(a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) ist beschränkt

(a_n) beschränkt $\not\Rightarrow$ (a_n) konvergent

Satz (Weierstrass)

(a_n) beschränkt und monotone

$\Longrightarrow$ (a_n) konvergent.

limesinferior, limessuperior

Sei (a_n) beschränkte Folge.

Definiere $A_n := \{a_k : k \geq n\}$

$= \{a_n, a_{n+1}, \dots \}$.

Dann $A_{n+1} \subset A_n$.

Seien $b_n := \operatorname{Inf} A_n$ $\quad c_n := \operatorname{Sup} A_n$

Dann ist $(b_n)_{n \geq 1}$ monotone wachsend, beschränkt

$(c_n)_{n \geq 1}$ monotone fallend, beschränkt

$\liminf a_n := \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, $\quad \limsup a_n := \lim\limits_{n \to \infty} c_n$

Satz $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt und $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Bmk. Gilt immer dass: $b_n \leq a_n \leq c_n$

$\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Defn Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst **Cauchy Folge** falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $m, n \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Satz: (**Cauchy Kriterium**) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von reelle Zahlen.

(1) Jede Cauchy Folge ist beschränkt

(2) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge

(3) Jede Cauchy Folge ist konvergent

d.h. $\boxed{(a_n)_{n\geq 1} \text{ konvergent} \Leftrightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ Cauchy.}}$

Bsp. $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

"Die Harmonische Reihe"

ist divergent.

§2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

In diesem Abschnitt werden wir zeigen dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Als vorbereitung werden wir ein Lemma von Cauchy-Cantor beweisen.
Diese geht um das "Prinzip der Intervalschachtelung" (Principle of nested intervals).

Diese Prinzip besagt, dass eine absteigende Folge nichtleerer geschlossener Intervalle endlicher Länge einen nichtleeren Schnitt hat.
Gehen ausserdem die Längen gegen Null, besteht der Schnitt aus genau einem Punkt!

Defn. 2.5-1 Ein abgeschlossenes Interval ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ der Form

(1) $[a, b]$ $\quad a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) $[a, +\infty[$ $\quad a \in \mathbb{R}$.

(3) $]-\infty, a]$ $\quad a \in \mathbb{R}$

(4) $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.

Wir definieren die Länge $\mathcal{L}(I)$ des Intervals als

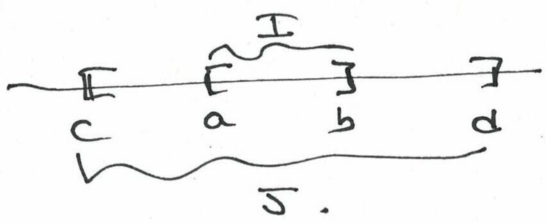
$\mathcal{L}(I) = b - a$ in Fall (1)

$\mathcal{L}(I) = \infty$ in (2), (3), (4).

Das abgeschlossen Interval ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R} \iff \mathcal{L}(I) < \infty$.

Bmk Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ mit $a \leq b$, $c \leq d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Dann gilt $I \subset J \iff c \leq a$ und $b \leq d$.



Satz (Cauchy-Cantor Lemma).

Sei $I_1 \supseteq I_2 \supset \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supset \cdots$

eine absteigende Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < \infty$.

Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$

Falls zudem $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$, so besteht der Schnitt aus genau einem Punkt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x\} \text{ für ein } x \in \mathbb{R}.$$

Bmk 1) Die Voraussetzung, dass die Längen endlich sein sollen ist erforderlich, wie die Folge der Intervalle

$$I_n = [n, \infty[$$

zeigt, die einen leeren Schnitt hat.

