13.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin(2\pi x^{-1}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \inf_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \dots \\ \inf_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n} \\ \dots \\ \inf_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) $\exists\, x_0 \in]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(A) wahr.

(B) falsch.

Solution: AAAA.
Wir haben $\forall\, x \in]0,1[$

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan\left(\frac{2\pi}{x}\right) = \frac{\pi}{2x}$$

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen $\tan\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ und $\frac{\pi}{2x}$.
Weil $g \in C^1$ und $|g'| < C$, konvergiert die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig gegen g. Dann $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(b) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.

Falsch: Z.B. existiert $\int_1^\infty f(x)dx$ für f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n + 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

aber $(f(n) = 1)_n$ ist keine Nullfolge.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.

Falsch: Siehe erste Teilaufgabe.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Falsch: Siehe erste Teilaufgabe.

☑ Alles sind falsch.

Richtig.

13.2. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t;$

(f) $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x;$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$

Solution: Wir nennen jeweils "I" das betrachtete Integral.

(a) Da $\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq \frac{1}{x^3}$ für $x > 0$, gilt

$$\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^a \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \text{für jedes } a > 1,$$

und bekanntlich ist $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ konvergent; ausserdem ist $a \mapsto \int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ monoton wachsend, weil der Integrand positiv ist. Wir schliessen, dass der Grenzwert für $a \to +\infty$ existiert, das heisst, dass I konvergent ist.

Mit der Substitution $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ ($x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{(1-t^2)^3}{t^6} t \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{1-t^2}{t^4} = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} t^{-4} - t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[-\frac{1}{3}t^{-3} + t^{-1}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-3/2} + \sqrt{\frac{a}{a+1}} + \frac{1}{3}2^{3/2} - \sqrt{2},\right)
\end{aligned}$$

also:

$$I = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$$

(b) Das Integral konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert. Mit der Substitution $t = \frac{1}{x}$ und für $0 < \epsilon < A$ erhalten wir:

$$\int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/\epsilon}^{1/A} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{1/A}^{1/\epsilon} = -e^{-\frac{1}{\epsilon}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{A}},$$

und dieser Ausdruck strebt nach 1 für $A \to +\infty$ und $\epsilon \to 0^+$. Somit konvertiert das Integral und

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(c) Wir sehen, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x|\log|x|}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{1+x^2}\log x = +\infty,$$

somit wächst der Integrand schneller als $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ nicht integrierbar über $(1,+\infty)$ ist, kann I erst recht nicht konvergieren.

(d) Wir trennen das Integral:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$, und weil $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_1 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ für $x \geq 1$, und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_2 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Wir folgern, dass I konvergiert.

Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \frac{1}{t(1+t^2)} 2t\,\mathrm{d}t = 2\left[\arctan t\right]_a^b = 2(\arctan b - \arctan a).$$

Da $\lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(0) = 0$, wir schliessen, dass $I = \pi$.

(e) Für alle $t \geq 0$ gilt mittels Taylor-Formel: $\sin t = t - \frac{t^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,t]$. Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{6}{6 - t^2\cos\tau} - 1\right) = \frac{t\cos\tau}{6 - t^2\cos\tau} \leq \frac{t}{5}, \quad t \in [0,1].$$

Der Integrand ist stetig nach 0 fortsetzbar, somit ist das Integral konvergent.

(f) Die Funktion $1 - x^x = 1 - e^{x\log x}$ ist positiv in $(0, \frac{1}{e})$, weil $x \log x < 0$ in $(0, \frac{1}{e})$. Da $\mathrm{e}^t > 1 + t$ für jedes $t > 0$, erhalten wir:

$$e^{x\log x} > 1 + x\log x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{x\log x}} > \frac{1}{1 - (1 + x\log x)} = \frac{1}{x\log x}.$$

Bekanntlich ist $\int_0^a \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ divergent. Somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral divergent.

(g) Die Substitution $t = \frac{1}{u}$ liefert, dass es äquivalent ist, die Konvergenz von:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}x$$

zu untersuchen. Mittels Taylor-Formel gilt: $\sin u = t - \frac{u^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,u]$, somit:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{\cos\tau}{6}u\right)\,\mathrm{d}u,$$

und dieses Integral ist bekanntlich divergent. Somit ist I divergent.

