Sei M eine Menge.

Eine Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow M$$
$$n \longmapsto a_n .$$

Wir bezeichnen das Bild mit a_n.

Eine Folge wird meistens mit

$(a_n)_{n \geq 1}$ bezeichnet

Bsp: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

$a_n = \frac{1}{n}$

2) $(-1)^n = a_n$

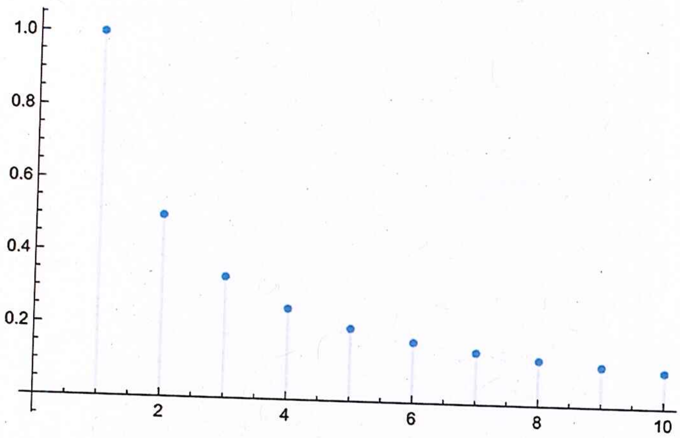
$-1, 1, -1, \ldots$

3) Rekursiv definierte Folge

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

In[2]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 10}]`

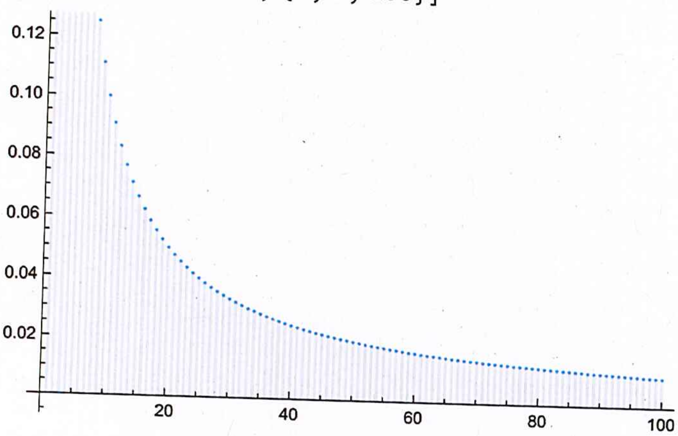
Out[2]=



$a_n = \frac{1}{n}$

In[3]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 100}]`

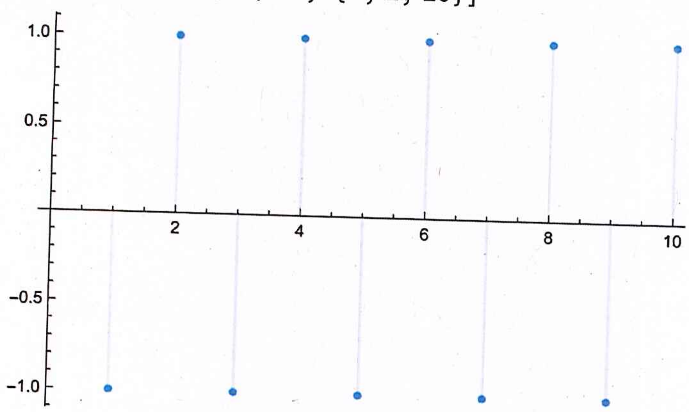
Out[3]=



$a_n = \frac{1}{n}$.

In[16]:= `DiscretePlot[(-1) ^n, {n, 1, 10}]`

Out[16]=



$a_n = (-1)^n$.

§2.1 Grenzwert einer Folge.

