Wählen Sie die richtigen Antworten.

14.1. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Seien

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & x < 0 \text{ oder } x > 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

und

$$a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)dx$$

wobei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl bezeichnet. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) f ist stetig, aber f ist nicht glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) f besitzt unendlich viele lokale Minimalstellen.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) f besitzt ein lokales Maximum in $x = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $a_1 > 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

Explanation: Similar to Aufgabe 10.3, we can show that (i) is wrong.
For (ii), one could do direct computation. For $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}\sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + \cos(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 0$$

is equivalent to

$$\tan(x) = -\frac{x^3}{2}.$$

Because $\tan(x)$ is a periodic function, the equation above has infinitely many positive solutions.
(iii) is wrong, because $f(x) \leq 0$ for $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ and $f(x) \geq 0$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
(iv) is correct. Note

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{(x+2\pi)^2}\Big)dx$$
$$\int_{3\pi}^{4\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)dx = -\int_0^{\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{(4\pi-x)^2}\Big)dx$$

then $a_1 > 0$.
As $k \to \infty$, $\exp(-\frac{1}{x^2})$ converges uniformly to 1 in $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$, then (v) is correct.

14.2. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \geq 1$ so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[a, b]$ gleichmässig gegen f konvergiert. Geben Sie für jede folgender Aussagen an ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Sei $x_0 \in\,]a, b[$. Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 differenzierbar.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Falls f_n für alle $n \geq 1$ auf $[a, b]$ beschränkt ist dann folgt, dass für jede Partition P von $[a, b]$ der Grenzwert der Untersumme $\lim\limits_{n\to\infty} s(f_n, P)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} s(f_n, P) = s(f, P).$$

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Falls f_n für alle $n \geq 1$ stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) Falls f_n für alle $n \geq 1$ konvex ist, so ist f konvex.

(A) wahr.

(B) falsch.

Explanation: (i) is wrong. Let

$$f_n(x) := \sqrt{\frac{nx^4}{1+nx^2}}$$

then $f_n(x)$ converges to $|x|$ uniformly in $[-1,1]$. $f_n(x)$ is C^1 for any n, but $x \to |x|$ is not C^1 in $[-1,1]$.
A partition is a finite number of intervals. Because f_n onverges to f uniformly, then f_n onverges to f uniformly in each of these finitely many intervals. Then the infimum of f_n converges to the infimum of f in each of these finitely many intervals. Taking the linear combination, then one concludes (ii) is correct.
Since f_n is continuous and f_n converges to f uniformly, f is also continuous. $[a,b]$ is a compact interval with $a, b \in \mathbb{R}$ and $a < b$, then f is uniformly continuous. (iii) is correct.
f_n is convex means for any x, y and any $t \in [0,1]$

$$f_n(tx + (1-t)y) \leq t f_n(x) + (1-t) f_n(y).$$

Passing this to its limit, we see

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Thus (iv) is correct.

14.3. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x)\sin(2\pi x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0\leq x<\dfrac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \dfrac{1}{n}\leq x<\dfrac{2}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \dfrac{j}{n}\leq x<\dfrac{j+1}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \dfrac{n-1}{n}\leq x\leq 1 \end{cases} \qquad \forall\, k\geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) g ist glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) $\exists\, x_0 \in\,]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(A) wahr.

(B) falsch.

