

Cauchy - Cantor Lemma

Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

eine absteigende Folge abgeschlossener
Intervalle mit $L(I_1) < \infty$.

Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Falls zudem $\lim_{n \rightarrow \infty} L(I_n) = 0$, so gilt

$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x\}$ für ein Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Kor $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Satz (Bolzano - Weierstrass): Jede

beschränkte Folge besitzt eine
konvergente Teilfolge.

Bsp: $a_n = (-1)^n$

$b_n = a_{2n} = \{1, 1, \dots\}$ $\lim b_n = 1$

$c_n = a_{2n+1} = \{-1, -1, \dots, -1\}$ $\lim c_n = -1$.

Bmk 1) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n \geq 1}$ ($b_n = a_{\ell(n)}$) (für eine $\ell: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.)

$$\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n.$$

2) ~~Es~~ gibt zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n \geq 1}$ die $\liminf a_n$ und bzw $\limsup a_n$ als Grenzwert annehmen.

d.h. $\exists$ Teilfolgen (b_n) und (c_n) so dass

$$\begin{aligned} \lim b_n &= \liminf a_n \\ \lim c_n &= \limsup a_n. \end{aligned}$$

§ 2.6. Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$.

Die Theorie der Folgen in $\mathbb{R}$,
der Konvergenz Begriff usw lassen
sich leicht auf Folgen in $\mathbb{R}^d$
oder $\mathbb{C}$ übertragen.

Defn: Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine
Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$

Wir schreiben a_n statt $a(n)$.

Wir bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Defn. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ heisst
beschränkt falls es $C > 0$ gibt mit
$$\|a_n\| \leq C \quad \forall n \geq 1.$$

Hier ist $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf
 $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$. Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}. \quad z = x + iy$$

$$\|z\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

(4)

Defn Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass für jedes $\varepsilon > 0$, einen Index $N \geq 1$ gibt so dass

$$\forall n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Bmk: Falls solch ein a existiert, ist es eindeutig bestimmt und nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge
Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Bmk: $\lim a_n = a \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0$

Sei $a_n \in \mathbb{R}^d$, $a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,d})$

Sei $b = (b_1, \dots, b_d)$

Satz Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Sei $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j \quad 1 \leq j \leq d$.

(5)

Bsp. $a_n = (\frac{1}{n^2}, 1 + \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2$

$$a_{n,1} = \frac{1}{n^2}$$

$$a_{n,2} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2}, 1 + \frac{1}{n}) = (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1)$$

$$(\frac{1}{n^2}, 1 + \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 1)$$

Beweis (Satz)

Sei $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\forall 1 \leq j \leq d$$

$$(*) \quad x_j^2 \leq \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq d \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$$

Aus (*) folgt dass

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $\varepsilon > 0$, $N \geq 1$ mit (Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ist)
 $\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$$|a_{n,j} - b_j| \leq \|a_n - b\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, 1 \leq j \leq d.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j \quad 1 \leq j \leq d.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei $\varepsilon > 0$, und für jedes ⑥.
 $1 \leq j \leq d$, sei $N_j \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a_{n,j} - b_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \quad \forall n > N_j$$

Dann ist für $N := \max \{N_1, \dots, N_d\}$.

$$\max_{1 \leq j \leq d} |a_{n,j} - b_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \quad n \geq N$$

und somit mittels ⑧.

$$\|a_n - b\| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq j \leq d} |a_{n,j} - b_j| < \sqrt{d} \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} = \varepsilon.$$

$$\forall n > N$$

$$\Rightarrow \lim a_n = b.$$

Satz. 1) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert

genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist:

(a_n) ist Cauchy falls $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$

mit $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N.$

2) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Satz 2. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente

(7)

Folgen in $\mathbb{R}^d$ mit $\lim a_n = a, \lim b_n = b$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a.$$

2) Für $\mathbb{C}$ haben wir auch dass ~~schon~~
die Körperstruktur mit Konvergenz
gut verträgt.

Nämlich, sei $(z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$
mit $\lim z_n = z \quad \lim w_n = w$

Dann gilt (a) $\overline{z_n} \rightarrow \overline{z}$

$$(b) \|z_n\| \rightarrow \|z\|$$

$$(c) z_n w_n \rightarrow zw.$$

(d) Falls $w \neq 0, w_n \neq 0$ th

so konvergiert z_n/w_n gegen z/w .