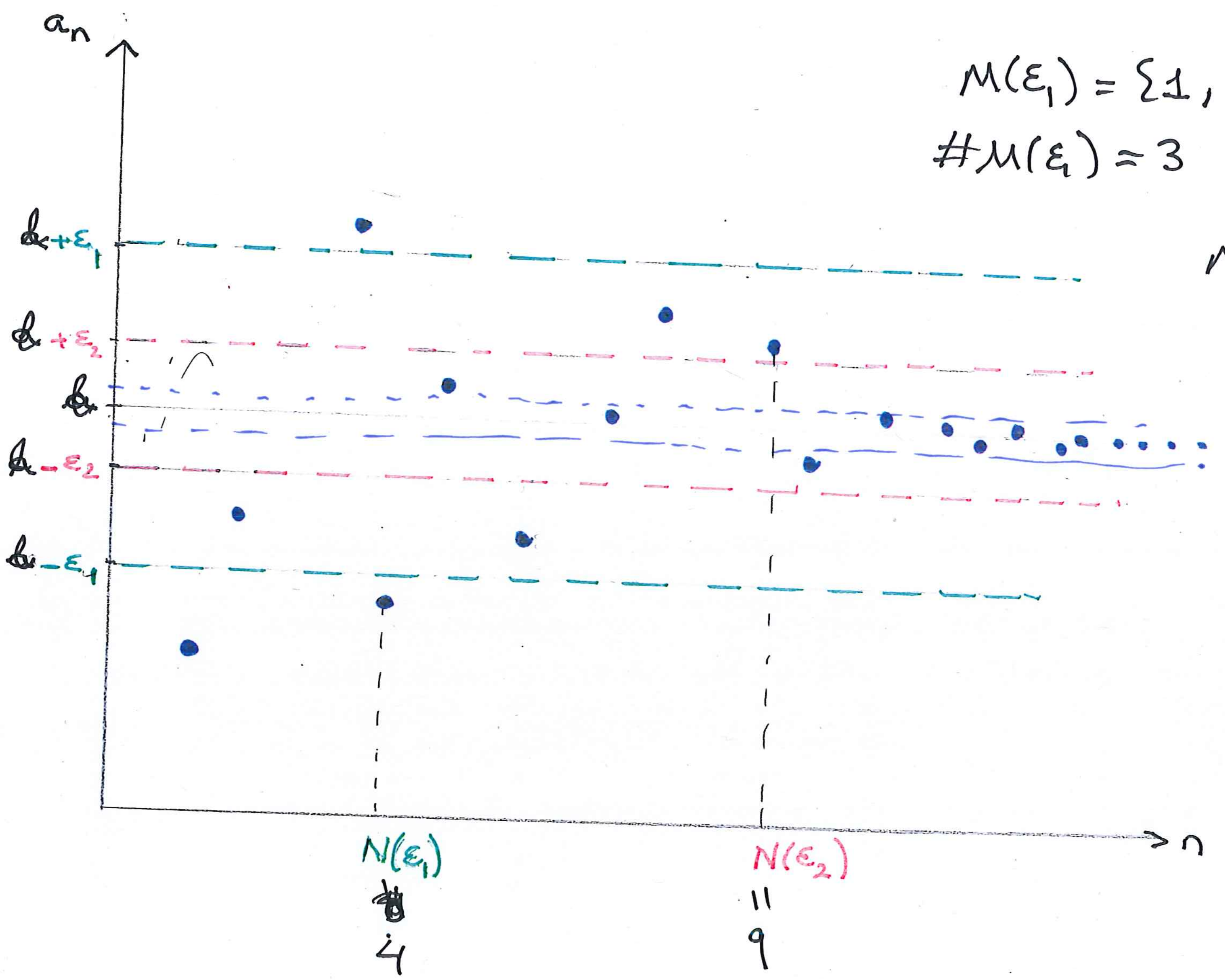
Defn. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst **konvergent** falls es $\ell \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

$$\mathcal{M}(\varepsilon) := \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\}.$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \ell| \geq \varepsilon \}.$$

endlich ist.

Bmk: Falls eine solche Zahl ℓ gibt, ist sie eindeutig bestimmt! Sie wird mit $\lim_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet und nennt sich **Grenzwert** oder **Limes** der Folge

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$



$M(\varepsilon_1) = \{1, 3, 4\}$,

$\# M(\varepsilon_1) = 3$

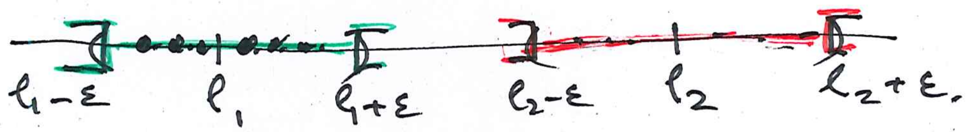
$M(\varepsilon_2) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\# M(\varepsilon_2) = 7$

Lemma 2.1.3 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $\ell \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

(*) $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $M(\varepsilon)$ endlich.

Beweis Wir nehmen an, dass es $\ell_1 < \ell_2$ gibt so dass beide ℓ_1, ℓ_2 die Eigenschaft (*) erfüllen.



$\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}$. so dass.

$$]\ell_1-\varepsilon, \ell_1+\varepsilon[\cap]\ell_2-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon[= \emptyset.$$

Nach Voraussetzung sind

$$E_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin]\ell_1-\varepsilon, \ell_1+\varepsilon[\}$$
$$E_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin]\ell_2-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon[\}.$$

endlich.

Insbesondere ist $\mathbb{N} \setminus E_2$ unendlich.

