1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$

(a) $\inf(]a,b]) = a$ für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$.

☑ Ja

☐ Nein

(b) Wenn $A \subset B$ und B ein Maximum besitzt, dann besitzt auch A ein Maximum.

☐ Ja

☑ Nein

Falsch: $B = [2,3]$ besitzt ein Maximum, aber $A =]2,3[$ besitzt kein Maximum.

(c) $\max\{\frac{1}{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} = 1$. Hier ist $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

☑ Ja

☐ Nein

(d) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Infimum. Dann:

☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine untere Schranke b von S, so dass $a < b < a + \epsilon$;

Falsch: a ist die Grösste der unteren Schranken: für jede untere Schranke b muss immer $a \geq b$ sein.

☐ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Minimum;

Falsch: z.B. $S = (0,1)$, $a = 0$, $S \setminus \{0\} = S$ besitzt kein Minimum.

☑ a ist das Supremum der unteren Schranken.

Richtig: es folgt aus der Definition von Infimum.

1.2. Supremum und Infimum I

Seien $A := \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ und $\inf(B)$ falls sie existieren.

Lösung: Man sieht sofort, dass 0 eine untere Schranke sowohl für A als auch für B ist. Somit existieren $\inf(A)$ und $\inf(B)$. Weder A noch B haben eine obere Schranke, weil

$$n \leq 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dies sieht man am einfachsten mittels Induktion: Offensichtlich gilt $0 \leq 1$. Nehmen wir nun an, dass $n \leq 2^n$ für alle $1 \leq n \leq k$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$, dann gilt auch

$$k + 1 \leq 2k \leq 2 \cdot 2^k \leq 2^{k+1},$$

was den Induktionsbeweis für (1) beendet. Da $\mathbb{N}$ keine obere Schranke besitzt folgt aus (1), dass auch A und B keine obere Schranken besitzen. Damit existieren weder $\sup(A)$, noch $\sup(B)$. Um $\inf(B)$ zu bestimmen bemerken wir, dass $1 \leq x$ für alle $x \in B$ und $1 \in B$. Daraus folgt, dass $\inf(B) = 1$. Wir behaupten, dass $\inf(A) = 0$. Um dies zu beweisen, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen (1) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{\epsilon} < 2^{n_0}.$$

Dies impliziert, dass $2^{-n_0} < \epsilon$. Da $2^{-n_0} \in A$ folgt, dass $\inf(A) < \epsilon$. Da auch $0 \leq \inf(A)$ und $\epsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung.

1.3. Supremum und Infimum II Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?

Lösung: Da A (bzw. B) beschränkt ist gibt es eine obere Schranke $C_A \in \mathbb{R}$ (bzw. $C_B \in \mathbb{R}$). Offensichtlich ist $C_A + C_B$ eine obere Schranke für $A + B$. Ebenso sieht man, dass $A + B$ eine untere Schranke besitzt. Damit ist $A + B$ beschränkt. Aus

$$\begin{aligned} a &\leq \sup(A) \quad \forall\, a \in A \\ b &\leq \sup(B) \quad \forall\, b \in B \end{aligned}$$

folg, dass $\sup(A) + \sup(B)$ eine obere Schranke für $A + B$ ist. Damit folgt

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu sehen, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen der Definition von sup gibt es $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, so dass

$$\begin{aligned} \sup(A) - \frac{\epsilon}{2} &\leq a_0 \\ \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} &\leq b_0. \end{aligned}$$

Damit folgt,

$$\sup(A) + \sup(B) - \epsilon = \sup(A) - \frac{\epsilon}{2} + \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} \leq a_0 + b_0 \leq \sup(A+B).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus, dass $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$. Ebenso sieht man, dass $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

1.4. Supremum und Infimum III Bestimmen Sie, falls vorhanden, das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen,

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$A_2 = \left\{ x + \frac{1}{x} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}.$$

Lösung: Das Infimum von A_1 ist 0, es existiert aber kein Minimum: Es gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Null ist eine untere Schranke von A_1. Angenommen, es gäbe eine grössere untere Schranke $\epsilon > 0$ beliebig. Setzt man $m, n > \frac{2}{\epsilon}$, dann

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

Also gibt es keine grössere untere Schranke. Wegen

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m + n = -2.$$

Das Supremum und das Maximum von A_1 ist 2.

Das Infimum und das Minimum von A_2 ist 2: Es gilt:

$$2 \leq x + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

2 ist eine untere Schranke von A_2. Wegen $2 \in A_2\,(x = 1)$ ist dies auch die grösste.

Das Supremum und das Maximum von A_2 ist $\frac{5}{2}$: Es gilt

$$x + \frac{1}{x} \leq 2.5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

1.5. Komplexe Zahlen - Wiederholung Für jede der folgenden komplexen Zahlen z, finden Sie

- ihre kartesische Form $A + iB$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihr Konjugiertes $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -\pi, \qquad z_2 = \frac{1}{i}, \qquad z_3 = \frac{1+i}{1-i},$$
$$z_4 = \frac{3}{2}i^2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_5 = -1 + i,$$
$$z_6 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad z_7 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i in dem Nenner erhalten! Z.B. $1 + i$ ist OK, $1/(1 + i)$ nicht.

Lösung: Wir betrachten $z_1 = -\pi$:

- kart. Form: wie gegeben,
- Betrag: π,
- Konjugierte: $-\pi$,
- Reziproke: $-1/\pi$.

Wir betrachten $z_2 = \frac{1}{i}$:

- kart. $-i$,
- Betrag: 1,
- Konjugierte: i,
- Reziproke: i.

Wir betrachten $z_3 = (1 + i)/(1 - i)$:

- kart. Form:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1+i}\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i,$$

- Betrag: 1,
- Konjugierte: $-i$,

- Reziproke:

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i}\frac{1}{i} = -i.$$

Wir betrachten $z_4 = \frac{3}{2}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

- kart. $z_4 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Betrag: $\sqrt{3}$,
- Konjugierte: $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
- Reziproke:

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6},$$

Wir betrachten $z_5 = -1 + i$:

- kart. Form: wie gegeben
- Betrag: $\sqrt{2}$,
- Konjugierte: $-1 - i$,
- Reziproke:

$$-\frac{1}{2} - \frac{i}{2},$$

Wir betrachten $z_6 = \cos\alpha + i\sin\alpha$:

- kart. Form: wie gegeben
- Betrag: 1,
- Konjugierte: $\cos\alpha - i\sin\alpha$,
- Reziproke: $\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$,

Wir betrachten $z_7 = \sin\alpha + i\cos\alpha$: weil

$$\sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha),$$

gilt $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha)$, also wie für z_6:

- kart. Form: $\cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha)$,

- Betrag: 1,
- Konjugierte: $\cos(\pi/2-\alpha) - i\sin(\pi/2-\alpha)$,
- Reziproke:

$$\sin(\alpha) - i\cos(\alpha).$$

.