3.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 3 + \sqrt{\frac{2k}{3k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0 \\ \frac{3k^2+5}{k^2+2} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0 \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0\,. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.
  Falsch. Die Teilfolge $(a_{3k+1})_k$ *konvergiert gegen* $3 + \sqrt{2/3}$*, die Teilfolge* $(a_{3k+2})_k$ *gegen* 3 *und die Teilfolge* $(a_{3k})_k$ *gegen* 0*. Es folgt, dass* $(a_n)_n$ *nicht konvergiert.*

- ☑ $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.
  Richtig. Die Folge $(a_n)_n$ *hat untere Schranke* -1*. Also existiert der Limes inferior von* $(a_n)_n$*.*

- ☑ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 3 + \sqrt{2/3}$
  Richtig. Wie oben bemerkt, ist $\{3 + \sqrt{2/3}, 3, 0\}$ *die Menge der Häufungspunkte der Folge* $(a_n)_n$*. Der grösste Häufungspunkt* $3 + \sqrt{2/3}$ *ist der Limes superior.*

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☑ Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \in \mathbb{R}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.
  Richtig. Da $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$ *ist, folgt*

  $$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |\alpha - a_{2n}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

  Analog impliziert $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$

  $$\forall \epsilon > 0\ \exists m_\epsilon : |\alpha - a_{2n+1}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon.$$

  Sei $p_\epsilon := 2 \cdot \max(n_\epsilon, m_\epsilon) + 1$*. Dann gilt* $\forall \epsilon > 0 : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq p_\epsilon$*. Somit folgt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$*.*

- ☑ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \geq 1$.
  Richtig. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ *der Grenzwert der Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$*. Es gilt*

  $$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

  Wir definieren $m_\epsilon = \max(\{k : \sigma(k) \leq n_\epsilon\})$*. Es ist* $m_\epsilon < \infty$*, weil* $n_\epsilon < \infty$ *und* σ *eine Bijektion ist. Dann gilt* $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon$*. Somit folgt* $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$*.*

(c) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;
Falsch. Zum Beispiel ist $x_n = 1/n$ Cauchy (weil konvergent), aber wie bekannt ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.

☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;
Falsch. Jede Cauchy-Folge ist konvergent, nicht notwendigerweise mit Grenzwert 0.

☑ ist x_n beschränkt.
Richtig. Jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt.

3.2. Grenzwert Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n+10}{2^n-1}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}-2}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

Solution:

(a) Behauptung: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$

Beweis: Es ist $b_n := \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{2n+1} \leq c_n := \sqrt[n]{4n}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $b_n \to 1$ für $n \to \infty$. Wir zeigen nun, dass auch c_n gegen 1 konvergiert, dies zeigt dann, dass auch die ursprüngliche Folge gegen 1 konvergiert.
Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{4} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1 \cdot 1 = 1$$

(b) Es gilt

$$\frac{(-3)^n + 10}{2^n - 1} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1 + 10 \cdot (-3)^{-n}}{1 - 2^{-n}}$$

Während der zweite Bruch gegen 1 konvergiert, hat der Faktor $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ein alternierendes Vorzeichen und der Betrag geht gegen unendlich. Damit divergiert die Folge, der Limes existiert nicht.

(c) $\frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}-2} = \frac{3}{-3} = -1$ für n gerade. $\frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}-2} = \frac{1}{-1} = -1$ für n ungerade. Die Folge ist also konstant -1, und damit ist der Grenzwert -1.

(d) Wir können der n-ten Term der Folge schreiben als

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Wir wissen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \mathrm{e},$$

weil $\lim_n (1+1/n)^n = \mathrm{e}$ und $n \mapsto (1+1/n^2)^{n^2}$ eine Teilfolge von $n \mapsto (1+1/n)^n$ ist. Da $\mathrm{e} > 1$ und $1/n$ nach 0 strebt, schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{1/n} = 1.$$

3.3. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

Lösung: $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition eine Cauchy-Folge, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Es genügt *nicht*, dass $|q_n - q_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

$$q_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = |-\frac{1}{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

3.4. Konvergenz von Zahlenfolgen Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch

$$a_1 = \frac{4}{25}, \quad a_n = a_0 + a_{n-1}^2.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Beweisen Sie (induktiv) $0 < a_n < \frac{1}{5}$ und $a_{n+1} - a_n > 0$.

Lösung: Wir gehen nach dem Hinweis vor und beweisen zunächst induktiv: $\forall\, n \geq 1, 0 < a_n < \frac{1}{5}$ und $a_{n+1} - a_n > 0$.
$n = 1$: Die Beschränktheit ist klar.
$n \to n+1$: Es gilt $a_n < \frac{1}{5}$ und

$$a_n = a_0 + a_{n-1}^2 < \frac{4}{25} + \frac{1}{25} = \frac{1}{5}.$$

Darüberhinaus folgt aus der Induktionsvoraussetzung $a_{n+1} - a_n > 0$, dass $a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$, und man erhält:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{25} + a_n^2 - a_n = \frac{4}{25} + a_n^2 - \left(\frac{4}{25} + a_{n-1}^2\right) > 0.$$

Insgesamt ist $(a_n)_{n\geq 1}$ also eine beschr ankte, streng monoton wachsende Folge und es existiert daher $a := \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert muss wegen

$$a = a_0 + a^2 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{5} \text{ oder } \frac{4}{5}.$$

Wegen $0 < a_n < \frac{1}{5}$ ist auch $a \leq \frac{1}{5}$, und es folgt also $a = \frac{1}{5}$,