13.3. Unbestimmte Integralen Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt$

(b) $\int \sinh(t)\cos(t)\,dt$

(c) $\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

(d) $\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt$

Solution:

(a) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt &= -\sin^2(t)e^{-t} + \int 2\cos(t)\sin(t)e^{-t}\,dt\\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t) + \int \left(-2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)\right)e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

Wenn wir auf beiden Seiten $4\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt$ addieren und die trigonometrische Identität $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$ benutzen, folgt

$$\begin{aligned}5\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t) + \int 2e^{-t}\,dt\\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t) - 2e^{-t}\end{aligned}$$

und somit

$$\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt = -\frac{1}{5}\left(\sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + 2\right)e^{-t}$$

(b) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sinh(t)\cos(t)\,dt &= \cosh(t)\cos(t) + \int \cosh(t)\sin(t)\,dt\\ &= \cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t) - \int \sinh(t)\cos(t)\,dt\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral taucht auf beiden Seiten der Gleichung auf und wir können danach auflösen. Damit erhalten wir

$$\int \sinh(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t)\right).$$

(c) Da $\sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$ ist, benutzen wir die Substitution $t = \sinh(u)$. Damit gilt dann

$$\sqrt{t^2+1} = \cosh(u), \qquad dt = \cosh(u)du$$

und mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{\sinh(u)^3}{\cosh(u)} \cdot \cosh(u)\,du = \int \sinh^3(u)\,du.$$

Mit den Definitionen $\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ sowie $\cosh(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ können wir das rechte Integral leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int \sinh^3(u)\,du &= \int \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^3 du \\
&= \frac{1}{8}\int e^{3u} - 3e^u + 3e^{-u} - e^{-3u}\,du \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}e^{3u} - 3e^u - 3e^{-u} + \frac{1}{3}e^{-3u}\right) \\
&= \frac{1}{24}\left(e^u + e^{-u}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right) \\
&= \frac{1}{3}\cosh^3(u) - \cosh(u)
\end{aligned}$$

Mit der Beziehung $\cosh(u) = \sqrt{t^2+1}$ können wir das Ergebnis wieder in t ausdrücken und erhalten

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{3}\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

(d) Beachte, dass der Integrand nur für $t \in (0,1)$ wohldefiniert ist. Es macht also Sinn die Substitution $u^2 = t$ zu betrachten. Dann gilt $dt = 2u\,du$ und mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-u^2} \cdot 2u\,du = 2\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u}\,du$$

Wir formen den Integranden weiter um zu

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1-u^2}{1-u} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Für verbleibenden Ausdrücke können wir die Stammfunktionen direkt angeben. (Beim zweiten Audrück könnte man alternativ auch ähnlich wie in Teil (d) weiter substituieren, wenn man die Stammfunktion nicht direkt sieht.) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 2\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\arcsin(u) - 2\sqrt{1-u^2} \\
&= 2\arcsin\left(\sqrt{t}\right) - 2\sqrt{1-t}
\end{aligned}$$

13.4. Wir betrachten für $b > a^2$ die Funktionen

$$f_k(x) = \frac{1}{(x^2+2ax+b)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und definieren die unbestimmtem Integrale (bzw. Stammfunktionen)

$$F_k(x) := \int f_k(x)\,dx, \qquad G_k(x) := \int x f_k(x)\,dx.$$

Beachte, dass diese Funktionen nur bis auf die Addition einer Konstante eindeutig bestimmt sind.

(a) Berechnen Sie explizite Ausdrücke für $F_1(x)$ und $G_1(x)$.

