2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der Aussagen ist richtig?

☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.
Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt und divergent.*

☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.
Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt und divergent.*

☑ Jede konvergente Folge ist beschränkt.
Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

☑ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.
Richtig. Das ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

(b) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $|c_n| = |a_n| + |b_n|$. Dann:

☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt

$$\left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| + \left|\lim_{n\to\infty} b_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} c_n\right|;$$

☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

$$\left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} c_n\right| - \left|\lim_{n\to\infty} b_n\right|;$$

☑ falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.

☐ falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen (a_n) und (b_n);

(c) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq 1$$

gilt, dann konvergiert (a_n);

☑ falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent;

☐ falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;

☑ falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a$ $\forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent.

2.2. Grenzwert Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschraňkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

(a) $a_n = \sqrt{n^2+n+5} - \sqrt{n^2+1}$;

(b) $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

(c) $c_n = \dfrac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$;

(d) $d_n = n\left(1 - \sqrt{\left(1-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)}\right)$ für $a, b > 0$;

(e) $e_n = \frac{e_{n-1}+e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0,\ e_2 = 1.$

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n^2+n+5} - \sqrt{n^2+1} &= \frac{n^2+n+5-n^2-1}{\sqrt{n^2+n+5}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n+4}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2})}+\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} \\ &= \frac{1+\frac{4}{n}}{\sqrt{(1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2})}+\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} \end{aligned}$$

Somit ist die Folge beschränkt und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n(n+1)} - n = \frac{\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right)\left(\sqrt{n(n+1)}+n\right)}{\sqrt{n(n+1)}+n} \\ &= \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \end{aligned}$$

Somit ist die Folge beschränkt und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

(c)

$$c_n = \frac{3n^4-5n^2+2}{7n^4-4n^3} \cdot \frac{1/n^4}{1/n^4} = \frac{3-5/n^2+2/n^4}{7-4/n},\ n \geq 1,$$

Also konvergiert die Folge gegen $\frac{3}{7}$ und ist beschränkt.

(d)

$$
\begin{aligned}
d_n = n\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)}\right) &= n\frac{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)}{1+\sqrt{\left(1-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)}} \\
&= n\frac{1-\left(1-\frac{b}{n}-\frac{a}{n}+\frac{ab}{n^2}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{b}{n}-\frac{a}{n}+\frac{ab}{n^2}}} \\
&= n\frac{\frac{b}{n}+\frac{a}{n}-\frac{ab}{n^2}}{1+\sqrt{1-\frac{b}{n}-\frac{a}{n}+\frac{ab}{n^2}}} \\
&= \frac{b+a-\frac{ab}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{b}{n}-\frac{a}{n}+\frac{ab}{n^2}}} \longrightarrow \frac{b+a}{2};\ n\to\infty.
\end{aligned}
$$

(e) Das Rekursionsgesetz $e_1 = 0,\ e_2 = 1,\ e_n = \frac{1}{2}(e_{n-1}+e_{n-2})$ für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ impliziert

$$
E_n := e_n - e_{n-1} = \tfrac{1}{2}(e_{n-1}+e_{n-2}) - e_{n-1} = \tfrac{1}{2}(-e_{n-1}+e_{n-2}) = -\tfrac{1}{2}E_{n-1}.
$$

Es folgt

$$
E_n = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-3}E_3 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-3}(e_3-e_2) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}.
$$

Das Folgenglied e_n für $n \geq 3$ lässt sich schreiben als Teleskopsumme

$$
\begin{aligned}
e_n &= e_2 + \sum_{k=3}^{n}(e_k - e_{k-1}) = 1 + \sum_{k=3}^{n} E_k = 1 + \sum_{k=3}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{n-2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{l} = \sum_{l=0}^{n-2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{l} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)},
\end{aligned}
$$

wobei zuletzt die Formel der geometrischen Reihe verwendet wird. Damit ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergiert gegen $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$, ist aber nicht monoton.

2.3. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv gegeben durch

$$
a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.
$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$
a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).
$$

Lösung: Es sei $\Phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $\Psi := \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Zu beweisen ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$. Man beachte, dass a_{n+2} sowohl von a_{n+1} als auch a_n abhängt. Die vollständige Induktion muss daher bei $n = 1$ und $n = 2$ verankert werden und der Induktionsschritt schliesst von n und $n+1$ auf $n+2$.

Verankerung. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = a_1, \\
\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right) = 1 = a_2.
\end{aligned}$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \geq 1$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \Psi^n\Big), \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\Big).$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Behauptung für $n+2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \Psi^n\Big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\Big) && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n(1+\Phi) - \Psi^n(1+\Psi)\Big).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, falls $(1+\Phi) = \Phi^2$ und $(1+\Psi) = \Psi^2$ gilt. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi + 1, \\
\Psi^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \Psi + 1.
\end{aligned}$$

Somit ist wie behauptet $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2})$.

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung: Aus der expliziten Formel bewiesen in der vorherigen Aufgabe folgt, dass für jedes $m \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
|b_m - \Phi| = \left|\frac{a_{m+1}}{a_m} - \Phi\right| &= \left|\frac{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} - \Phi\right| \\
&= \left|\frac{\Phi\Psi^m - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m}\right| = \left|\frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{|\frac{\Phi}{\Psi}|^m - 1},
\end{aligned}$$

wobei $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\left|(\frac{\Phi}{\Psi})^m - 1\right| \geq |\frac{\Phi}{\Psi}|^m - 1$ verwendet wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann folgt aus der vorherigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| < \varepsilon \;&\Leftarrow\; \sqrt{5} < \varepsilon\Big(|\tfrac{\Phi}{\Psi}|^m - 1\Big) \\ &\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1 < |\tfrac{\Phi}{\Psi}|^m \\ &\Leftrightarrow\; \log\Big(\tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big) < m \log|\tfrac{\Phi}{\Psi}| \\ &\Leftrightarrow\; m > \frac{\log\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} =: N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es sei $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(\varepsilon)$ aufgerundet. Somit existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass $|b_m - \Phi| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq n(\varepsilon)$ folgt. Das heisst nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Φ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \geq 1$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N},\; m \geq n : \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

Lösung: Gesucht ist die Zahl $n(\varepsilon)$ aus Teilaufgabe (b) für $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Also berechnen wir

$$N(\tfrac{1}{100}) = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|} \approx 5.625746.$$

Es folgt $n(\frac{1}{100}) = 6$, das heisst für alle natürlichen Zahlen $m \geq 6$ gilt $|b_m - \Phi| < \frac{1}{100}$.

2.4. Monotone Zahlenfolge (schriftlich) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $0 \leq a_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist Nullfolge.

Lösung:

(a) Wir beweisen die erste Aussage mit vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ist für beide Ungleichungen erfüllt. Sei also $a_n \geq 0$, dann ist offensichtlich auch $a_{n+1} \geq 0$. Für die andere Ungleichung sei

$$a_n \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}} \leq a_n \leq 1.$$

(b) Aus der gerade bewiesenen Ungleichung folgt sofort, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}} \leq \frac{a_n}{2} \\ \Rightarrow a_n &\leq \frac{a_{n-1}}{2} \leq \frac{a_{n-2}}{4} \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{n\to\infty} 2^{-(n-1)} = 0$ und $a_n \geq 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.