5.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.

☑ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

Solution:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{1-1/n} &= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{-1/n} \\
&= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}
\end{aligned}$$

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☑ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☑ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

Solution: (a_k) und (b_k) sind beschränkt. Dann $\exists\ C > 0$, $|a_k| + |b_k| < C$ und

$$|a_k|^2 < C|a_k|, \quad |a_k b_k| < C|a_k|.$$

(c) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☑ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

Solution:

a) $a_k = b_k = 1$, dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ divergiert.

b) $a_k = b_k = 1/n$, dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert absolut.

c) $a_k = 1/n$, $b_k = (-1)^k$ dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

5.2. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (e).

Solution: Wir bezeichnen mit a_n das Glied jeder Folge.

(a) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{((n+1)n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+1)},$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4 < 1$. Damit schliessen wir, das die Reihe absolut konvergent ist.

(b) Die Reihe ist einfach die harmonische Reihe ohne die ersten 100 Glieder, ist also divergent.

(c) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{5}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 5/n = 0 < 1$, also ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

also muss die Reihe divergent sein (Bemerkung 3.7.1).

(e) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz, und wir bemerken, dass diese Reihe ähnlich wie die Teleskopsumme ist. Wir suchen zuerst a und b so dass

$$\frac{1}{n(n+4)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+4}.$$

Wir sehen, dass

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+4} = \frac{(a-b)n + 4a}{n(n+4)},$$

also finden wir $a = b = 1/4$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots\right).$$

Also folgern wir, wie für die Teleskopsumme, dass die Partialsummen die Form

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right)$$

haben. Somit schliessen wir, dass die Reihe absolut konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$$

ist.

5.3. Reihe I

(a) Es seien $\alpha, \beta \geq 0$ reelle Zahlen. Berechne den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n} z^n.$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2} x^n \ ?$$

Verwende das Wurzelkriterium.

Solution:

(a) <u>1. Methode:</u> Der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n} z^n$$

berechnet sich, falls der Grenzwert existiert, mit dem Quotientenkriterium als

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}} \right) \left(\frac{1+\beta^{n+1}}{1+\beta^n} \right).$$

Falls die Grenzwerte der beiden Faktoren, d.h. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}}\right)$ und $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\beta^{n+1}}{1+\beta^n}\right)$ existieren, können wir die Produktregel für Grenzwerte anwenden und es gilt

$$\rho = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}} \right] \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1+\beta^{n+1}}{1+\beta^n} \right].$$

Der Wert dieser Grenzwerte hängt von α und β ab.
Entscheidend ist, welcher der Summanden im Zähler (bzw. Nenner) grösser ist.
Falls $\alpha > 1$ so klammern wir den Faktor α^n und kürzen:

$$\frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}} = \frac{\alpha^{-n}+1}{\alpha^{-n}+\alpha} \to \frac{1}{\alpha}$$

Falls $0 < \alpha < 1$, so konvergieren die Terme α^n und α^{n+1} gegen Null und der Grenzwert ist 1.
Schliesslich ist für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ die Folge konstant 1.
Somit konvergiert die Folge $\frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}}$ für alle $\alpha \geq 0$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \leq 1 \\ 1/\alpha & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}$$

Analog erhält man dass auch der andere Faktor immer konvergiert und zwar mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\beta^{n+1}}{1+\beta^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } \beta \leq 1 \\ \beta & \text{für } \beta > 1. \end{cases}$$

(Am Einfachsten: $\frac{1+\beta^{n+1}}{1+\beta^n} = \frac{1}{\frac{1+\beta^n}{1+\beta^{n+1}}}$ und dann das Resultat von oben verwenden)
Damit erhalten wir den Konvergenzradius

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha, \beta \leq 1 \\ \beta & \text{für } \alpha \leq 1 < \beta \\ 1/\alpha & \text{für } \beta \leq 1 < \alpha \\ \beta/\alpha & \text{für } 1 < \alpha, \beta. \end{cases}$$

<u>2. Methode:</u> Wir berechnen den Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium. Es ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}}$ also gilt für den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+\beta^n}{1+\alpha^n}}\ .$$

Falls die Grenzwerte der beiden Faktoren, d.h. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n}$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\beta^n}$ existieren und falls zusätzlich $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n} \neq 0$ und $\sqrt[n]{1+\alpha^n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, können wir die Produktregel für Grenzwerte anwenden und es gilt

$$\rho = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\beta^n}\right] / \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n}\right]\ .$$

Die Bedingungen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n} \neq 0$ und $\sqrt[n]{1+\alpha^n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgen direkt aus der Tatsache, dass $1+\alpha^n \geq 1$ für $\alpha \geq 0$.
Falls $\alpha > 1$ so klammern wir den Faktor α^n und kürzen:

$$\sqrt[n]{1+\alpha^n} = \sqrt[n]{\alpha^n(\alpha^{-n}+1)} = \alpha \sqrt[n]{\alpha^{-n}+1} \to \alpha\ .$$

Falls $0 < \alpha < 1$, so konvergieren den Term α^n gegen Null und der Grenzwert ist 1.
Falls $\alpha = 1$ folgt $\sqrt[n]{1+\alpha^n} = \sqrt[n]{2}$, die offensichtlich gegen 1 konvergiert. Schliesslich ist für $\alpha = 0$ die Folge konstant 1.
Somit konvergiert die Folge $\sqrt[n]{1+\alpha^n}$ für alle $\alpha \geq 0$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\alpha^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \leq 1 \\ \alpha & \text{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

Analog erhält man dass auch der andere Faktor immer konvergiert und zwar mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\beta^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } \beta \leq 1 \\ \beta & \text{für } \beta > 1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Konvergenzradius

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha, \beta \leq 1 \\ \beta & \text{für } \alpha \leq 1 < \beta \\ 1/\alpha & \text{für } \beta \leq 1 < \alpha \\ \beta/\alpha & \text{für } 1 < \alpha, \beta. \end{cases}$$

(b) Wir berechnen zuerst den Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium:
Es ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n+1}} \to 3$ also gilt für den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3}.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe falls $|x| < \frac{1}{3}$ und divergiert falls $|x| > \frac{1}{3}$.
Wir müssen noch den Fall $|x| = \rho = \frac{1}{3}$ betrachten (Rand des Konvergenzkreises):
Für $x = \frac{1}{3}$ wird die Reihe zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$

Diese Reihe konvergiert (alternierende harmonischen Reihe).
Für $x = -\frac{1}{3}$ wird die Reihe zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Diese Reihe divergiert (harmonischen Reihe).
Insgesamt konvergiert die Potenzreihe für

$$x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

5.4. Reihen II

Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Solution: Die Reihe ist eine Teleskop-Summe: Seine Partialsumme kann als

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{k} \log n - \log(n+1) = \log 1 - \log(k+1)$$

geschrieben werden. Somit sehen wir, dass $\lim_{k\to\infty} s_k = -\lim_{k\to\infty} \log(k+1) = -\infty$, daraus folgern wir, dass die Reihe divergent ist.