Cauchy-Schwarz $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. $\qquad$ Die Norm des Vektors x

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\langle \alpha_1 x + \alpha_2 y, z \rangle = \alpha_1 \langle x, z \rangle + \alpha_2 \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$

  ("=" $\Leftrightarrow x = 0$)

- $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit ~~genau~~ genau dann wenn $x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Clicker Frage

$S \neq \emptyset$, nach unten beschränkt

$\beta = \operatorname{Inf} S$.

1) $\exists x \in S$ so dass $x < \beta + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Falsch!! Da $x < \beta + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$
$\Rightarrow x \leq \beta$.

Da $\beta = \operatorname{Inf} S$, $x \in S$, $x = \beta$.
$\Rightarrow \beta \in S$. Aber das ist nicht immer so!

z.B $S =]0, 1[\quad \beta = 0 \notin S$.

$(\exists x \in S : \forall \varepsilon > 0 \quad x < \beta + \varepsilon) \not\Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x < \beta + \varepsilon)$

2) $(\beta, \beta+1) \cap S \neq \emptyset$ Falsch.

$S = \{0\} \cup]2, 3[\qquad \operatorname{Inf} S = 0 = \beta$

$]\beta, \beta+1[=]0, 1[\qquad]0,1[\cap S = \emptyset$.

Defn Das <u>Kreuzprodukt</u> zwischen 2 Vektoren, $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

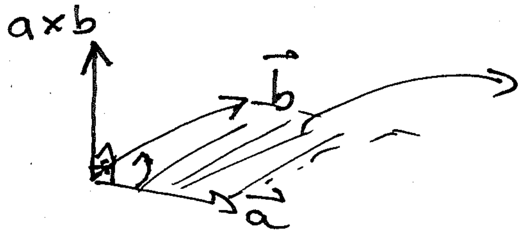
$$(a, b) \longmapsto a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

$a = (a_1, a_2, a_3)$

$b = (b_1, b_2, b_3)$

$$= \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

a, b und $a \times b$ bilden ein Rechssystem.



$\|a \times b\|$ = Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelograms.

Eigenschaften des Kreuzprodukts

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$

1) $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$
2) $a\times b = -\, b\times a$ Antisymmetrisch.
3) $a\times(b\times c) + c\times(a\times b) + b\times(c\times a) = 0$.

Jacobi Identität.

§1.3. Komplexe Zahlen.

Um komplexe Zahlen zu definieren, definieren wir auf $\mathbb{R}^2$ folgende Multiplikation.

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$.

$\cdot\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Wir haben auch die Addition von 2 Vektoren

$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$.

Dann gilt insbesondere.

$(0,0)\cdot(x,y) = (0,0)$ $\qquad (0,0)+(x,y) = (x,y)$.

$(1,0)\cdot(x,y) = (x,y)$

Falls $(x,y) \neq (0,0)$,

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = (1,0).$$

Dann ist es "einfach" zu verifizieren dass alle Eigenschaften A i–iv, M i–iv. gelten d.h

Satz 1.3.1 $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Addition der Vektoren + und obig definierter Multiplikation $\cdot$, ist ein Körper mit Einselelement $\mathbb{1} := (1,0)$ und Nullelement $0 := (0,0)$,

---

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ wird ~~das~~ Körper der Komplexe Zahlen genannt und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Nun, betrachten wir die Abbildung.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x,0) \\ 1 &\longmapsto (1,0) \end{aligned}$$

Mittels dieser Abbildung können wir $\mathbb{R}$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{C}$ identifizieren.

Nun sei $i := (0,1)$. $\mathbb{1} := (1,0)$

Dann besitzt jedes Element $z := (x,y) \in \mathbb{C}$

eine eindeutige Darstellung:

$$z := x \cdot 1 + y \cdot i$$
$$(x,0) \cdot (1,0) + (y,0) \cdot (0,1)$$
$$= x + yi$$

Bemerke: $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$
$= -(1,0) = -1.$

$i^2 = -1.$ „$i = \sqrt{-1}$"

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

Diese Darstellung ist konsistent mit der Defn des Produkts!.

