12.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

☐ $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$

☑ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$

☑ $\displaystyle\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$
Solution: Man nimmt $g(x) = \frac{x^2}{2}$ mit $g'(x) = x$.

☐ $\displaystyle\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$

(b) Die Ableitung nach x von $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt$ ist

☐ $g'(x) = \displaystyle\int_{2x}^0 \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.

☐ $g'(x) = -\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)$.

☑ $g'(x) = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)$.

Solution: Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $\sin^2(t)\cos^2(t)$, d.h. $F'(t) = \sin^2(t)\cos^2(t)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$g(x) = \int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt = F(1) - F(x^2).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$g'(x) = -F'(x^2)2x = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$$

(c) Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx\,.$$

$I(p,q)$ ist gegeben durch

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

- ☐ $\frac{p!}{(p+q+1)!}$
- ☑ $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$
- ☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q)!}$
- ☐ $\frac{1}{p+q+1}$
- ☐ $\frac{pq}{p+q+1}$

Mit einer partiellen Integration erhalten wir

$$I(p+1,q) = \int_0^1 x^{p+1}\,(1-x)^q\,dx$$

$$= -x^{p+1}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,dx = \frac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1)$$

Es folgt

$$I\,(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}I\,(p+1,q) \qquad (1)$$

Weiter gilt

$$I(p,0) = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+1} \qquad (2)$$

Somit folgt

$$I(p,q) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\,I(p+1,q-1) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\cdot\tfrac{q-1}{p+2}\,I(p+2,q-2) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q)}\,I(p+q,0) \overset{(2)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q+1)}$$

$$= \frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \underbrace{\frac{p!}{1\cdot 2\cdots(p-1)p}}_{=1}\cdot\frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

12.2. Das riemannsche Integral (schriftlich) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit

1. f ist stetig;
2. $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$;
3. $\exists x_0\in(a,b)$ mit $f(x_0)>0$;

Zeige

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{1}$$

Zeige anhand von Beispielen, dass jede der Voraussetzungen $1, 2, 3$ notwendig ist um (1) zu schliessen.

Solution: Weil $f(x_0) > 0$ und f stetig ist, wir haben $\delta > 0$ mit

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \quad x \in (x - \delta, x + \delta)$$

Dann mit Aufgabe 11.2

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x-\delta} f(x)dx + \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)dx + \int_{x+\delta}^b f(x)dx \geq \delta f(x_0) > 0$$

Ohne 1, ein Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq \frac{a+b}{2} \\ 1, & \text{falls } x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Ohne 2, ein Beispiel ist

$$f(x) = x - \frac{a+b}{2}$$

Ohne 3, ein Beispiel ist $f = 0$.

12.3. Berechnung von Integralen Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2 - x^2 + x}{x}\,\mathrm{d}x;$ **(b)** $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt{x} - 1)\,(x + 1)\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin x\,\mathrm{d}x;$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$ **(f)** $\displaystyle\int (x^3 + 5x + 1)^{1291}(3x^2 + 5)\,\mathrm{d}x;$

(g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{5x} \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x;$ **(h)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{2-x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left(2x^{-1}-x+1\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[2\log|x| - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{x=1}^4\\ &= 2\log 4 - 8 + \frac{1}{2} + 4 - 1 = 4\log 2 - \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^9 (\sqrt{x}-1)(x+1)\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 x^{3/2} - x + x^{1/2} - 1\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} - x\right]_{x=1}^9\\ &= \frac{2}{5}(3^5-1) - \frac{1}{2}(9^2-1) + \frac{2}{3}(3^3-1) - 9 + 1\\ &= \frac{484}{5} - 40 + \frac{52}{3} - 8 \;=\; \frac{992}{15}\,.\end{aligned}$$

(c)

$$\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\cos x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{\downarrow}{t^2}\,\underset{\uparrow}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{\uparrow}{\sin(2t)}\,\underset{\downarrow}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\left[\cos(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -\cos(2t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2) + \left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^1\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{4}\sin(2) = \frac{1}{4}(\sin(2) + 2\cos(2)).\end{aligned}$$

(e) Wir teilen den Burch auf:

$$\frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{2}.$$

Weil $\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\tan(x)\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{8} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\,.\end{aligned}$$

(f)

$$\int (x^3+5x+1)^{1291}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{(x^3+5x+1)^{1292}}{1292} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(g) Wir integrieren zwei Mal partiell bis wir auf der rechten Seite wieder das Integral der linken Seite (mit anderem Faktor) finden:

$$\begin{aligned} I &= \int \underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{5x}} \underset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} - 5\int -\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{5x}}\underset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x + C \\ &= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} + 5e^{5x}\sin(x) - 25\int e^{5x}\sin(x)\,\mathrm{d}x + C \\ &= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} + 5\mathrm{e}^{5x}\sin(x) - 25I + C,\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int \mathrm{e}^{5x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = I = \frac{1}{26}(5\mathrm{e}^{5x}\sin(x) - \mathrm{e}^{5x}\cos(x)) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

(h)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sqrt{1+5x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

12.4. Integrale der Trigonometrische Funktion (schriftlich) Berechne die Integrale für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx &= \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\end{aligned}$$

Benütze $0 < \sin x < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sowie Übung 2 um zu zeigen, dass:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)dx$$

Schliessen daraus:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\dots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

Solution: Wir haben

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{wenn } n = 0$$

Wenn $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)d[-\cos(x)] \\
&= -\cos(x)\sin^{2n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)d[\sin^{2n-1}(x)] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\cos^2(x)\sin^{2n-2}(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)[1-\sin^2(x)]\sin^{2n-2}(x)dx \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx
\end{aligned}$$

dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)dx$$

Dann das ist klar mit Induktion.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx$ ist gleich.