(8)

Bsp. 1) $z_n = \underbrace{\frac{n^2+5}{n^3+1}}_{\downarrow 0} + i \underbrace{\left(\frac{n^2+2n}{n^2+5}\right)}_{\downarrow i} \rightarrow i$

$$\frac{n^2+5}{n^3+1} = \frac{n^2(1+5/n^2)}{n^3(1+1/n^3)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1+5/n^2}{1+1/n^3} \right) \xrightarrow[\substack{\nearrow 1 \\ \searrow 1}]{} 0.$$

2) Sei $a_n = \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+5}, n, 1 \right)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \checkmark & \downarrow \\ \frac{1}{2} & \text{divergent} & 1 \\ & \text{gegen} & \\ & \infty & \end{array}$$

a_n ist divergent,

§ 2.7 Reihen (Series).

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

Mittels a_n , definieren wir eine neue Folge; die Folge der Partialsummen

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Defn Eine Reihe ist eine unendliche Summe $a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$.

Defn. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$, die Folge der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall wird deren Limes mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Der Grenzwert $\lim S_n$ heisst der Wert oder die Summe der Reihe.

(10)

Bsp. Geometrische Reihe(Wir bezeichnen $\|z\|$, mit $|z|$)

Für $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, betrachten wir
 die Reihe $1 + q + q^2 + \dots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Für die Partialsummen gilt

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} \\ q S_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \dots + \cancel{q^{n+1}} \\ \hline (1-q) S_n = 1 - q^{n+1} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \cdot (1 - q^{n+1})$$

Also für $|q| < 1$, die Folge $q^{n+1} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1 - q} (1 - q^{n+1}) \rightarrow \frac{1}{1 - q}.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$
 und ihre Summe ist $\frac{1}{1 - q}$.

Bsp.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{100}{99}.$$

Bmk. Für $q=1$, $S_n = n \rightarrow$ divergiert gegen ∞ . (11)

Für $q=-1$ $S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = \text{ungerade} \\ 1 & \text{falls } n = \text{gerade} \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ ist divergent.

Für $|q| > 1$, S_n divergiert gegen ∞ .

Gewöhnliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$
konvergiert $\Leftrightarrow |q| < 1$.

Bmk. Weglassen endlich vieler Glieder

Für die Frage "Ob eine Reihe konvergiert" ist das "Verhalten am Anfang" gleichgültig.

(Genau wie bei einer Folge:

Falls a_n konv ~~toda~~ gegen a , so

konvergiert auch $b_n := a_{n+k}$ für $k \in \mathbb{N}$.)

Im Gegensatz zur Situation bei Folgen ändert sich aber der Grenzwert (te. der Summe der Reihe) wenn einzelne Glieder weggelassen oder hinzugefügt werden.

Bsp. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$ aber

(12)

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}.$$

$$\lim a_n = a, \quad b_n = a_{n+k} \Rightarrow \lim b_n = a.$$

Wichtige Bsp für divergente Folge.

Die Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist divergent,}$$

Da $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ nicht Cauchy ist

Deswegen S_n divergiert und damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent.}$$

Bsp. "Teleskopreihe"

Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(13)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \quad \therefore \text{Also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

□

Wie für Folgen, können wir mit konvergente Reihen "rechnen".

Satz 2 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

sowie $\alpha \in \mathbb{C}$.

1) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k)$ konvergent

$$\text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beweis Seien $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ $U_n := \sum_{k=1}^n b_k$

$$T_n := \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

Dann $T_n = S_n + U_n$, Da S_n, U_n

konvergieren, konvergieren auch T_n

$$\text{und} \quad \lim T_n = \lim S_n + \lim U_n.$$

Satz (Cauchy Kriterium).

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent falls:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

$$\forall m \geq n \geq N.$$

Beweis Übung. Folgt aus Cauchy Kriterium
für $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Bmk - $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow$

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \rightarrow 0 \quad m \geq n, n \rightarrow \infty$$

~~Satz~~ Bmk Als eine Folgerung von
Cauchy Kriterium erhalten wir die
folgende Notwendige Bedingung zur
Konvergenz

Satz: Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

so muss gelten $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Vorsichtig!

$\lim a_k = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.}$ (15)

Bsp. $a_k = \frac{1}{k}$, $\lim \frac{1}{k} = 0$

aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Harmonische Reihe ist Divergent.

Aber wir können diesen Satz ~~so~~ in
wie folgt benutzen.

Falls $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$, $\lim \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$.
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ ist divergent.

Beweis ~~hier~~ (Satz) Wir wenden

Cauchy Kriterium mit $m=n$. Dann.

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N > 1$ so dass $\forall n \geq N$, $\left| \sum_{k=n}^n a_k \right| < \varepsilon$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ so dass $\forall n \geq N$ $|a_n| < \varepsilon$

d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$