Defn $z = x + yi$

$y = \operatorname{Im} z$ ist der Imaginärteil der z

$x = \operatorname{Re} z$ ist der Realteil von z

Für $z = x + yi$ definieren wir die konjugierte Zahl $\bar{z} := x - yi$

Satz 1.3.2 i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(iii) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$.

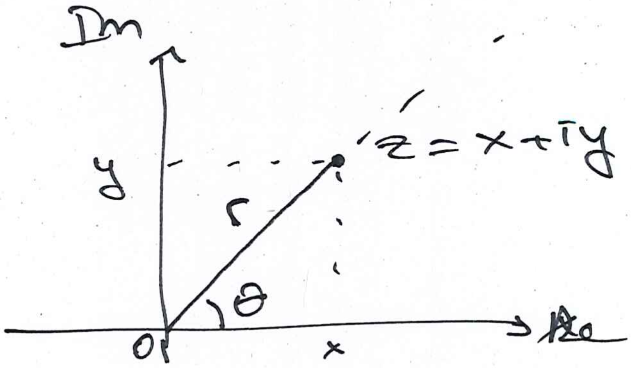
Insbesondere folgt aus (iii), dass für $z \neq 0$.

das Multiplikative Inverse gegeben durch

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}.$$

Polarform.

Man kann komplexe Zahlen auch in Polarform darstellen.



Wir stellen $z = x + iy$ als ein punkt in der Ebene dar

Sei θ den Winkel zwischen die Halbgeraden $[0, \infty[$ und $\overrightarrow{0z}$ Dann ist

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

wobei man θ mod $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ nehmen kann.

Bemerkung: !!! Die in Polarform benützen Funktionen $\sin\theta$, $\cos\theta$ sind nicht wirklich definiert worden. Dies werden wir in Kapitel 3 nachholen.

$$z = x + yi = r\cos\theta + i r \sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$r = \|z\|$ der Absolutbetrag.
θ das Argument von z.

Notation: $re^{i\theta} := r\cos\theta + ir\sin\theta$.

Für $z = re^{i\theta}$ folgt durch Induktion

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{ni\theta}.$$

Kor Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$, $z_1, \dots z_n$ wobei

$$z_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n} \qquad 1 \leq j \leq n.$$

$z^4 = 1.$

$z^8 = 1.$

Satz (Fundamental Satz der Algebra)

Sei $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Dann gibt es $z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Kapitel 2.

Folgen und Reihen

Sequences Series.

Sei M eine Menge (z.B $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, emoji's).

Eine Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow M$$
$$n \longmapsto a(n) = a_n$$

Wir bezeichnen das Bild mit a_n statt $a(n)$.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet.

Bsp. 1) ☺, ☺, ☺ . . . .

2) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ $\quad a_n = 2^{n-1}$

$(2^{n-1})_{n\geq 1}$

2) $1, -1, 1, -1, \ldots$

Die Folge $a_n = (-1)^{n+1}$

3) Man kann auch Folgen von Vektoren betrachten

$(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \ldots$

$M = \mathbb{R}^3$ $a_n = (n,n,n)$

$((n,n,n))_{n \geq 1}$.

4) Funktionen Folgen.

$1, x, x^2, \ldots$

$a_n(x) = x^{n-1}$ $(x^{n-1})_{n \geq 1}$.

Bmk. Gelegentlich wird eine Folge auch mal an einer anderen Stelle als $n=1$ beginnen, wie etwa $\left(\frac{n}{n-2}\right)_{n \geq 3}$,

$(3, \frac{4}{1}, \frac{5}{3}, \ldots$

Input : eine Zahl $n \in \mathbb{N}$

Output = $\begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ kein Primzahl ist} \\ 1 & \text{" } n \text{ ein Primzahl ist.} \end{cases}$

Man definiert a_n = Zeitaufwand von Alg. A
b_n = " " von Alg B.

