10.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien $a < b$ relle Zahlen, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkt Funktion mit $f(a) < f(b)$. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ Falls es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$, ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = c$, so folgt, dass f stetig ist.
- ☐ Falls $g \circ f$ und g differenzierbar sind, so folgt, dass f differenzierbar ist.
- ☑ Falls f differenzierbar ist, gibt es $x_0 \in [a, b]$ so, dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

Solution: $a = -1$, $b = 1$, $f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ -x - 1, & x \in [-1, 0[\end{cases}$, dann f ist unstetig.
$g(x) = 0, x \in [-1, 1]$. Dann $g \circ f$ und g sind differenzierbar.
Sei

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

dann $h(a) = h(b) = 0$. Benutzen Satz 4.3.2, (professor Marc Burger, Analysis I, D-INFK).

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Falls für jede in $]a, b[$ konvergierende Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ die Folge $(f(x_n))_{n \geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$ gilt, dann ist f is stetig in $]a, b[$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Falls $|f|$ stetig ist, so ist auch f stetig.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Falls f^2 und f^3 in $]a, b[$ differenzierbar sind und $f(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, b[$ so folgt, dass f in $]a, b[$ differenzierbar ist.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) Falls f in $]a,b[$ zweimal differenzierbar ist und $f''(x) > 0\ \forall x \in\ ]a,b[$, dann ist f streng konvex.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) Falls f in $x_0 \in\ ]a,b[$ differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$, dann besitzt f ein lokales Extremum in x_0.

(A) wahr.

(B) falsch.

Solution: ABAAB.
(ii) $a = -1$, $b = 1$, $f(x) := \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1] \\ -x-1, & x \in [-1,0[\end{cases}$, dann f ist unstetig und $|f|$ ist stetig.
(iii) Falls $f(x) \neq 0$, so $f^2 > 0$. Dann $f = \frac{f^3}{f^2}$ ist differenzierbar.
(v) $f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ -x^2, & x \in [-1,0[\end{cases}$, dann f ist differenzierbar, aber f besitzt kein lokales Extremum in x_0

10.2. Ableitung III Diskutieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + \arctan(e^x)$$

im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, Konvexität und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Solution: Aus der Stetigkeit von $\log(x)$ und $\arctan(x)$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}\log(1) + \arctan(0) = 0$$

und, da $f(x) \geq \log(e^{2x}) = 2x$ gilt, strebt $f(x)$ gegen $+\infty$ für $x \to \infty$.

Die erste Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} + \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}.$$

Insbesondere sehen wir, dass $f'(x) > 0$ für alle x gilt. Damit ist f streng monoton wachsend und besitzt keine Extremalstellen.

Die zweite Ableitung ergibt sich mit der Quotientenregel als

$$f''(x) = \frac{(2e^{2x} + e^x)(1 + e^{2x}) - 2e^{2x}(e^{2x} + e^x)}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2}(1 + 2e^x - e^{2x})$$

Das Vorzeichen von $f''(x)$ ist bestimmt durch den Ausdruck $(1 + 2e^x - e^{2x}) = q(e^x)$, wobei $q(z) = -z^2 + 2z + 1$. Die Nullstellen von q sind gegeben durch

$$\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = 1 \mp \sqrt{2}$$

und somit is $q(z)$ in dem Intervall $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ positiv und in dem Komplement $\mathbb{R} \backslash [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ negativ. Damit folgern wir,

$$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(e^x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > \sqrt{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \log(\sqrt{2} + 1)$$

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(e^x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x < \sqrt{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \log(\sqrt{2} + 1).$$

Das bedeutet, f ist auf $(-\infty, \log(1 + \sqrt{2})]$ konvex, auf $[\log(1 + \sqrt{2}), \infty)$ konkav und besitzt in $\log(1 + \sqrt{2})$ einen Wendepunkt.

10.3. Konstruktion einer cutoff-Funktion

Wir definieren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) := f(1) - f(1 - x).$$

(a) Zeigen Sie, dass f und g glatte Funktionen sind.

Tipp: *Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ beliebig oft differenzierbar. Zeige, dass sich die Ableitungen $f^{(n)}(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen.*

(b) Zeigen Sie, dass g monoton wachsend ist, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt und, für $x \geq 1$, $g(x) = f(1)$ erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\beta(x) = e^e f(g(x))$ monoton wachsend ist und für $x \leq 0$ gleich null und für $x \geq 1$ gleich eins ist.

(d) Konstruieren Sie für $a < b$ und $\epsilon > 0$ eine C^∞-Funktion $\rho : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $\rho(x) = 1$ für $x \in [a, b]$ und $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a - \epsilon, b + \epsilon]$.

