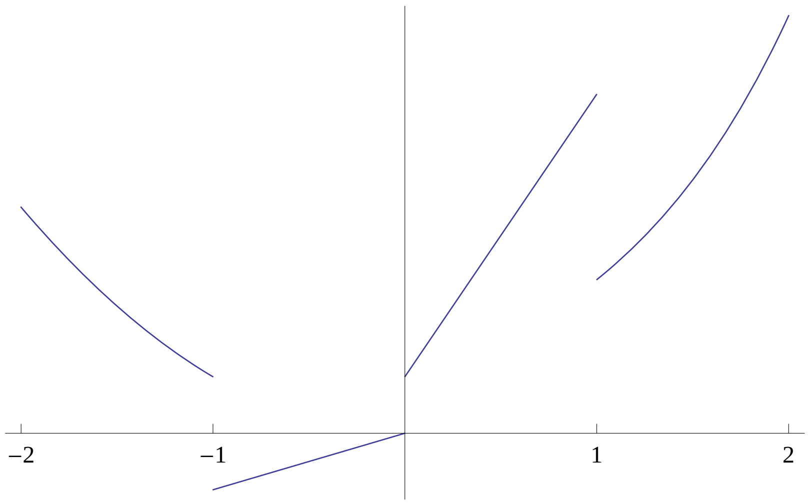
11.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- ☑ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.
- ☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.
- ☐ Keine.

Solution: Korrekt ist nur ist die erste Implikationskette: Differenzierbare Funktionen sind stetig und nach dem Hauptsatz integrierbar. Die Umkehrungen gelten nicht: Zum Beispiel ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig aber nicht differenzierbar. Es gibt auch Funktionen, welche integrierbar aber nicht stetig sind. Ein Beispiel sind sogenannte stückweise stetige Funktionen. Die Idee dabei ist: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst stückweise stetig, wenn es eine Unterteilung von $[a, b]$ in offene Teilintervalle gibt, sodass f auf jedem Teilintervall stetig ist. Im Beispiel



ist $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ stetig auf den Teilintervallen $]-2, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ und $]1, 2[$. Die Funktion springt an den Stellen -1, 0 und 1. Über den Funktionswert an den Sprungstellen x_i wird nichts vorausgesetzt. Es sollen jedoch jeweils der Grenzwert von links oder rechts existieren. Das Integral einer solchen Funktion wird dann definiert als:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

☑ $x \mapsto \int_0^x t\,dt$

Richtig.

☑ $x \mapsto \int_0^x t^2\,dt$

Richtig.

☐ $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$

Falsch.

☑ $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\,dt$

Richtig.

☐ Weiss nicht.

Falsch.

Solution: Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend. Eine geometrische Begründung: Ausser bei $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0 wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

(c) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

☑ f ist beschränkt und stetig auf $[0,1] \Longrightarrow g(x) := f(x^2)$ ist integrierbar auf $[0,1]$.

☑ g ist integrierbar und stetig auf $[0,1] \Longrightarrow f(x) := g(\sqrt{x})$ ist integrierbar und stetig auf $[0,1]$.

☑ f ist beschränkt und stetig auf $[0,1] \Longrightarrow g(x) := \exp(f(x))$ ist integrierbar auf $[0,1]$.

☐ Keine.

Solution: f ist beschränkt und stetig auf $[0,1]$, dann $g(x) := f(x^2)$ und $h(x) := \exp(f(x))$ sind auch beschränkt und stetig auf $[0,1]$.
$\phi(y) = y^2$, dann (Satz 5.4.6 (Substitution), professor Marc Burger skript)

$$\int_0^1 f(x)ds = \int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 2xg(x)dx, \quad f(x) := g(\sqrt{x}).$$

11.2. (Young'sche Ungleichung) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben. Zeigen Sie für alle $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Tipp: *Betrachten Sie für $x \geq 0$ die Funktion $f(x) := \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}x^q - ax$. Zeigen Sie, dass diese Funktion ihr globales Minimum an der Stelle $x_0 = a^{\frac{1}{q-1}}$ annimmt und dort der Wert $f(x_0) = 0$ hat. Folgern Sie heraus die Young'sche Ungleichung (wobei wir b in x umbenannt haben).*

Solution: Definiere $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}x^q - ax.$$

Die Ableitung von dieser Funktion ist gegeben durch

$$f'(x) = x^{q-1} - a.$$

Die Gleichung $f'(x_0) = 0$ hat die eindeutige Lösung $x_0 := a^{\frac{1}{q-1}}$ und es gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}} - aa^{\frac{1}{q-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}} - a^{\frac{q}{q-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^p - a^p = 0.$$

Dabei haben wir benutzt, dass aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ durch umformen $p = \frac{q}{q-1}$ folgt.