2) Die Voraussetzung, dass die Intervalle abgeschlossen sein sollen, ist erforderlich wie die Folge der Intervalle

$$I_n :=]0, \tfrac{1}{n}] \qquad n \geq 1$$

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \emptyset$$

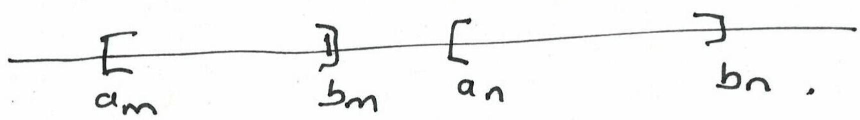
Beweis (Cauchy-Cantor Lemma).

Sei $I_n = [a_n, b_n]$ und $I_m = [a_m, b_m]$.

wobei $n \geq 1$, $m \geq 1$

Behauptung: $a_n \leq b_m \quad \forall n \geq 1, \forall m \geq 1$.

Beweis: Sonst gibt es $n \geq 1$ und $m \geq 1$ mit $b_m < a_n$.



Dann würde $[a_m, b_m] \cap [a_n, b_n] = \emptyset$

Dies ist ein Widerspruch, da es entweder $I_m \subset I_n$ oder $I_n \subset I_m$ gilt.

Seien $A = \{a_n : n \geq 1\} \neq \emptyset$

$B = \{b_n : n \geq 1\} \neq \emptyset$

Dann erfüllen A und B die Voraussetzungen des Vollstendigkeitsaxiom ($\forall a_n \in A, \forall b_n \in B$; $a \leq b$).

Deswegen gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \geq 1$$

d.h $c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \geq 1$

Woraus folgt dass $c \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$.

d.h. $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Wir bemerken dass aus $[a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1} \subseteq I_n = [a_n, b_n]$.

$$0 \leq \mathcal{L}(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - a_n = \mathcal{L}(I_n)$$

$$\leq \dots \leq \mathcal{L}(I_1) < \infty.$$

d.h $\mathcal{L}(I_n)$ ist eine monotone beschrenkte Folge.

Mittels Weierstrass folgt dass $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) \geq 0$ existiert.

Falls es $c_1 < c_2$ gibt mit

$\{c_1, c_2\} \subset \bigcap_{n \geq 1} I_n$

dann folgt $[c_1, c_2] \subset I_n \quad \forall n \geq 1$

und somit $0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n = \mathcal{L}(I_n)$

Falls. $\lim \mathcal{L}(I_n) = 0$ gilt, $c_2 - c_1 = 0$

$\Rightarrow c_2 = c_1$

$\boxtimes$

Satz $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis Wir werden zeigen dass $[0,1]$ nicht abzählbar ist.

Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ eine bijektion.

Idee Wir werden zeigen dass diese Abbildung nicht surjektive sein kann.

~~Idee~~: Wir bilden induktiv eine Monotone fallende Folge

$I_0 \supseteq I_1 \ldots \supseteq I_n \ldots$

abgeschlossener Intervalle in $[0,1]$ und punkte $a(n)$ $\forall n$ so dass

$a(n) \notin I_n \quad \forall n.$

Dann folgt dass $a(n) \notin \bigcap_{\ell \geq 1} I_\ell \quad \forall n \geq 0.$

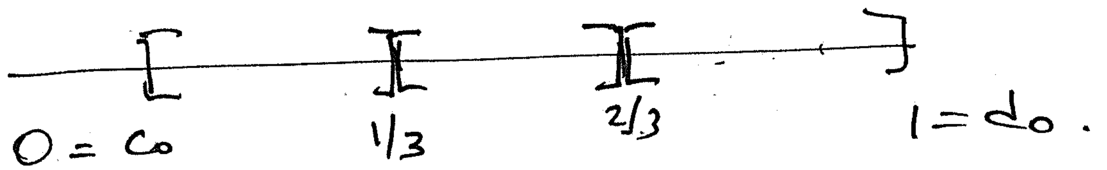
~~Ist~~ Nach Cauchy-Cantor, gilt auch (9)
dass $\bigcap_{l \geq 0} I_l \neq \emptyset$

Woraus folgt dass $a: \mathbb{N} \to [0,1]$
nicht surjektiv sein kann.