Solution:

(a) Wir zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Daraus folgt dann sofort, dass g ebenfalls beliebig oft differenzierbar ist.

Man sieht leicht, dass f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und wir behaupten, dass die n-te Ableitung von f die folgende Gestalt hat:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} R_n(x)e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

wobei $R_n(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen $p_n(x)$ und $q_n(x)$. Da f für $x < 0$ konstant verschwindet, folgt sofort, dass $f^{(n)}(x) = 0$ für $x < 0$ gilt. Für $x > 0$ zeigen wir die Behauptung mittels Induktion. Zunächst gilt für $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

und somit gilt die Behauptung mit $R_1(x) = \frac{1}{x^2}$. Im Induktionsschritt berechnen wir

$$f^{(n+1)}(x) = \left(R_n(x)e^{-\frac{1}{x}}\right)' = \left(R_n'(x) + \frac{1}{x^2}R_n(x)\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

und die Behauptung folgt mit

$$R_{n+1} = R_n'(x) + \frac{1}{x^2}R_n(x) = \frac{p_n'(x)q_n(x) - p_n(x)q'(x)}{q_n(x)^2} + \frac{p_n(x)}{x^2q_n(x)}.$$

Wir folgern nun, dass $f^{(n)}$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ besitzt, da für genügend grosses $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\downarrow 0} R(x)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0}(R_n(x)x^m)\left(x^{-m}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

In dem letzten Grenzwert haben wir verwendet, dass $R_n(x)x^m$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert, falls m grösser als der Grad von $q_n(x)$ ist, sowie den bekannten Grenzwert

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{-m}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0.$$

Nach dem Differenzierbarkeitssatz (siehe Königsberger 9.9, Seite 165), ist f dann an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und für die Ableitungen gilt $f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. (Genau genommen sagt der Differenzierbarkeitssatz nur etwas über die erste Ableitung aus. Mit $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)'$ können wir ihn aber induktiv anwenden und erhalten die benötigte Aussage für die n-te Ableitung.)

(b) Wir haben bereits gesehen, dass $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $f'(x) = 0$ für $x \leq 0$ gilt. Somit ist f monoton wachsend und, da $g'(x) = f'(1-x)$ gilt, ist g ebenfalls monoton wachsend. Die zweite Behauptung, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$, ergibt sich aus

$$g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) > f(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

$$g(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) < f(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.$$

Schliesslich beobachten für $x > 1$, dass $f(1-x) = 0$ gilt und somit $g(x) = f(1) - f(1-x) = f(1)$ erfüllt ist.

(c) Mit der Kettenregel folgt $\beta'(x) = e^e f'(g(x))g'(x)$. Da f und g nach Teil (b) monoton wachsend sind, gilt $f'(g(x)) \geq 0$ und $g'(x) \geq 0$. Also gilt auch $\beta'(x) \geq 0$ und somit ist β monoton wachsend.

In Teil (b) haben wir gesehen, dass $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt. Insbesondere folgt aus $x \leq 0$ also $g(x) \leq 0$ und somit ist $\beta(x) = e^e f(g(x)) = 0$ erfüllt. Falls $x \geq 1$ gilt, haben wir in Teil (b) gesehen, dass $g(x) = f(1)$ gilt und somit

$$\beta(x) = e^e f(f(1)) = e^e f(e^{-1}) = e^e e^{-e} = 1.$$

(d) Wir definieren glatte Funktionen $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$\rho_1(x) := \beta\left(\frac{x-(a-\epsilon)}{\epsilon}\right) \qquad \rho_2(x) := \beta\left(\frac{b+\epsilon-x}{\epsilon}\right).$$

Aus Teil (b) folgt, dass ρ_1 monoton wachsend ist mit $\rho_1(x) = 0$ für $x \leq (a-\epsilon)$ und $\rho_1(x) = 1$ für $x \geq a$, und, dass ρ_2 monoton fallend ist mit $\rho_2(x) = 1$ für $x \leq b$ und $\rho_2(x) = 0$ für $x \geq (b+\epsilon)$. Dann erfüllt

$$\rho : \mathbb{R} \to [0,1], \qquad \rho(x) := \rho_1(x)\rho_2(x)$$

die geforderten Eigenschaften: $\rho(x) = 1$ für $x \in [a,b]$, $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a-\epsilon, b-\epsilon]$ und ρ ist monoton wachsend bzw. fallend auf den Intervallen $[a-\epsilon, a]$ und $[b, b+\epsilon]$.

$$f(x_0) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}} - aa^{\frac{1}{q-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}} - a^{\frac{q}{q-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^p - a^p = 0.$$