- Folgen sind oft rekursiv (Induktiv) definiert

Seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ gegeben
und dann definiert man $a_{n+1} := \phi(n, a_1, \ldots a_n)$.

z.B. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

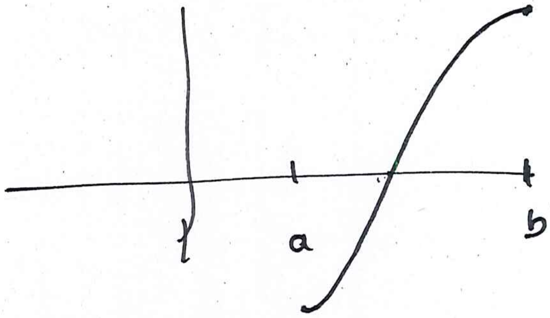
Fibonacci Folge.

- Folgen tauchen immer dann auf, wenn die Lösung eines Problems durch ein Iterationsverfahren berechnet wird.
" man benutzt eine Approximation a_n um eine bessere Approximation a_{n+1} zu finden.

Bsp. Bisektion.

Gesucht: Nullstelle von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Voraussetzung $f(a) f(b) < 0$



Iteration: Definieren zwei Folgen.

$(u_n)_{n \geq 0}$ $(v_n)_{n \geq 0}$ rekursiv mit

den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und

der folgenden Iterationsvorschrift.

For $n = 1, 2 \dots$

$x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2$

If $f(x) = 0$ then return.

If $f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0$ then

$u_n := x$ $\quad v_n := v_{n-1}$

else $u_n := u_{n-1}$ $\quad v_n := x$.

Output x mit $f(x) = 0$. , Nullstelle von f in $[a,b]$

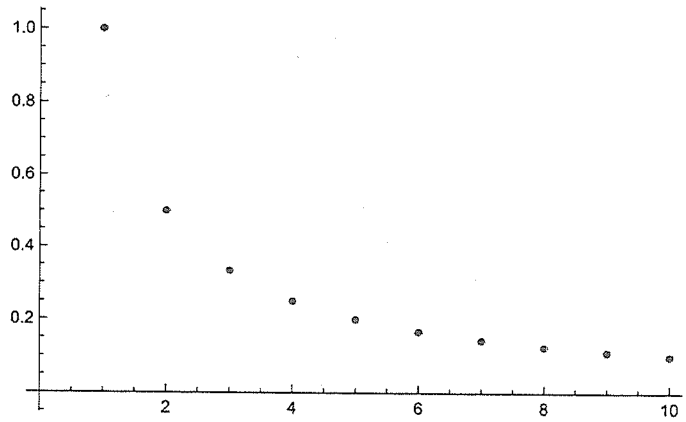
<u>Bsp.</u> $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 2$

$a = 1$, $b = 2$

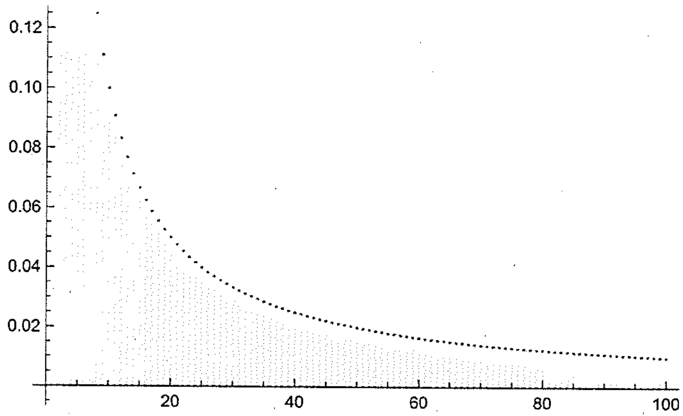
n	u_n	v_n
0	1.00..	2.00 - - .
1	1.00 . .	1.50 - - .
2	1.25	1.50 - - .
⋮	⋮	⋮
10	1.414062-	1.415039 - - .
⋮		
30	1.4141356	1.41421356.

In[2]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 10}]`

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Out[2]=


In[3]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 100}]`

Out[3]=


In[6]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 10 000}]`

Out[6]=