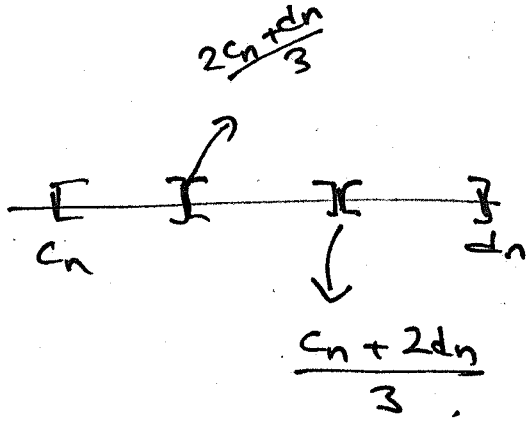
Sei $x \in \bigcap I_l \subset [0,1]$, dann gibt
es kein $n \in \mathbb{N}$ so dass
$x = a(n)$. d.h $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
~~kann~~ nicht surjektiv sein.

Sei $I_0 = [0,1] = [c_0, d_0]$
Teilt man das Intervall $[0,1]$ in
drei gleich grosse Intervalle

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.



So kann $a(1)$ maximal in zweien von
diesen liegen. Es gibt also ein Teilintervall
$I_1 = [c_1, d_1]$ so dass $d_1 - c_1 = 1/3$ und
$a(1) \notin I_1$.
Iterative konstruiert man eine absteigende
Folge Intervallen $[c_n, d_n] = I_n$ mit
$d_n - c_n = \frac{1}{3^n}$ und $a(n) \notin I_n = [c_n, d_n]$.



Sei dann I_{n+1} eines dieser drei Intervalle $\left[c_n, \frac{2c_n+d_n}{3}\right]$, $\left[\frac{2c_n+d_n}{3}, \frac{c_n+2d_n}{3}\right]$

$$\left[\frac{c_n+2d_n}{3}, d_n\right]$$

dass $a(n+1) \notin I_{n+1}$. Dann folgt

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$

Damit ist der Satz bewiesen $\boxed{}$.

Defn. Eine <u>Teilfolge</u> einer Folge $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine Folge $b: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ so dass eine streng monotone wachsende Abbildung $l: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $b = a \circ l$ gilt

d.h. $(b_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge

wobei $b_n = a_{l(n)}$ und $l(n) \underset{\neq}{<} l(n+1)$ $\forall n \geq 1$

Eine Teilfolge ist eine Folge, die durch weglassen von Folgengliedern entsteht. Man lässt also aus

$$(a_1, a_2, a_3 \ldots)$$

Folgenglieder weg, aber auf eine Art und Weise

$$\cancel{a_1} \quad \underset{=: b_1}{\underset{\downarrow}{a_2}} \quad \cancel{a_3} \quad \cancel{a_4} \quad \underset{= b_2}{\underset{\downarrow}{a_5}} \quad \cancel{a_6}, \quad \underset{b_3}{\underset{\downarrow}{a_7}} \; .$$

dass noch unendlich viele übrig bleiben.

Bsp. 1) $a_n = (-1)^n$. Sei $l(n) = 2n$

$$l: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$$

$$(b_n)_{n \geq 1} = \left(a_{l(n)}\right)_{n \geq 1} = (a_{2n}) = \{1, 1, \ldots\}$$

$c_n = \{-1, -1, \dots \}$.

$$\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n+1$$

$a_n : \{\cancel{-1}, 1, -1, \cancel{1}, -1, 1, -1, \cancel{1}, -1, \cancel{1}, -1 \quad - \quad \}$.

$d_n = \{1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, \dots$

Bemerken sie: dass $\lim b_n = 1 = \limsup a_n$.
$\lim c_n = -1 = \liminf a_n$.

d_n ist divergent.

Satz (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ beschronkt
Dann gibt es ein Interval $[A, B]$ mit $\forall n$: $a_n \in [A, B]$.

Wir werden eine Intervalschachtelung definieren so dass jede Interval unendlich viele Folgenglieden hat.

