- Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$$n \mapsto a_n .$$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt falls die Menge $\{a_1, a_2, \dots\}$ beschränkt ist.

- Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent, falls es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge
$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\}$$
endlich ist.

- Eine solche Zahl a, ist eindeutig bestimmt

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, Grenzwert oder Limes der Folge

Satz $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen a
$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 1$, so dass $\forall n \geq N$
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Satz Jede konvergente Folge ist beschränkt

Achtung! (a_n) beschränkt $\not\Rightarrow$ (a_n) konvergent
z.B $a_n = (-1)^n$.

Man kann mit Konvergente Folgen "rechnen".

Satz Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

1) Dann ist $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und

$$\lim (a_n + b_n) = a + b$$

2) Dann ist $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und

$$\lim a_n b_n = ab$$

3) Falls $b_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$ ist, ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent, und $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

4) Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \ \forall n \geq K$ dann folgt $a \leq b$.
(Monotonie des Limes).

Bsp. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Falls $a_n = a \ \forall a$,
0) $\lim a_n = a$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$, $b \in \mathbb{Z}$.

Satz (Einschliessungkriterium) ("Sandwich" Satz).

Seien $a_n \to \alpha$ und $b_n \to \alpha$ konvergente Folgen mit demselben Limes $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist $K \in \mathbb{N}$ und ist (c_n) eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für jede } n \geq K,$$

dann konvergiert auch $(c_n)_{n \geq 1}$ gegen α.

Beweis: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es Index $N_1 \geq K$ so dass für jedes $n \geq N_1$ beide Ungleichungen

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

erfüllt sind.

dann.
$$-\varepsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \varepsilon$$

Insbesondere
$$|c_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_1$$

$$\Rightarrow \quad \lim c_n = \alpha.$$

(a_n) ist divergent, falls die nicht konvergiert.

Bsp: 1) $(a_n) = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ beschränkt aber divergent

2) $(a_n) = (n)_{n\geq 1}$ nicht beschränkt und divergent.

"Man sagt, eine Folge (a_n) divergiert gegen $+\infty$, falls es zu jedem $T>0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so dass $a_n > T$ für jedes $n \geq n_0$."

§ 2.2. Der Satz von Weierstrass, und Anwendungen.

Defn. 1) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monotone wachsend,

falls $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$

2) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monotone fallend

falls $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

---

a_n konvergiert $\Rightarrow$ a_n ist beschränkt.

a_n beschränkt $\not\Rightarrow$ a_n ist konvergent.

Satz 2.2. (Weierstrass) (Monotone Konvergenz Satz).

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert

$$\lim a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}.$$

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert

$$\lim a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}.$$

Beweis: Sei (a_n) mon. wachsend $\nearrow$ nach oben beschränkt.

Sei $s = \sup \{a_n : n \geq 1\}$.

z.z. Für gegebene $\varepsilon > 0$, $\exists$ $K \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq K$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da s die kleinste obere Schranke von $\{a_n : n \geq 1\}$ ist, gibt es $N \geq 1$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \qquad (s-\varepsilon \text{ ist kein ob. Schranke}).$$

Woraus folgt: $\forall n \geq N$,

$$s - \varepsilon < a_N \underbrace{\leq}_{a_n \text{ mon. wach.}} a_n \leq s = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

d.h. $\forall n \geq N$

$$s - \varepsilon < a_n \leq s < s + \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \quad |a_n - s| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

∎.

Bsp. Sei $a \in \mathbb{Z}$. $0 \leq q < 1$.

Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} n^a q^n = 0$.

Bemerkung. Exponential Funktionen r^n (mit $r := \frac{1}{q} > 1$) wächst schneller als jede Potenz n^a:

$$n^a q^n = \frac{n^a}{r^n} \to 0$$

Beweis : Sei $x_n := n^a q^n$.

$0 \leq q < 1$

Wir können annehmen dass $q > 0$.
(Andernfalls $x_n = 0$.).

$$x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} = \frac{(n+1)^a}{n^a} \cdot n^a \cdot q \cdot q^n$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \cdot q \cdot \underbrace{n^a \cdot q^n}_{x_n.} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot \underbrace{n^a q^n}_{x_n.}$$

$$x_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}_{\to 1.} \cdot q \cdot x_n.$$

Da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1$ ist, gibt es ein n_0 so dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1 < \frac{1}{q} - 1 \quad \forall n \geq n_0.$

Da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1$ ist : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0$ s.d.

$$\left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1 \right| < \varepsilon. \quad \forall n \geq n_0.$$

Wahlen wir als unsere $\varepsilon = \frac{1}{q} - 1 > 0$ (da $q < 1$, $\frac{1}{q} > 1$).

d.h. $\exists\, n_0$ so dass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \qquad \forall n \geq n_0 .$$

Dann folgt es dass

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n < \frac{1}{q} \cdot q \cdot x_n$$
$$\forall n \geq n_0$$

d.h.

$$x_{n+1} < x_n \qquad \forall n \geq n_0 .$$

d.h x_n ist mon. fallend $\forall n \geq n_0$.

Da $x_n > 0$ $\forall n \geq 1$, $x_n = n^a q^n$.

ist die Folge nach unten beschränkt.

Nach Satz von Weierstrass, ist x_n ~~ist~~ konvergent.

