Defn

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist

konvergent falls die Folge der Partialsummen konvergiert.

d.h die Folge $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

konvergiert.

$$\lim S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heisst **der Wert** oder **die Summe** der Reihe.

Satz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

$\iff \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \geq 1$ mit

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Kor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

$\Rightarrow \lim a_k = 0.$

Vorsichtig! $\lim a_k = 0$

$\not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Bsp: $a_k = \frac{1}{k}$ $\quad \lim a_k = 0.$

Harmonische Reihe: $\sum \frac{1}{k}$ ist divergent.

Bmk: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist keine "Summe" im Sinne der Algebra, sondern im Falle der Divergenz nur ein Symbol für eine nicht konvergente Folge ($S_n =$ die Folge der Partialsumme). Im Falle der Konvergenz der Grenzwert der Folge S_n.

Deshalb darf man mit Reihen auch nicht wie mit gewöhlichen Summen rechnen.

Die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

ist in dieser einfachen Form falsh.

Damit wäre z.B

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= \infty - \infty$$

Satz Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$

1) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und
$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konvergent und
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bmk. In der Sprache der Lin. Algebra heisst das, dass die Menge der konvergenten Reihen einen Vektorraum bilden und die Abbildung, die einer konvergenten Reihe ihrem Limes zuordnet, linear ist.

Bsp 1) Geometresiche Reihe $q \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

$$= \begin{cases} \text{divergent, falls } |q| \geq 1 \\ \text{konvergent falls } |q| < 1 \end{cases}$$

Falls $|q| < 1$ ist, so konvergiert die Reihe gegen $\frac{1}{1-q}$.

2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{3^{n+1} n(n+1)} = \frac{1}{3} + 1/6.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k + k^2 + k}{3^{k+1} \cdot k(k+1)} = S_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3\, k(k+1)} + \frac{1}{3^{k+1}} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right)}_{\downarrow\ \frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{k+1}} \right)}_{\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} - 1 \right)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 1/3} - 1 \right)}_{1/6.}$$

$$\frac{1}{2}$$

Satz 2.7.6 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ $(s_n := a_1 + \dots + a_n)$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Beweis Dieser Satz ist eine einfache Anwendung des Monotone Konv. Satz.

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= a_{n+1} \geq 0$$

$\Rightarrow s_{n+1} \geq s_n \quad \forall n$

$\Rightarrow (s_n)_{n\geq 1}$ ist mon. wachsend.

Nach Mon. konv. Satz ist (s_n) konvergent genau dann wenn $(s_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist.

$\blacksquare$.

Bmk: Ob eine Reihe konvergiert oder divergiert kann man oft feststellen, indem man sie mit einer Reihe vergleich, deren Konvergenz (oder Divergenz) man bereits kennt.

Satz 2.7.7 (Vergleichsatz)

(Majoranten / Minoroten kriterium)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k$

$\forall k \geq K_0$

Dann gelten:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist divergent.

Beweis 1) $0 \leq a_k \leq b_k$

$b_k \geq 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv $\overset{\text{Satz 2.7.6.}}{\Rightarrow}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ist nach oben beschränkt.

d.h. $\exists\, C$ so dass

$|S_n| < C \quad \forall n.$

$a_k \geq 0$: Nach Satz 2.7.6, um zu zeigen dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, müssen wir zeigen dass die Folge $U_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist.

Aber da $0 \le a_k \le b_k$

$k \ge 1$

$$U_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k =: S_n.$$

somit.

$$|U_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \le C$$

$\Rightarrow |U_n| \le C$

$\Rightarrow U_n$ ist nach oben beschränkt

$\xRightarrow{\text{Satz}}$ Nach 2.7.6. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

2) wäre $\sum b_k$ konvergent, so wäre nach (1) ebenso auch $\sum a_k$ konvergent. $\blacksquare$

Bsp. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$a_k = \frac{1}{k^2}$

$\sum \frac{1}{k}$ divergent

$\sum \frac{1}{k(k+1)}$ konvergent

$\sum q^k$: konv $|q|<1$, div. $|q|>1$

$k^2 > k$

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k}$.