(b) Beweisen Sie, dass für $k > 1$ (und geeignete Konstanten) die folgenden Rekursionsformeln erfüllt sind:

$$G_k(x) = \frac{1}{2-2k} f_{k-1}(x) - aF_k(x)$$

$$F_k(x) = \frac{x+a}{(2k-2)(b-a^2)} f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)(b-a^2)} F_{k-1}(x).$$

Tipp: *Verwenden Sie partielle Integration oder vergleichen Sie die Ableitungen der jeweiligen Ausdrücke um die Rekursionen zu verifizieren.*

Solution:

(a) Wir Formen $f_1(x)$ mittels quadratischer Ergänzung um und erhalten

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2} = \frac{1}{b-a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)^2+1}.$$

Damit sieht man direkt (oder mit der Substitution $y = \frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$), dass

$$F_1(x) = \int f_1(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)$$

eine Stammfunktion für $f_1(x)$ ist.

Um eine Stammfunktion für $xf_1(x)$ zu finden, schreiben wir

$$xf_1(x) = \frac{x}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} - \frac{a}{x^2+2ax+b}.$$

Dabei hat der erste Bruch die Gestallt $h'(x)/h(x)$ mit $h(x) = x^2 + 2ax + b$. Mit der Substitution $y = h(x)$ folgt dann

$$\begin{aligned} G_1(x) = \int x f_1(x)\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|x^2+2ax+b\right| - aF_1(x) \\ &= \frac{1}{2}\log\left|x^2+2ax+b\right| - \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right). \end{aligned}$$

(b) Beachte zunächste die Identität

$$f'_{k-1}(x) = -(k-1)f_k(x)(2x+2a) = (2-2k)xf_k(x) + a(2-2k)f_k(x).$$

Da $f_{k-1}(x)$ offensichtlich eine Stammfunktion für $f'_{k-1}(x)$ ist und eine Stammfunktion für den Ausdruck auf der rechten Seite durch $2(1-k)G_k(x) + 2a(1-k)F_k(x)$ gegeben ist, folgt

$$f_{k-1}(x) = (2-2k)G_k(x) + a(2-2k)F_k(x) + C_k$$

für eine Konstante $C_k \in \mathbb{R}$ oder äquivalent

$$G_k(x) - \frac{C_k}{2-2k} = \frac{1}{2-2k}f_{k-1}(x) - aF_k(x).$$

Wenn wir $G_k(x)$ durch $G_k(x) - C_k/(2-2k)$ ersetzen ist die erste Rekursion erfüllt.

Die zweite Rekursionsformel bestimmen wir mit einem analogen Ansatz, wobei wir die Ableitung von $xf_{k-1}(x)$ betrachten. In der Rechnung verwenden wir die Formel für $f'_{k-1}(x)$ von oben und erhalten

$$\begin{aligned} (xf_{k-1}(x))' &= f_{k-1}(x) + xf'_{k-1}(x) = f_{k-1}(x) - x(k-1)(2x+2a)f_k(x) \\ &= f_{k-1}(x) - (2k-2)(x^2+ax)f_k(x) \\ &= f_{k-1}(x) - (2k-2)axf_k(x) - (2k-2)x^2f_k(x) \\ &= f_{k-1}(x) - (2k-2)axf_k(x) - (2k-2)f_{k-1}(x) + (2k-2)(2ax+b)f_k(x) \\ &= (3-2k)f_{k-1}(x) + a(2k-2)xf_k(x) + b(2k-2)f_k(x) \end{aligned}$$

Indem wir zu Stammfunktionen übergehen, erhalten wir

$$xf_{k-1}(x) = (3-2k)F_{k-1}(x) + a(2k-2)G_k(x) + b(2k-2)F_k(x) + \tilde{C}_k$$

für eine Konstante $\tilde{C}_k \in \mathbb{R}$. Mit der ersten Rekursionsformel folgt nun

$$xf_{k-1}(x) = (3-2k)F_{k-1}(x) - af_{k-1}(x) - a^2(2k-2)F_k(x) + b(2k-2)F_k(x) + \tilde{C}_k$$

oder äquivalent

$$F_k(x) - \frac{\tilde{C}_k}{(2k-2)(b-a^2)} = \frac{x+a}{(2k-2)\,(b-a^2)} f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)\,(b-a^2)} F_{k-1}(x).$$

Wenn wir $F_k(x)$ durch $F_k(x) - \tilde{C}_k / \left((2k-2)(b-a^2)\right)$ ersetzen erhalten wir die zweite Rekursionsformel.