Andererseits $\mathbb{N} \setminus E_2 \subset E_1$ ↯ Widerspruch

Anders gesagt: Eine Folge (a_n) hat einen Grenzwert ℓ, wenn sich ausserhalb einer beliebig grossen Umgebung von ℓ $(\,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\,)$ nur endlich viele Glieder der Folge befinden. (

~~For ex:~~ (If ℓ is the limit of a_n, then for every ε- neighbourhood of ℓ, we have only finitely many members of a_n outside this nbhd.)

~~Die~~ historisch erste Definition von Konvergenz ist die Folgende.

Defn. Eine Folge (a_n) konvergiert mit Grenzwert (oder limes) ℓ falls für jedes $\varepsilon > 0$, eine index $N_\varepsilon = N \geq 1$ $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass $|a_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall n \geq N_\varepsilon$.

Lemma 2.1.6 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.
Folgende Aussagen sind äquivalent.

(1) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\ell = \lim a_n$

d.h $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\}$ ist endlich.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ so dass $\forall n > N$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) Klar

$$(2) \Rightarrow \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \ell| > \varepsilon\} \subset \{1, 2, \ldots N\}}_{=(1)}.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann ist $\{n \mid a_n \notin]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\}$ endlich

und somit gibt es $N \geq 1$ so dass

$\{n \mid a_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\} \subseteq \{1, \ldots N\}$.

Dann folgt $\underbrace{\forall n > N,\ |a_n - \ell| < \varepsilon}_{(2)}$.

Bsp: 1) Die konstante Folge

$a, a, \ldots \qquad a_n = a.$

$\lim a_n = a$ da ist $|a_n - a| = 0$

für jedes n

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - a| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

2) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_n$ konvergiert gegen 0.

$\lim a_n = 0$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Dann existiert nach Archimedische Prinzip

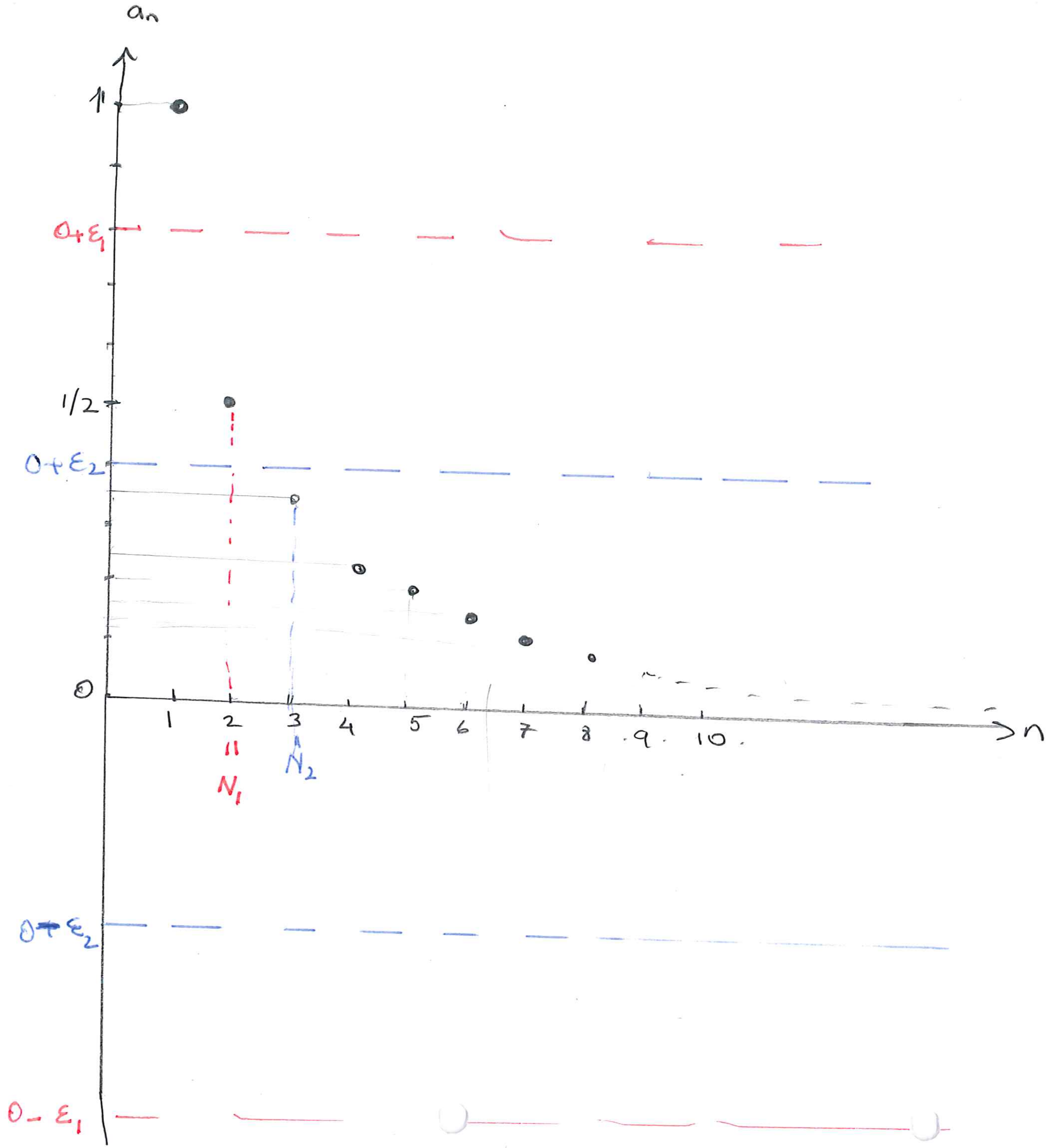
ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$.

