9.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Definiere für $x > 0$

$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} \Big(\min\{x, x^{-1}\}\Big)^k.$$

Dann

☐ f ist stetig und differenzierbar

☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig

☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar

☑ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

Solution: $f(1) = 1$ und $f(x) = 0$, wenn $x \neq 1$.

(b) Falls f differenzierbar ist, so ist $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ auch differenzierbar.

☑ Wahr

☐ Falsch

Solution: $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist differenzierbar.

(c) Sei $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, dann ist f im Nullpunkt x

☐ f ist stetig und differenzierbar

☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig

☑ f ist stetig, aber nicht differenzierbar

☐ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

Solution: Wir berechnen

$$\liminf_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \liminf_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

und

$$\limsup_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \limsup_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

und der letzte Grenzwerte existiert nicht da die Funktion oszilliert. Also ist die Funktion im Punkt 0 nicht differenzierbar. Nun überprüfen wir die Stetigkeit der Funktion, dafür sei ϵ und $|x-0|<\delta$, wobei wir $\delta=\epsilon$ wählen. Dann ist

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \leq \delta = \epsilon,$$

also ist die Funktion stetig im Punkt 0.

9.2. Ableitung I

(a) Definiere für $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen dieser Funktionen gilt

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \text{und} \qquad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

(b) Definiere $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\tanh'(x) = 1 - \tanh(x)^2$ gilt. Folgern Sie, dass $\tanh(x)$ eine streng monoton wachsende und bijektive Funktion ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Umkehrfunktion $\tanh^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{1-y^2}$$

gegeben ist.

Solution:

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Ableitung, dass $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ gilt. (Dabei ist $\frac{d}{dx}f(x)$ lediglich eine andere Notation für $f'(x)$). Mit der Kettenregel folgt sofort $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$ und wir erhalten

$$\sinh'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

sowie

$$\cosh'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

(b) Wir berechnen mit der Quotientenregel für die Aleitung

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh(x)\sinh'(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x).$$

Aus der expliziten Formel

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

sieht man leicht, dass $|\tanh(x)| < 1$ gilt. Daraus folgt $\tanh'(x) = 1-\tanh^2(x) > 0$ und somit ist $\tanh(x)$ streng monoton wachsend. Aus

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1$$

folgt nun, dass $\tanh(x)$ genau die Werte in $(-1, 1)$ annimmt und somit als Abbildung $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv ist.

(c) Mit einem Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen aus der Vorlesung folgt, dass $\tanh^{-1}(y)$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(y))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\tanh^{-1}(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$

9.3. Ableitung II Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^{-x}$

(b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \cos\left(x^{-x}\right).$

Tipp: *Der Ausdruck x^{-x} ist definiert als $x^{-x} := e^{-x\log(x)}$.*

Solution:

(a) Wir berechnen mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x\log(x)}\right) = e^{-x\log(x)}\frac{d}{dx}\left(-x\log(x)\right) = x^{-x}(-\log(x) - 1).$$

(b) Mit der Kettenregel und dem Ergebnis aus Teil (a) folgt:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x^{-x})\right) = -\sin(x^{-x})\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right) = \sin(x^{-x})x^{-x}(\log(x) + 1)$$

9.4. Definiere

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) f ist differenzierbar.

(b) f' ist beschränkt und unstetig.

(c) $f'(0) = 1$, aber f ist auf keinem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, monoton wachsend.

Solution:

(a) Für $t \neq 0$ können wir f mit der Kettenregel ableiten und erhalten

$$f'(t) = 1 + 4t \sin\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{-1}{t^2} = 1 + 4t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

In $t = 0$ berechnen wir die Ableitung direkt mit dem Differenzialquotienten

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \left(1 + 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 1.$$

Der Grenzwert folgt, da $|t \sin\left(\frac{1}{t}\right)| \leq |t|$ gegen 0 konvergiert. Also gilt

$$f'(t) = \begin{cases} 1 + 4t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}.$$

(b) Aus $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ erhalten wir für $t \in (-1,1)$ die Abschätzung

$$|f'(t)| \leq 1 + 4|t| + 2 \leq 7$$

und somit ist f' beschränkt. Andererseits ist f' unstetig in 0. Wir zeigen dies mit dem Folgenkriterium und betrachten die Folge $t_k = \frac{1}{2\pi k}$, welche gegen 0 konvergiert. Dann gilt $f'(t_k) = -1$ für alle k und folglich kann $f'(t_k)$ nicht gegen $f'(0) = 1$ konvergieren.

(c) Wir haben bereits in (a) gesehen, dass $f'(0) = 1$ gilt. In (b) haben wir eine Folge $t_k \to 0$ angegeben für die $f'(t_k) = -1 < 0$ gilt. Betrachte nun zusätzlich die Folge $\tilde{t}_k := \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Die Folge $\tilde{t}_k$ konvergiert ebenfalls gegen 0 und erfüllt $f'(\tilde{t}_k) = 3$. Wir sehen also, dass f' in jedem (beliebig kleinen) Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ positive und negative Werte annimmt. Insbesondere kann f auf keinem solchen Intervall monoton sein (vgl. die Lösung zu Aufgabe 4).