6.1. Reihen reellen Zahlen Bestimme den Konvergenzbereich der folgenden Reihen (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ so dass die Reihe konvergiert). Begründe deine Antwort!!

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{2nx}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$ wobei $x \neq 1$.

Solution:

(a) Das ist eine Potenzreihe, daher berechnen wir den Konvergenzradius ρ mit dem Quotientenkriterium:
$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Somit konvergiert die Reihe nur für $x = 0$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (2e^{2x})^n$ konvergiert, falls

$$|2e^{2x}| = 2e^{2x} < 1 \Leftrightarrow x < -\frac{\ln(2)}{2}.$$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^n$ konvergiert, falls

$$\left|\frac{x}{(1-x)^2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < (1-x)^2.$$

Falls $x \geq 0$ ist die Bedingung $x < (1-x)^2$. Es gilt

$$x = (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0,$$

ausserdem ist z.B. für $x = 10$ sicher $x = 10 < 81 = (1-x)^2$, so dass für alle $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ die Ungleichung $x < (1-x)^2$ gilt.
Analog gilt die Gleichung auch für $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Falls $x \leq 0$ dann lautet die Bedingung $-x < (1-x)^2 \Leftrightarrow 0 < 1 - x + x^2$ was offensichtlich für alle $x \leq 0$ gilt.
Die Reihe konvergiert also falls $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

6.2. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Die Aufrundungsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ ist im Punkt $x = 2$

☐ stetig.

☑ unstetig.

☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

Solution: $\epsilon = 1/2$. Dann $\nexists\ \delta > 0$ mit $|\lceil x \rceil - 2| < 1/2\ \forall x \in (2-\delta, 2+\delta)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = \pi$? dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

☑ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$;

Solution: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist an der Stelle 2 beschränkt und stetig, also existiert $\lim_{x\to 2} f(x)/x$ genau dann, wenn $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert, und muss

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{2}$$

sein.

☐ Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$;

☐ $\lim_{n\to\infty} f(2 - 1/n) = \pi$.

Solution: das meint nur, dass für die Folge $x_n = 2 - 1/n$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt; die Definition von Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

6.3. Stetigkeit I

Es sei $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Zu jedem $\epsilon > 0$ ist ein $\delta(\epsilon) > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

folgt.

Solution: Da

$$\left|\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4}\right| = \frac{|x+y|}{(x^2+4)(y^2+4)}|x-y|,$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{|x+y|}{(x^2+4)(y^2+4)} &\leq \frac{|x|+|y|}{(x^2+4)(y^2+4)} \\
&= \frac{|x|}{(x^2+4)(y^2+4)} + \frac{|y|}{(x^2+4)(y^2+4)} \\
&\leq \frac{1}{y^2+4} \cdot \frac{1}{|x| + \frac{4}{|x|}} + \frac{1}{x^2+4} \cdot \frac{1}{|y| + \frac{4}{|y|}} \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y^2+4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+4} \\
&\leq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Gilt dass

$$\left| \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4} \right| \leq \frac{|x-y|}{8},$$

und somit ist $\delta(\epsilon) = 8\epsilon$.

6.4. Zwischenwertsatz

(a) Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0,1]$ derart, dass $f(x) = x$ gilt.

(b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zeigen sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ existiert, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Solution:

(a) Betrachten Sie die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Es gilt

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0,$$

d.h. ein Punkt x is genau dann ein Fixpunkt von f wenn er eine Nullstelle von g ist.
Wir müssen daher zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ besitzt.
Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig.
Weil ausserdem $f(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, ist

$$g(0) \geq 0 \geq g(1),$$

denn $g(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$.
Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und somit $f(x) = x$.

(b) Betrachte die stetige Funktion $g : [0, \frac{n-1}{n}] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. Wir müssen daher zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ besitzt. Wir zeigen diese Behauptung indirekt.
Nehmen wir an, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x + \frac{1}{n}) < f(x) \qquad \text{für alle } x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ und wenden wir die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) > f(\frac{1}{n}) > f(\frac{2}{n}) > \cdots > f(\frac{n-1}{n}) > f(1) = 0 \ ,$$

das zu einen Widerspruch führt.
Analog falls $g(x) < 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x) < f(x + \frac{1}{n}) \qquad \text{für alle } x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ und wenden wir die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) < f(\frac{1}{n}) < f(\frac{2}{n}) < \cdots < f(\frac{n-1}{n}) < f(1) = 0 \ ,$$

das zu einen Widerspruch führt.
Somit besitzt g eine Nullstelle auf dem Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert unsere Behauptung.