Betrachte nun die Folgende Bisektionsmethode. Wir beginnen mit dem Intervall

$$I_1 := [A, B] = [A_1, B_1].$$

$$A_1 := A \qquad B_1 := B$$

$$\underset{A}{[} \qquad \overset{\frac{A+B}{2}}{|} \qquad \underset{B}{]}$$

und betrachten wir zwei Intervalle

$$\Big[\underset{\underset{A_1}{\|}}{A}, \underset{\underset{c_1}{\overset{!}{=}}}{\frac{A+B}{2}}\Big] \quad \text{und} \quad \Big[\underset{\underset{c_1}{\overset{!}{=}}}{\frac{A+B}{2}}, \underset{\underset{B_1}{\|}}{B}\Big]$$

Mindestens eine von dieser 2 Intervalle hat unendlich viele Folgenglieder.

Falls $[A_1, c_1]$ unendlich viele an hat, dann ist $[A_1, c_1]$ die neue Intervall,

Dann gilt $I_2 := [A_1, c_1] \subset I_1$

und $\alpha(I_2) = \frac{1}{2}\alpha(I_1)$

Wir definieren Induktive $I = I_1 \supset I_2 \cdots$ eine monotone Fallende Folge abgeschlossener Intervalle mit

14

1) $\ell(I_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(I_n)$

2) $E_n := \{ k \in \mathbb{N} : a_k \in I_n \}$ ist unendlich.

Algorithmisch : $A_1 := A$
$B_1 := B$.

For $n = 1, 2$

$$c_n := \frac{A_n + B_n}{2}$$

IF $E_n = \{ k : a_k \in [A_n, c_n] \}$ unendlich

Then $A_{n+1} := A_n$; $B_{n+1} := c_n$

Else $A_{n+1} := c_n$ $B_{n+1} := B_n$.

Nach Cauchy - Cantor $\bigcap I_n \neq \emptyset$.

$\lim \ell(I_n) \to 0$, deswegen $\bigcap I_n = \{c\}$.

OK Aber wo ist die Teilmenge ?

Nun definieren wir die Teilfolge.

Wir nehmen als $a_{\ell(1)} =: a_1 \in [A, B] = [A_1, B_1]$

Da noch unendlich viele Folgenglieder in $I_2 = [A_2, B_2]$ gibt

wähle ein index $\ell(2) > 1 = \ell(1)$

mit

$$a_{\ell(2)} \in I_2 .$$

Es gibt noch unendlich viele folgenglieder in $I_3 = [A_3, B_3]$. Wähle ein index

$\ell(3) > \ell(2) > \ell(1) = 1$ mit

$a_{\ell(3)} \in I_3$.

Dasselbe Argument liefert den Schritt von n auf $n+1$.

Wir erhalten eine Abbildung $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\ell(n+1) > \ell(n)$ $\forall n \geq 1$

und $a_{\ell(n)} \in I_n$. $\{c\} = \bigcap_{\ell \geq 1} I_\ell$. Insbesondere $c \in I_n$.

$a_{\ell(n)}$ und $c \in I_n$. folgt.

$$|a_{\ell(n)} - c| \leq \mathcal{L}(I_n) = \frac{B-A}{2^{n-1}}$$

Daraus folgt dass $\lim a_{\ell(n)} = c$.

Frage (16)

? Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. ?

$(a_{\ell(n)})_{n\geq 1}$ konvergiert für alle Teilfolge $(a_{\ell(n)})_{n\geq 1}$

$\Longrightarrow$ a_n ist konvergent.

? ?

---

a_n ist konvergent

✓ $\Longrightarrow$ $(a_{\ell(n)})$ ist konvergent für alle Teilfolge $a_{\ell(n)}$.

<u>**Bsp.**</u> $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

sei $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \to 2n$.

Dann ist $b_n = 1 + \frac{1}{2n} = a_{\ell(n)}$.

konvergente Teilfolge von $a(n)$.

$\lim b_n = 1$.