Da $q > 1$ gilt, ist x^{q-1} eine streng monoton wachsende Funktion und es gilt $f'(x) < 0$ für $x \in [0, x_0)$ sowie $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0, \infty)$. Insbesondere ist f auf dem Intervall $[0, x_0)$ streng monoton fallend, auf dem Intervall (x_0, ∞) streng monoton wachsend und die Funktion f nimmt an der Stelle x_0 ihr globales Minimum an. Für eine beliebige positive reelle Zahl $b \geq 0$ folgt

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab = f(b) \geq f(x_0) = 0$$

und dies ist genau die Young'sche Ungleichung.

11.3. (schriftlich) Stammfunktionen

(a) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c, d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(b) $(x^3+5x+1)^{2017}(3x^2+5)$;

(c) $e^{\cos x}\sin x$;

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{1+5x^2}}$;

(e) $-\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

(f) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, mit f beliebig ;

(g) $\tan x$.

Solution:

(a) Wie bekannt ist, lautet die Kettenregel:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

somit ist $x \mapsto (f\circ g)(x)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f'(g(x))g'(x)$.

Mit (a) können wir die gesuchten Stammfunktionen einfach berechnen.

(b) Mit $f(x) = x^{2018}$ und $g(x) = x^3+5x+1$, erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto \frac{(x^3+5x+1)^{2018}}{2018}$.

(c) Mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \cos x$ erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$.

(d) Mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1+5x^2$, und weil wir die gegebene Funktion als

$$\frac{x}{\sqrt{1+5x^2}} = \frac{1}{10}\frac{10x}{\sqrt{1+5x^2}}$$

schreiben können, folgern wir, dass eine Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{5}\sqrt{1+5x^2}$ ist.

(e) Wir erinnern uns daran, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, somit erhalten wir mit $f(x) = \arctan x$ und $g(x) = \cos x$ die Stammfunktion $x \mapsto \arctan(\cos x)$.

(f) Wie bekannt ist, gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Weil wir wissen nicht ob f positiv ist, müssen wir einen Betrag hinzufügen: eine Stammfunktion ist dann $x \mapsto \log|f(x)|$.

(g) Weil $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cos'(x) = -\sin x$, folgern wir mit (f), dass eine Stammfunktion $x \mapsto -\log|\cos(x)|$ ist.

11.4. Riemann Integral (schriftlich)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p \text{ und } q \text{ natürliche Zahlen, Teilerfremd} \end{cases}$$

Zeige, f is integrierbar und $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Solution: Wenn u eine Treppenfunktion mit $u \leq f$ ist, dann gilt $\int_a^b u dx \leq 0$. Insbesondere $u = 0 \leq f$, $\int_a^b u dx = 0$. Die obere Schranke ist erreichte und dann erhalten wir $\sup s(f) = 0$. Wir möchten $\inf S(g) = 0$ beweisen. Dies ist genügt zu beweisen dass f Riemann-integrarier ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wenn $x \in [0,1]$ mit $f(x) \geq \varepsilon$ ist, dann gibt es höchstens $\sum_{k=1}^{n-1} k \leq \frac{n^2}{2}$ Werte x. Wir nennen diese Werte **schlechte Punkte**, und sonst **gute Punkte**. Sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ eine Zerlegung wobei $N > \frac{n^2}{\varepsilon}$. Diese Zerlegung ist gegeben durch $x_k = \frac{k}{N}$. Zudem gilt $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{N}$. Wir setzen

$$v_N(x) = \begin{cases} 1, x \text{ schlechter Punkt} \\ \varepsilon, x \text{ guter Punkt.} \end{cases}$$

Somit ist $\int_a^b v_N dx \leq n^2 \frac{1}{N} + N\varepsilon \frac{1}{N} = \frac{n^2}{N} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. Ausserdem haben wir $v_N \geq f$. Wir erhalten

$$0 = \sup s(f) \leq \inf S(f) \leq 2\varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, dann schliessen wir dass f Riemann-integrierbar ist und

$$\int_0^1 f dx = 0.$$