"Sandwich Satz"

Seien $a_n \to \alpha$ und $b_n \to \alpha$ konvergente Folgen mit demselben Limes $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ist $K \in \mathbb{N}$ und ist (c_n) eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für jede } n \geq K$$

dann konvergiert auch $(c_n)_{n\geq 1}$ gegen α.

Der Satz von Weierstrass (Monotone Konvergenz Satz)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend (fallend) und nach oben (bzw. unten) beschränkt
Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert

$$\lim a_n = \operatorname{Sup}\{a_n : n \geq 1\} \quad (\text{bzw. } \operatorname{Inf}\{a_n : n \geq 1\})$$

Bsp 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n = 0$, Für $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q < 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

3) $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert
$e := \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1') $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $0 \leq q < 1$

Bsp. 2.2.8. Sei $c > 1$

sei a_n rekursive definiert wie folgt

$$a_1 = c \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad n \geq 1$$

Wir werden zeigen ~~B~~ dass

$\lim a_n$ existiert und sei $a := \lim a_n$

dann gilt $a^2 = c$.

d.h. die rekursive definierte Folge a_n konvergiert gegen $\sqrt{c}$!

Behauptung 1. $a_{n+1}^2 > c \quad \forall n \geq 1$

(Es ist klar dass $a_n > 0$.)

Aus $a_{n+1}^2 > c > 1$ folgt dass $a_n \geq 1$ $\forall n \geq 1$.

d.h a_n ist nach unten beschränkt.

Beweis (Behauptung 1).

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2 + c}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2a_n}\left(2a_n^2 - a_n^2 + c\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n}.$$

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 = a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1}^2 = c + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+1}^2 \geq c}$$

$\square$.

Behauptung 2. $a_{n+1} \leq a_n$

d.h. a_n ist mon. fallend.

Beweis: $a_{n+1}^2 > c$, $a_n^2 \geq c$. gilt.

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\frac{c-a_n^2}{2a_n}}_{\leq 0} \leq a_n.$$

$\Rightarrow$ a_n ist monot. fallend.

~~Hs~~ Satz von Weierstrass $\Rightarrow$

$\lim a_n$ existiert.

Sei $a := \lim a_n = \lim a_{n+1}$

. $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$

$$a = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{c}{\lim a_n}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow 2a^2 = a^2 + c$$
$$\Rightarrow a^2 = c.$$

Da $a > 0$ $\Rightarrow$ $a = \sqrt{c}$.

Bmk. Diese rekursiv definierte Folge ergibt sich aus einer ~~z~~ Fixpunktiteration.

Bmk: $\sqrt{c}$ ist die Lösung der Gleichung

$$x^2 = c.$$

Dazu äquivalent ist

$$x^2 = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} \underset{\substack{\downarrow \\ x^2=c.}}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$$

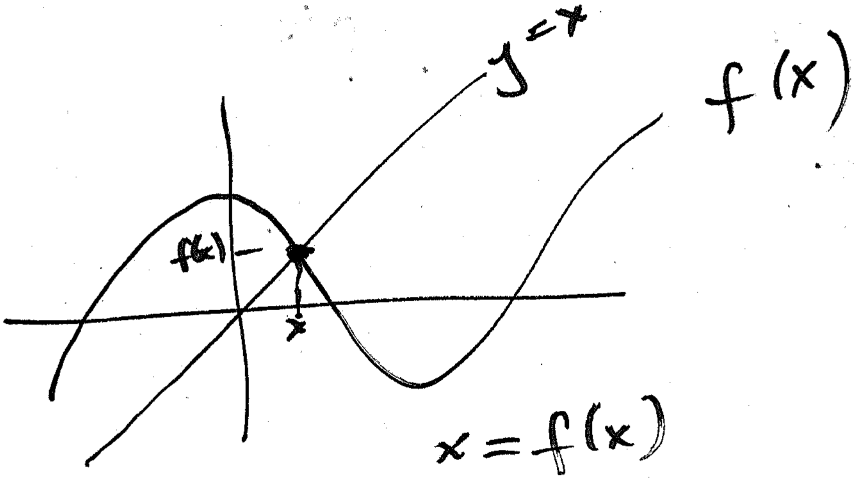
Durch division durch x

$$x = \frac{x}{2} + \frac{c}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) =: f(x)$$

Diese Gleichung ist eine "Fixpunktgleichung" für die Funktion $f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$

Wir untersuchen die Konvergenz der zugehörigen Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \quad x_0 = c > 0.$$



$x = f(x)$

Um die Lösung $x^2 = c$ zu finden können wir mit einen "Guess" $= x_1$ beginnen

start $x = G$

if $x^2 = c$ then stop return x

else $x \leftarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$ and repeat.

Clicker Frage.