$\lim x_n$ existiert. Sei $\ell = \lim x_n$.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n\right)$$
$$= 1 \cdot q \lim x_n = 1 \cdot q \cdot \ell .$$

Bmk: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit $\lim a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist durch $b_n := a_{n+k}$, $n \geq 1$ definierte Folge konvergent und $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

---

d.h $\quad \ell = \lim x_n = 1 \cdot q \cdot \ell = q\ell.$

$\Rightarrow \quad \ell(1-q) = 0 \Rightarrow \ell = 0.$

d.h $\quad \lim x_n = \boxed{0 = \lim n^a q^n.}$

Bsp. $\quad a_n = n^{1/n}, \quad \lim a_n = 1.$

Zuerst zeigen wir

(i) $n^{1/n} \geq 1$ falls $n \geq 1.$

Beweis (i) Für $a, b \in \mathbb{R}, \; n \geq 1, \; n \in \mathbb{N}.$

gilt die Identität

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$$

Mit $a = 1, \quad b = n^{1/n}.$ folgt.

$$b^n - a^n = \underbrace{n-1}_{\geq 0} = (n^{1/n} - 1)(\underbrace{n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} \cdot 1 + \dots + 1}_{\geq 1})$$

da $n \geq 1$ ist

$\Rightarrow n^{1/n} - 1 \geq 0. \Rightarrow n^{1/n} \geq 1.$ ☒

<u>z.z.</u> $\lim n^{1/n} = 1$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

z.z $\exists\, N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$

$$|n^{1/n} - 1| < \varepsilon$$

Aus $\varepsilon > 0$ folgt dass $0 < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

Wir wenden $\lim n^a q^n = 0$ mit $a = 1$, $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$

an und erhalten

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0.$$

d.h $\forall \delta > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} - 0 \right| < \delta \quad \text{falls } n > N.$$

Insbesondere, konnen wir als $\delta = 1$ nehmen.

d.h $\exists\, \tilde{N} \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} \right| < 1 \quad \text{falls } n \geq \tilde{N}$$

(Wir haben schon gesehen dass

$1 \leq n^{1/n}$ $\forall n \geq 1$)

auch. $\left|\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}\right| < 1 \quad \forall n > \tilde{N}$

d.h $\quad n < (1+\varepsilon)^n \quad \forall n > \tilde{N}$

Nochmals wenden wir die Identität

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1}) \text{ an}$$

mit $\quad b = 1+\varepsilon \quad a = n^{1/n}$.

$$\underbrace{((1+\varepsilon)^n - n)}_{>0} = ((1+\varepsilon) - n^{1/n})(\underbrace{(1+\varepsilon)^{n-1} + \dots + n^{\frac{n-1}{n}}}_{>0})$$

$\forall n > \tilde{N}$

$$\Rightarrow \quad (1+\varepsilon) - n^{1/n} > 0 \quad \forall n > \tilde{N}.$$

$$\Rightarrow \quad n^{1/n} \leq 1+\varepsilon. \quad \forall n > \tilde{N}.$$

Zusammen mit $\quad 1 \leq n^{1/n} \quad \forall n > \tilde{N}$

haben wir $\quad 1 \leq n^{1/n} \leq 1+\varepsilon.$

$$1-\varepsilon < 1 \leq n^{1/n} \leq 1+\varepsilon.$$

$$1-\varepsilon \leq n^{1/n} \leq 1+\varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq n^{1/n} - 1 \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |n^{1/n} - 1| < \varepsilon \quad \forall n > \tilde{N}.$$

$\lim \frac{1}{n} = 0.$ $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = 1$

$\lim 1+\frac{1}{n} = 1$

$\boxed{\lim n^a q^n = 0}$. $\boxed{\lim n^{1/n} = 1}$.

Bsp. Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $n \geq 1$

konvergiert. Der Limes $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

wird mit e bezeichnet.

$e =$ die Eulersche Konstante

$e \sim 2.71828 \dots$

Um diese zu beweisen, benutzen wir

Lemma (Bernoulli Ungleichung) : $x \geq -1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Beweis: (Induktion) Für $n=0$ ist die Aussage $1 \geq 1$ ✓

Sei $n \geq 0$. $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{\text{induk. hyp.}}{\geq} (1+x)(1+nx)$

$= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ ✓

Jetzt zuruck zu $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n} \cdot n}{(n^2-1)^n \cdot (n+1)}$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \underset{\substack{\text{Bernoulli} \\ \text{ungleichy.}}}{\geq} \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$> \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1.$$

$\Rightarrow a_{n-1} > a_n. \Rightarrow a_n$ ist mon. fallend.

Wir haben auch dass a_n nach unten beschrankt ist $a_n \geq 1$

Aber dann: a_n ist mon. fallend + nach unten beschrankt

$\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ $\lim a_n$ existiert.

Aber dann $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}$.

ist auch konvergent

da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =: e.$$

__Bsp.__ Sei $c>1$. Sei a_n rekursiv definiert wie folgt

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$
$$n \geq 1$$

Falls wir schon wissen das $\lim a_n$ existiert; sei $\lim a_n = \ell$.

Dann können wir aus der Existenz des Limes dessen Wert schliessen kann.

$$\ell = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{c}{\lim a_n}\right).$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{c}{\ell}\right) \Rightarrow \ell = \sqrt{c}.$$