Explanation: For (i), g is continuous. It is not differentiable at the point 0, since

$$\limsup_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)\sin(2\pi x)}{x} \to -\infty,$$

so (i) is wrong.
Although f' is not defined at $x = 0$, f' is defined for any $x \in]0,1[$.

$$g'(x) = 0 \iff \tan(2\pi x) = -2\pi x \ln(x)$$

Sketch the graphs of the functions $x \to \tan(2\pi x)$ and $x \to -2\pi x \ln(x)$ and one can see (ii) is correct.
We prove (iii) is true. Define

$$\alpha_n = \max_{0\leq j<n} \Big\{ \sup_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t) - \inf_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t) \Big\}.$$

Cliam: $\alpha_n \to 0$ as n goes to $+\infty$.
With this claim, one can verify the definition of uniform convergence directly. Now, to prove the uniform convergence, it suffices to prove the claim:
Fix any small $\epsilon > 0$. Since g is continuous in $[0,1]$, we can find $N_1 \in \mathbb{N}$ large enough such that

$$\sup_{0\leq t<\frac{1}{N_1}} g(t) - \inf_{0\leq t<\frac{1}{N_1}} g(t) \leq \epsilon.$$

Note that g is of C^1 in the interval $[\frac{1}{N_1}, 1]$ and its derivative is bounded by a constant $C > 0$ in $[\frac{1}{N_1}, 1]$. Choose $N_2 \in \mathbb{N}$ with $\frac{N_2}{N_1}$ being a positive integer and $\frac{C}{N_2} < \epsilon$. Then for any $x, y \in [\frac{1}{N_1}, 1]$,

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y| \Longrightarrow \sup_{\frac{j}{N_2} \leq t < \frac{j+1}{N_2}} g(t) - \inf_{\frac{j}{N_2} \leq t < \frac{j+1}{N_2}} g(t) \leq \epsilon \text{ for any } j \geq \frac{N_2}{N_1}.$$

Then for any $n \geq N_2$, $\alpha_n \leq \epsilon$. This concludes the proof of the claim.
From Satz 5.2.7 of professor Marc Burger's note, one can deduce that g is integrable because g is continuous. Note that $g_n \leq g$. (iv) is correct.
(v) is correct because of the uniform convergence.

14.4. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)(n+2)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

Richtig: Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)n^2} = \frac{(n+1)^3}{n^2(n+3)} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 3n^2} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$.

(b) Die Folge ist beschränkt.

Richtig: Für alle $n \geq 1$ gilt $1 \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{n+2}$ und damit

$$a_n \leq \frac{3}{2}.$$

Also ist (a_n) beschränkt.

(c) Die Folge ist divergent.

Falsch: $\lim_{k \to \infty} = \frac{3}{2}$.

(d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

Falsch.

14.5. Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(c) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(d) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $]a, b[$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

Explanation: (b) ist richtig. In (a) fehlt die Stetigkeit, in (c) die Randbedingung. Dann (a) und (c) sind falsch. (d) ist zum Beispiel dann falsch, wenn $f(a) = 0$ gilt und f streng monoton wächst, wie bei der Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto x$.

14.6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x x^3 \ln x$. Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

(a) $x^2(3 \ln x + x \ln x)e^x$

(b) $x^2(3 \ln x + 1)e^x$

(c) $x^2(3 \ln x + 1 + x \ln x)e^x$

(d) $3x^2$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Explanation: (c) ist richtig

14.7. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) $-\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Explanation: (a) und (b) sind wahr. (a): $\exp'' = \exp > 0$.
(b): $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
(c): Zum Beispiel,

$$H(0.5(-1) + 0.5(+1)) = 1 > 0.5H(-1) + 0.5H(1) = 0.5.$$

14.8. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

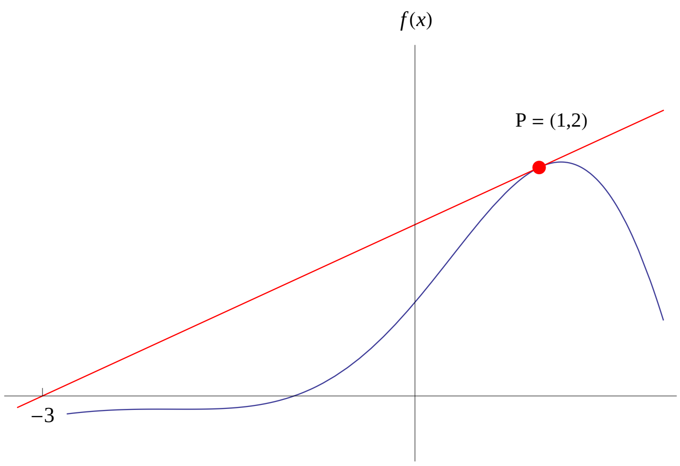
(b) Nein.

