4.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ Falls $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \geq 1$, so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon\ \forall\, n \geq N$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
- ☑ Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so folgt: $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \geq 1$ so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon$ $\forall\, n \geq N$.
- ☐ Falls $\sum_{k=1}^{\infty} \sin a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(b) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}:\ a_k \leq 0$. Die Reihe konvergiert...

- ☑ ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.
- ☐ ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.
- ☐ ..., falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

  Hier ist die Folge der Partialsummen monoton fallend. Ist sie zusätzlich noch nach unten beschränkt, dann ist sie konvergent.

(c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

  Falsch: Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + \ldots$$

  konvergent aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + \ldots$$

  nicht konvergent

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

  Falsch: Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + \ldots$$

konvergent aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

nicht konvergent

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Falsch: Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

absolut konvergent aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + ...$$

nicht konvergent

☑ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Richtig: Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergent Reihe ist auch absolut konvergent.

4.2. Grenzwert Beweise: Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}, \quad n \geq 1,$$

ist konvergent. Bestimme den Grenzwert.
Hinweis: Zeige zuerst, dass die Folge monoton wächst und durch $c = 2$ beschränkt ist.

Solution:

Behauptung 1: $a_n \leq 2 \qquad \forall n \geq 1$

Beweis durch Induktion:
$n = 1$: Ist ok, da $a_1 = 1 \leq 2$.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$:
Nach Induktionsannahme: $a_n \leq 2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + 2} < 2$.
Dies zeigt Behauptung 1.

Behauptung 2: (a_n) ist monoton wachsend, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis durch Induktion:

Verankerung: $a_1 = 1 \leq \sqrt{1+1} = a_2$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
Da nach Induktionsannahme ist $a_n \leq a_{n+1}$, damit folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Dies zeigt Behauptung 2.
Weil jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge konvergent ist, konvergiert $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Nun müssen wir a noch bestimmen.

Der Grenzwert a der Folge muss unter der Rekursionsvorschrift fest bleiben, d.h.

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Somit gilt $a^2 = a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ muss auch der Grenzwert $a \geq 0$ sein und damit ist

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(Dies ist der einzige mögliche Kandidat und wir wissen schon das ein Grenzwert existiert, also muss es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sein.)

4.3. Reihe I Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{1/n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^7+n^4-1}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-k}$. (Berechne zusätzlich den Wert der Reihe)

Begründe deine Antwort!

Solution:

(a) $a_n = (-1)^n n^{1/n}$ ist keine Nullfolge, da $|a_n| \geq 1 \ \forall n \geq 1$. Somit ist die Reihe divergent.

(b)

$$a_n = \frac{(n+1)^{1/2}}{(n^7+n^4-1)^{1/3}} \leq \frac{(n+1)^{1/2}}{n^{7/3}} \leq \frac{2n^{1/2}}{n^{7/3}} = 2\frac{1}{n^{11/6}}$$

Weil die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{11/6}}$ konvergent ist, folgt mit dem Majoranten-Kriterium, dass die Reihe konvergiert.

(c) Da $\frac{1}{k^2-k} < \frac{1}{(k-1)^2}$ folgt mit dem Majoranten-Kriterium dass die Reihe konvergiert. Für den Wert der Reihe betrachten wir die Teilsummenfolge s_n und benutzen, dass $a_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

wobei wir eine Indexverschiebung $l = k-1$ für die erste Summe verwendet haben. Damit gilt $s_n \to 1$, d.h. der Wert der Summe ist 1. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert, ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} \neq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, denn die Differenz $\infty - \infty$ ist nicht definiert. Man muss die Teilsummenfolge betrachten!

4.4. Reihe II Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen so dass

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

Folgt daraus, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(a_k)$$

konvergiert? Falls ja, muss die Aussage bewiesen werden. Falls nein, muss ein begründetes Beispiel gegeben werden.

Solution:

Weil $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Dann $(b_k)_{k\geq 1}$ ist beschränkt.

Behauptung 1: $|\sin(x)| \leq |x|$.

Dann $|b_n \sin(a_n)| \leq C|a_n|$. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(a_k)$ konvergiert absolut.

Beweis (Behauptung 1):

$f(x) = x - \sin(x), x \geq 0$. Dann $f'(x) := 1 - \cos(x) \geq 0$.

Weil $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$. Dann $|\sin(x)| \leq |x|$ ist einfach.