7.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? In allen Fällen seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Falsch. Ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit der Aussage liefert die Einschränkung von sin *auf das Intervall* $[0, 3\pi]$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.
Falsch. Die konstante Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, *ist ein Gegenbeispiel.*

☑ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a, b) genau eine Nullstelle.
Richtig. Der Zwischenwertsatz garantiert die Existenz einer Nullstelle, und aufgrund der strengen Monotonie kann es höchstens eine geben.

(b) Sei $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ eine stetig monoton steigende Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(3)$ an

☑ Falsch.

☐ Wahr.

Solution: Die Aussage ist falsch. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f(x) = x$. *Sie ist stetig und monoton steigend, aber* $f([0, 1] \cup [2, 3])$ *nimmt nicht alle Werte zwischen* $f(0)$ *und* $f(3)$ *an. Dies folgt zum Beispiel aus der Beobachtung dass* $f([0, 1] \cup [2, 3]) = f([0, 1]) \cup f([2, 3]) = [f(0), f(1)] \cup [f(2), f(3)]$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f Maximum und Minimum an.

☐ Wahr.

☑ Falsch.

Solution: Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: nehme die Funktion $\tanh(x), x \geq 0$, *dann erfühlt* $\tanh(x)$ *die Bedingungen, aber der Wert 1 wird nie angenommen.*

7.2. Zwischenwertsatz Zeige, dass die folgende Funktion bijektiv ist

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \,.$$

Hinweis: Zwischenwertsatz, Monotonie.

Solution: Zu zeigen: Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist bijektiv.

Wir wissen: Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, wieder stetig. Darum ist die Funktion $f(x)$ auf $(-1, 1)$ stetig. Und

$$\begin{aligned} \forall\, A > 0,\ x > \sqrt{\frac{A^2}{1+A^2}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > A, \\ \forall\, A > 0,\ x < -\sqrt{\frac{A^2}{1+A^2}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < -A. \end{aligned}$$

Insbesondere nimmt f für jede gegebene Zahl c sowohl Werte $> c$ als auch Werte $< c$ an. Aus der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass f auch den Wert c selbst annimmt. Somit nimmt f jedes $c \in \mathbb{R}$ als Wert an, das heisst, f ist surjektiv.

Andererseits gilt

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

für $0 < x < 1$. In diesem Bereich ist die Funktion
$x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto f(x)$ streng monoton wachsend.
Ausserdem gilt in diesem Bereich $f(x) > 0 = f(0)$. Somit ist f streng monoton wachsend für $0 \leq x < 1$. Wegen $f(-x) = -f(x)$ folgt, dass f auch auf dem Bereich $-1 < x \leq 0$ streng monoton wachsend ist. Also ist f insgesamt streng monoton wachsend und daher injektiv.

Somit ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

7.3. Exponentialfunktion I Zeigen Sie:

(a) Sei $q \in \mathbb{N}$. $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_0 > 0$ mit: $e^x > nx^q$ für alle $x > x_0$;

(b) Sei $q \in \mathbb{N}$. $q!e^{-1} \notin \mathbb{Z}$;

(c) $e \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Zeigen Sie:

$$q!e^{-1} = \sum_{n=0}^{q} \frac{(-1)^n q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!}$$

und

$$0 < \Big| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} \Big| < 1$$

Solution:

(a) Wir haben

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!} \quad \forall\, x > 0.$$

Wähle $x > (q+1)!n$. Dann gilt

$$\frac{e^x}{x^q} > \frac{x}{(q+1)!} > n \quad \Rightarrow \quad e^x > nx^q$$

(b) Für jedes feste $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} \Big| \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} & \\
&= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} + \dots \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{1}{q} \leq 1.
\end{aligned}$$

Wenn $q = 2k+1, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} &= \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} - \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} + \dots \\
&= \Big(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} \Big) + \Big(\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \\
&\quad - \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} \Big) + \dots \\
&> 0
\end{aligned}$$

Wenn $q = 2k, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} &= -\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} - \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} + \dots \\
&= \Big(-\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \Big) + \Big(-\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \\
&\quad + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} \Big) + \dots \\
&< 0
\end{aligned}$$

Dann

$$0 < \left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} \right| < 1$$

Für jedes feste $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$, gilt

$$q! e^{-1} = \sum_{n=0}^{q} \frac{(-1)^n q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!}$$

wobei die vordere Summe eine ganze darstellt, und $0 < \left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} \right| < 1$. Somit ist $q!e^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

(c) Da oben gezeigt, dass $q!e^{-1} \notin \mathbb{Z}$ für alle $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$, kann e^{-1} nicht rational sein. Somit kann auch e nicht rational sein.

7.4. Exponentialfunktion II

(a) Zeigen Sie: $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall\, x \in (-1, 1)$.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig.
Hinweis: Benutzen, dass $\exp(y) \leq \frac{1}{1-y}$ für alle $y \leq 0$ gilt.

Solution:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(a) Um die linke Ungleichung zu beweisen, unterscheidet man zwei Fälle.
Fall 1: $x \geq 0$. In diesem Fall ist der Rest der Reihe offensichtlich grösser als oder gleich null.
Fall 1: $x < 0$. In diesem Fall kann man den Rest der Reihe als alternierende Reihe schreiben

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n!}.$$

Bezeichnet man die Absolutbeträge der Glieder der Reihe mit $a_n(x)$, so erhält man für $|x| < 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1} < 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0.$$

Die Reihenglieder bilden also eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium besitzt dann der Rest der Exponentialreihe dasselbe Vorzeichen wie sein erster Summand, d. h. die Ungleichung ist auch für $x \in (-1, 0)$ erfüllt.

Für den Beweis der rechten Ungleichung verwendet man die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die linke Ungleichung. Für $y \in (-1, 1)$ gilt dann

$$1 + y \leq e^y \to e^{-y} \leq \frac{1}{1+y}.$$

Ersetzt man hier y durch $-x$, so erhält man die gewünschte Abschätzung nach oben. Die Gleichheit gilt jedoch anhand der obigen Ausführungen nur für $x = 0$.

(b) Für $x > 0$ ist die Funktion stetig, da sowohl $\frac{1}{x}$ als auch $\exp(-\frac{1}{x^2})$ stetig sind. Wir haben also noch die Stelle $x = 0$ genauer zu untersuchen. Es ist $f(0) = 0$ und für $x \in (0, 1)$ gilt nach dem Hinweis

$$0 < f(x) = \frac{1}{x}\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x}{1+x^2} \to 0 (x \to 0).$$

Also ist $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$. Damit haben wir Stetigkeit auch an der Stelle $x_0 = 0$ nachgewiesen.