Seien $b, c \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $c < 0$

Dann:

F 1) $\lim \left(1+\frac{1}{b}\right)^n = e$ $\qquad q^n \quad q = 1+\frac{1}{b} > 1$

$\left(1+\frac{1}{b}\right)^n$ diver. gegen ∞.

R 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{c}\right)^n = 0$ $\qquad 1+\frac{1}{c} = q < 1 \qquad \lim q^n = 0.$

F 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = e$

F 4) $\lim \left(1+\frac{1}{b}\right)^b = 1$. $\left(1+\frac{1}{b}\right)^b \longrightarrow \left(1+\frac{1}{b}\right)^b$,

F 5) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$. $\longrightarrow e$

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\qquad c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = \underbrace{a_n \cdot a_n \cdots a_n}_{b \text{ mal}}$,

$d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e.$

§2.3 Limes Superior und Limes Inferior.

Mon. konv Satz ≡ Monotone, beschränkte Folgen sind konvergent.

Bmk. Eine Mon. Folge die nicht beschränkt ist, divergiert gegen $\pm\infty$.
Wir nehmen an dass $a_n \nearrow$ mon. wach. ist. In dem Fall ist die Unbeschränktheit nach Definition äquivalent dazu, dass die Folgen gegen $+\infty$ divergiert.

Bmk. Wichtige Anwendung des Satzes von Weierstrass ist, wie man mit jeder beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ (~~nicht~~ muss nicht monotone sein). zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren kann, welche dann einen Grenzwert besitzen.

Für jedes $n \geq 1$

$$b_n := \inf \{a_k : k \geq n\}.$$
$$= \inf \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

$$c_n := \sup \{a_k : k \geq n\}.$$
$$= \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

Wir erinnern uns:

Kor 1.1.6. Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmenge

1) Falls B nach oben beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B$

2) Falls B nach unten beschränkt ist, folgt $\inf B \leq \inf A$.

Für jedes n, ist die Menge

$$A_n := \{a_k : k \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subset \{(a_n)_{n \geq 1}\},$$

beschränkt und zudem gilt.

$$\underset{\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}}{\overset{}{A_{n+1}}} \subset A_n \quad \forall n \geq 1.$$

$$\{a_{n+1}, a_{n+2} \dots\} \subset \{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Die Menge $\{a_1, a_2, \dots\}$. ist beschränkt da $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt ist.

Deswegen ist auch die Mengen A_n, $n \geq 1$ ~~auch~~ beschränkt.

$b_n := \operatorname{Inf} A_n \qquad c_n := \operatorname{Sup} A_n$.

Da $A_{n+1} \subset A_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Inf} A_n \leq \operatorname{Inf} A_{n+1} \\ \text{und } \operatorname{Sup} A_{n+1} \leq \operatorname{Sup} A_n. \end{array}\right\} \text{Kor 1.1.?}$$

d.h $b_n \leq b_{n+1}$ und $c_{n+1} \leq c_n$.

d.h (b_n) ist mon wachsend

(c_n) ist mon. Fallend.

~~Da~~ Mon. konv. satz $\Rightarrow$ $\lim b_n$ existiert
$\lim c_n$ existiert.

Wir definieren $\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n =: \liminf a_n. \text{ (Limes inferior)}}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} c_n =: \limsup a_n. \text{ limes superior.}}$

Bmk. ~~Es~~ gilt stets $\liminf a_n \leq \limsup a_n$
da $b_n \leq c_n$ $\forall n$.

Bsp. $(a_n) = (-1)^n$

$b_n = \operatorname{Inf}\{a_k : k \geq n\}$.

$-1 = b_1 = \operatorname{Inf}\{a_1, a_2 \ldots\} = \operatorname{Inf}\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$.

$-1 = b_2 = \operatorname{Inf}\{a_2, a_3 \ldots\} = \operatorname{Inf}\{1, -1, 1, -1 \ldots\}$

$\vdots$

$-1 = b_n = \inf\{\pm 1, \mp 1, \ldots\}$.

$\operatorname{Inf}\{a_k : k \geq n\} = -1$

$(b_n)_{n \geq 1} = \{-1, -1, -1, \ldots\}$,

$c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$

$c_1 = \sup\{-1, 1, -1 \ldots\} = 1$.

$c_2 = \sup\{1, -1, \ldots\} = 1$

$\vdots$

$c_n = \sup\{\pm 1, \mp 1, \ldots\} = 1$

$(c_n)_{n \geq 1} = \{1, 1, \ldots, 1 \ldots\}$.

$\liminf a_n = \lim b_n = -1$

$\limsup a_n = \lim c_n = 1$.