Explanation: Nein. Gegenbeispiel: Betrachten Sie die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Mit $f = g = H$ gilt es $f \circ g \equiv 1$, aber H ist nicht differenzierbar in 0.

14.9. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Explanation: (b) ist wahr. Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

14.10. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f : [2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-2)^{\frac{1}{3}},$$

an der Stelle $x = 10$?

(a) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

(b) $y = \frac{1}{12}x + \frac{7}{6}$.

(c) $y = \frac{1}{12}x + 2$.

(d) $y = \frac{1}{4}x + 2$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Explanation: (b) ist wahr. Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form $y = ax+b$ gegeben, wobei $a = f'(10)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(10, f(10))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$

und damit $a = f'(10) = \frac{1}{12}$. Aus $(10, f(10)) = (10, 2)$ folgt, dass b die Gleichung $2 = \frac{10}{12} + b$ erfüllt, dass also $b = \frac{7}{6}$ gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

14.11. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = x^2$.

(d) $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

(e) $f'(x) = x + x \log x$.

(f) keiner der obigen Ausdrücke.

Explanation: (d) ist wahr. Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x \log x)' e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x)x^x.$$

14.12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

Explanation: (c) ist falsch. Ein Beispiel ist die Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$. Diese ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre Taylorreihe bei $x_0 = 0$ ist identisch gleich 0 und daher für $x \neq 0$ verschieden von $f(x)$. Die übrigen Aussagen sind richtig.

14.13. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

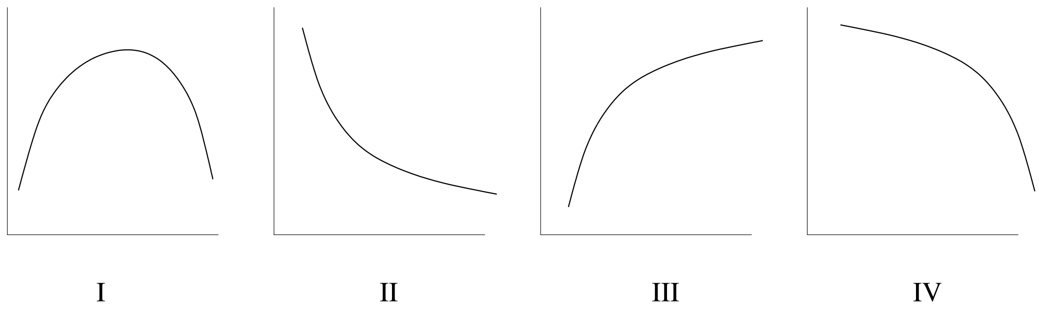
(a) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(b) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

(c) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.

Explanation: Jede Extremalstelle ist ein kritischer Punkt, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel hat $x \mapsto x^3$ einen Terrassenpunkt bei $x = 0$, aber kein (lokales oder globales) Extremum. Die richtige Antwort lautet also (c).

14.14. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



(a) I

(b) II

(c) III

(d) IV

(e) Keine.

Explanation: (a), (c) und (d) sind wahr. Die Bedingung $f'' < 0$ impliziert, dass die Steigung f' streng monoton fällt, also G_f eine Rechtskurve beschreibt.

14.15. Sei

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,6] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

(c) -16 ist das globale Minimum von f auf $[0,6]$.