Daher ist für jedes $n > N_\varepsilon$, haben

wir $|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

∎

(8)



$a_n = \frac{1}{n}.$

$\varepsilon_1 = 0.8$

$\varepsilon_2 = 0.4$

For $n \geq 2 = N(\varepsilon_1)$

$|a_n - 0| < 0.8 = \varepsilon_1$

For $n \geq 3 = N(\varepsilon_2)$

$|a_n - a| \leq 0.4 = \varepsilon_2$

Bsp. $a_n = \frac{n}{n+1} \quad n \geq 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Beweis
z.z. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ ~~mit~~ so dass

$\forall n \geq N, \quad |a_n - 1| < \varepsilon$.

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

Sei $\varepsilon > 0$, nach Archim. gibt es

$N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$

Dann folgt für alle $n > N$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$

d.h. $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Bmk. Nicht alle Folgen sind konvergent

Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ keinen Limes besitzt, heisst sie **divergent**.

Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge.

Bsp. (1) $a_n = (-1)^n$.

Für jedes $\ell \in \mathbb{R}$, und $n \geq 1$ gilt.

$$|a_n - \ell| + |a_{n+1} - \ell| \geq |(a_n - \ell) - (a_{n+1} - \ell)|$$
$$= |a_n - a_{n+1}| = 2$$

d.h. kein $\ell \in \mathbb{R}$ kann Grenzwert von (a_n) sein

Falls existiert für gegebenen $\varepsilon > 0$ (sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$), $\exists$ N_ε so dass

$$|a_n - \ell| < \frac{1}{2} \qquad \forall n > N_\varepsilon.$$

Aber dann $|a_n - \ell| + |a_{n+1} - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ↯.

Widerspruch ↯.

2) ~~Bsp~~ $a_n = n$

$\lim a_n$ nicht existiert.

Übung.

Bmk. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim a_n = \ell$.

Dann für jede $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ s.d.

$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad , \forall n > N_\varepsilon$.

Insbesondere für $\varepsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - \ell| < 1 \quad \forall n \geq N_1$

d.h. $a_n \in]\ell - 1, \ell + 1[\quad \forall n > N_1$

d.h. $\{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \ldots\} \subset \underbrace{]\ell-1, \ell+1[}_{\text{beschränkte Interval}}$

aber die Endliche Menge $\{a_1, \ldots a_{N_1-1}\}$ ist offensichtlich auch beschränkt.

$\{a_1, a_2, \ldots\}$ ist eine beschränkte Teil Menge von $\mathbb{R}$.

konvergent $\Longrightarrow$ beschränkt

aber

beschränkt $\not\Longrightarrow$ konvergent.

z.B. $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt

aber nicht konvergent.

Satz 2.1.8. Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $\lim a_n =: a$

$b := \lim b_n$. Dann ist

1) $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und

$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2) $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim a_n b_n = ab$

3) Falls $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ und $b \neq 0$

dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent und

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

4) Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit

$a_n \leq b_n$ $\forall n \geq K$ dann folgt

$a \leq b$.

Bsp. 1) Sei $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1.$$

$$a_n = 1 \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad 1+\frac{1}{n} = a_n + b_n = c_n$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 0 \qquad 1$$

$c_n = 1+\frac{1}{n}$ z.B $k=2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \underset{\substack{\downarrow\\1}}{c_n} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\1}}{c_n} \longrightarrow 1.$$

2) $$a_n = \frac{n^2-2n}{n^2+n+1} = \frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{2n}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow 1.$$

$$= \frac{1-\frac{2}{n} \longrightarrow 1}{\underset{\substack{\downarrow\\1}}{1}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1}$$

Übung,

Beweis Satz 2.1.8. 1).

z.z. $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b \implies \lim a_n + b_n = a + b$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Da $\lim a_n = a$ ist gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass

$|a_n - a| < \varepsilon/2 = \varepsilon' \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

Da $\lim b_n = b$ ist, gibt es $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass.

$|b_n - b| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq M_\varepsilon$.

Dann $|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$

$\leq |a_n - a| + |b_n - b|$

Falls $N > \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$. ist,

gilt $|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\square$