Bsp. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$$\{(a_n)_{n\geq 1}\} = \{0, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \dots \}.$$

$$b_1 = \inf\{0, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3}, \dots \} = -1$$

$$b_2 = \inf\{1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3} \dots \} = -1$$

$\vdots$

$$(b_n)_{n\geq 1} = \{-1, -1, \dots \}.$$

$$c_1 = \sup\{0, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \dots \}.$$
$$= 1+\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \sup\{1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3} \dots \} = 1+\frac{1}{2}.$$

$$c_3 = \sup\{-1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \dots \} = 1+\frac{1}{4}.$$

$$c_4 = \sup\{1+\frac{1}{4}, -1+\frac{1}{5}, \dots \} = 1+\frac{1}{4}.$$

$c_n = 1 + \frac{1}{n_g}$ wobei n_g die kleinste gerade Zahl $\geq n$ bezeichnet.

$$\lim b_n = \liminf a_n = -1$$
$$\lim c_n = \lim 1+\frac{1}{n_g} = \limsup a_n = 1.$$

Lemma 2.4.1 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und
$$\liminf a_n = \limsup a_n.$$

d.h. $(a_n)_{n\geq 1}$ konv. $\Leftrightarrow$ (a_n) ist beschränkt
<u>und</u>
$\liminf a_n = \limsup a_n$.

Beweis ($\Leftarrow$) $b_n := \inf\{a_n, a_{n+1} \dots\}$
$c_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$.

Deswegen $b_n \leq a_n \leq c_n$.

$$\begin{array}{ccc} b_n & \leq a_n \leq & c_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \liminf a_n & & \limsup a_n \end{array}$$

Sandwich Satz $\Rightarrow$ $\lim a_n$ auch existiert

und $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

($\Rightarrow$) Übung

§ 2.4 Das Cauchy Kriterium.

Frage: Kann man eine Kriterium für Konvergenz finden so dass

1) Man keine Hypothese über die Folge annimt

2) Man ~~kann~~ entscheiden ob die Folge konvergiert ohne Ihren Grenzwert zu kennen?

Antwort: Das Cauchy Kriterium

Defn: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst Cauchy-Folge falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $m, n \geq N$ gilt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

d.h. Eine Folge ist eine Cauchy Folge wenn die Abstände der Folgenglieder untereinander mit wachsendem Index beliebig klein werden.

Satz 2.4.2. (Cauchy Kriterium).

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von reelle Zahlen

a) Jede Cauchy Folge ist beschränkt

b) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge

c) Jede Cauchy Folge ist konvergent

$(a_n)_{n\geq 1}$ konv $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy Folge.

Bmk. Wir können den Cauchy-Kriterium in beiden richtung anwenden.

d.h $(a_n)_{n\geq 1}$ ist nicht cauchy $\Longrightarrow$ (a_n) ist divergent.

Bsp. Die Harmonische Reihe.

Sei $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Nun zeigen wir dass $(a_n)_{n\geq 1}$ kein Cauchy Folge ist. Deswegen divergent $(a_n)_{n\geq 1}$

$$a_{2n} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}. \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Da $(n+1) \leq 2n$.

$$= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

d.h $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (a_n)$ ist nicht cauchy

$\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ ist divergent.

Beweis (Satz 2.4.2) Cauchy Kriterium

a) Sei (a_n) eine Cauchy Folge.

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass

$\forall m, n \geq N$, $|a_m - a_n| < \varepsilon$

Dann ist insbesondere $|a_n - a_N| < \varepsilon$

für jedes $n \geq N$

Also gilt für solche n, dass

$|a_n| < |a_N| + \varepsilon$ ist

Sei $S := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a_N| + \varepsilon\}$

dann folgt dass $|a_n| < S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Die Folge ist also beschränkt.

b) Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert L

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ so

dass $\forall n \geq N$, die Ungleichung

$|a_n - L| < \varepsilon/2$ gilt.

Für $m, n \geq N$ ist dann

$$|a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L|$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Daher ist $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy Folge

c) Sei $\varepsilon > 0$ und $N \geq 1$ so dass

$$\forall m, n \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Sei $n \geq N$ fest beliebig

Dann folgt $\forall m \geq N$

$$a_m - \varepsilon \leq a_n \leq a_m + \varepsilon \quad (n \text{ fest!})$$

Sei $k \geq N$, dann folgt dass

$$\sup\{a_m : m \geq k\} - \varepsilon \leq a_n \leq \inf\{a_m : m \geq k\} + \varepsilon$$

Das heisst $c_k - \varepsilon \leq a_n \leq b_k + \varepsilon$, $\forall k \geq N$.

woraus $(\lim c_k) - \varepsilon \leq (\lim b_k) + \varepsilon$ folgt

d.h $(\limsup a_k) - \varepsilon \leq \liminf a_k + \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\limsup a_k \leq \liminf a_k$$

Aber da immer

$$\liminf a_k \leq \limsup a_k \text{ gilt}$$

folgt dass $\liminf a_k = \limsup a_k$

und damit $\lim a_k$ existiert nach Lemma 2.4.1

$\boxtimes$