(d) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

(e) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

Explanation: (a), (c), (d) und (e) sind wahr. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 6 \cdot (x-1)(x-4).$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1)(x-4) = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ oder $x = 4$. Da

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (0,1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ für } x \in (1,4)$$

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (4,6),$$

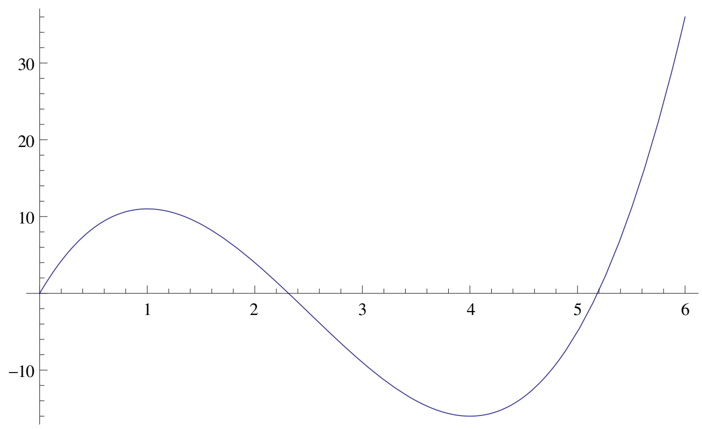
ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle (d.h. 1 und 4 sind lokale Extremalstellen). Die Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$ des Definitionsbereichs sind auch lokale Extremalstellen. Die Funktionswerte von f in diesen Punkte sind

$$f(0) = 0,\ f(1) = 11,\ f(4) = -16,\ f(6) = 36.$$

Daher haben wir:

- $x = 6$ ist die globale Maximalstelle und 36 das globale Maximum;
- $x = 4$ ist die globale Minimalstelle und -16 das globale Minimum (und also $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$);
- $x = 1$ ist eine lokale Maximalstelle und 11 ein lokales Maximum;
- $x = 0$ ist eine lokale Minimalstelle und 0 ein lokales Minimum.

Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



14.16. Bestimmen Sie das globale Maximum von $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Explanation: (c) ist wahr. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) =$$

$$= 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Dabei wurden die Relationen

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ und } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

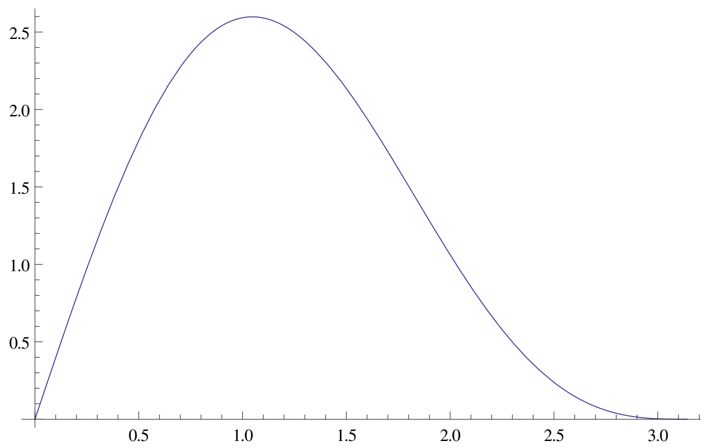
benützt. Nullsetzen der Ableitung $f'(x)$ liefert

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0, \pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Der Randpunkt $x = 0$ ist auch eine lokale Extremalstelle. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0, \; f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \; f(\pi) = 0,$$

also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ das globale Maximum. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



14.17. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \cos(x^2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist f auf dem Definitionsbereich D injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0, 1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von f im Intervall $[1/\sqrt{2}, 1]$.

Explanation: (a) und (c) sind wahr. Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0, 1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos((\sqrt{\arccos x})^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[0, \sqrt{\pi/4}]$ unter f gleich $[1/\sqrt{2}, 1]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

14.18. Sei $0 < \alpha < 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x - \alpha \sin x$. Welche der Aussagen gilt?

(a) f ist strikt monoton wachsend.

(b) f ist konvex.

(c) Die Umkehrfunktion g von f erfüllt $g'(0) = (1 - \alpha)^{-1}$.