$\sum \frac{1}{k}$ ist div. hilft uns nicht!

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \longrightarrow 1.$$

$k(k-1) < k \cdot k = k^2$

$$b_k = \frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2} = a_k.$$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$\sqrt{k} \leq k \quad \forall k \geq 1$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}}_{b_k} > \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k}$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\xRightarrow{\text{Vergleich Satz}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$

$\dots \frac{1}{k^4} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \dots$ konvergieren.

da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $a_k = \frac{1}{k!}$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k.$

$\geq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{k-1 \text{ mal.}} = 2^{k-1}$

$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

$b_k = \frac{1}{2^{k-1}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

Geometrische Reihe. konvergent

$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

Absolute Konvergenz

Defn Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist <u>absolute konvergent</u> falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bmk Falls die Reihe der Absolutbeträge nicht konvergiert, kann sie $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)$ nur bestimmt gegen $+\infty$ divergieren, da die Summenglieder positive sind.

Satz 2.7.10. Eine absolute konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$\left(|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| \right).$$

Beweis: Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gilt nach Cauchy Kriterium:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1$ mit

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N.$$

$\Rightarrow$

Daraus folgt

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Woraus nochmals mit Cauchy Kriterium ($\Leftarrow$) die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt.

Bmk.: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent!}$$

Aber Vorsicht !!

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent}$$

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = 1 - \log 4 = -0.3862\ldots$$

oder

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} > \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \left| -\frac{\pi^2}{12} \right|.$$

Bsp. Wir werden sehen dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergent, ist aber nicht absolute konvergent

da $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| = \sum \frac{1}{k}$

divergent ist.

Diese Bsp ist ein Spezialfall Satzes von Leibniz

Bmk Die Reihe $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist die Alternierende Harmonische Reihe.

Satz 2.7.12 (Leibniz).

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone fallend mit $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ und $\lim a_n = 0$

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ und es gilt

$$a_1 - a_2 \leq S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{k+1} \leq a_1$$

Beweis Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k.$

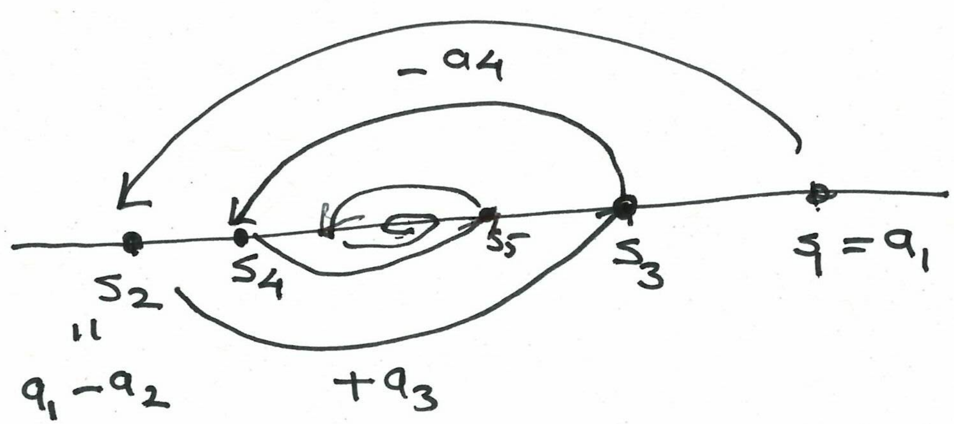
$a_n \geq 0$, $a_n \searrow$

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 - a_2$

$s_3 = a_1 - a_2 + a_3$

$\vdots$



$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{<0 \text{ da } a_n \searrow} < a_1$$

Set $S_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}$

$$= \underbrace{a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1}}_{S_{2n-1}} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

$$S_{2n-1} - (\underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{>0})$$

$$S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

$$S_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-2}}_{S_{2n-2}} + \underbrace{a_{2n-1} \mp a_{2n}}_{>0}$$

$$S_{2n}. \geq S_{2n-2}$$