Explanation: (a) und (c) sind wahr. f ist unendlich oft differenzierbar mit positiver Ableitung $1 - \alpha \cos x$. Die zweite Ableitung $\alpha \sin x$ von f wechselt das Vorzeichen. Als Konsequenz der Kettenregel gilt $g'(f(0))f'(0) = 1$. Wegen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1 - \alpha$ folgt die Aussage.

14.19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \neq 0 \text{ und } \ p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}.$$

Welche der Aussagen gilt?

(a) Sei $E = \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{\sqrt{3}q | q \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt $\lim_{E \ni x \to 1} f(x) = 0$.

Richtig: Da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$ für alle $x \in E$. Es folgt, dass der Grenzwert ebenfalls 0 ist.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Richtig: Aus dem archimedischen Prinzip schliesst man, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 \forall p \in \mathbb{Z} \forall q \in \mathbb{N} \quad 0 < \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| < \epsilon \Rightarrow q \geq N \; .$$

Daraus folgt, dass f an jeder Stelle x_0 den Grenzwert 0 hat.

(c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Falsch: Gegeben $\epsilon < 1$ existiert keine Umgebung $U = (C, +\infty)$ von $+\infty$, für die gilt $x_0, x_1 \in U \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > C$. Dann sind $n, \sqrt{2}n \in U$ und $f(n) = 1$, $f(\sqrt{2}n) = 0$. Also existiert der Grenzwert von f für $x \to +\infty$ nicht.

(d) f ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

Falsch: Es gilt $\{x \in \mathbb{R} | \; f \text{ nicht stetig in } x\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, da $f(x_0) = 1/q \neq 0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ist, wenn q der (gekürzte) Nenner von $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist.

14.20. Welche der uneigentlichen Integrale konvergieren?

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Richtig: Es gilt $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \geq 1$ und damit folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus derjenigen von $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$.

(b) $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$

Richtig: Wir kürzen $\int_0^x \cos(x^2) dx = F(x)$ ab. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \infty$ und $x_n^2 > \pi/2$. Dann existieren eindeutige $k_n \in \mathbb{N}$ mit $\pi(k_n - 1/2) < x_n^2 \leq \pi(k_n + 1/2)$. Es folgt

$$F((\pi(k_n - 1/2))^{1/2}) \leq F(x_n) \leq F((\pi(k_n + 1/2))^{1/2})$$

oder

$$F((\pi(k_n - 1/2))^{1/2}) \geq F(x_n) \geq F((\pi(k_n + 1/2)^{1/2})$$

abhängig davon, ob k_n gerade oder ungerade ist. Da nun die Folge $F((\pi(n + 1/2))^{1/2})$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert, folgt die Konvergenz der Folge $F(x_n)$.

(c) $\int_0^\infty |\cos(x^2)|dx$

Falsch: Wir schreiben $\int_0^x |\cos(x^2)|dx = F(x)$. Für die Folge $x_n = (\pi(n + 1/2))^{1/2} \to \infty$ gilt

$$F(x_{n+1}) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\cos(x^2)|dx \geq (x_{n+1} - x_n)/2 \geq \frac{\pi^{1/2}}{4(n+1/2)^{1/2}} .$$

Für die erste Ungleichung genügt es, festzustellen, dass $\cos(x^2)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen konvex oder konkav ist und den Wert ± 1 erreicht. Wir haben gezeigt, dass die Folge $F(x_n)$ divergiert.

(d) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Richtig: Der Beweis ist genau wie in der 2. Teilaufgabe.

(e) $\int_0^\infty x\cos(x^4)dx$

Richtig: Es gilt $\int_0^u x\cos(x^4)dx = \frac{1}{2}\int_0^{u^2} \cos(t^2)dt$. Das bedeutet, dass es sich um dasselbe Integral wie in der zweiten Teilaufgabe handelt.