15.1. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei $c \in [0, \pi]$ beliebig, sei $(a_k)_{k\geq 1}$ die rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = c,$$
$$a_{k+1} = \sin(a_k), \quad k \geq 1.$$

Zeige Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Solution:

When $a_1 \in [0, \pi]$, $a_k \geq 0$ for any $k \in \mathbb{N}^*$, by induction. Since $\sin x \leq x$ for any $x \geq 0$, $(a_k)_{k\geq 1}$ is decreasing.

The induction argument:
For $k = 1$, $a_2 = \sin(a_1) < a_1$ and $a_2 \in [0, 1]$ because $a_1 \in [0, \pi]$.
Assume $a_k \in [0, 1]$, then $a_{k+1} = \sin(a_k) < a_k$ and $a_{k+1} \in [0, 1]$ because $a_k \in [0, 1]$.

$(a_k)_{k\geq 1}$ is convergent, since $(a_k)_{k\geq 1}$ is bounded from below and decreasing.

Denote the limit of $(a_k)_{k\geq 1}$ by α, we have $\alpha = \sin \alpha$, which gives $\alpha = 0$.

15.2.

1. **(Prüfung FS 2015)** Schreiben Sie die komplexe Zahl
$$z = \frac{1+i}{2+3i} \cdot e^{-i\pi/2} + e^{i\pi/2}$$
in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

2. **(Prüfung HS 2016)** Schreiben Sie die komplexe Zahl
$$z = (2+i)e^{i\pi/2} + \frac{i-1}{2+i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$
in der Form $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution:

1.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \cdot (\underbrace{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=-1}) + (\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) \\ &= \frac{2+2i-3i+3}{4+9} \cdot (-i) + i = \frac{-1-5i}{13} + i = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z &= (2+i)(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) + \frac{(i-1)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \cdot (\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}) \\ &= 2i - 1 - i \cdot \frac{2i-2+1+i}{4+1} = 2i - 1 - i \cdot \frac{3i-1}{5} \\ &= 2i - 1 + \frac{3+i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i. \end{aligned}$$

15.3.

1. (**Prüfung FS 2011**) Brechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})}$.

2. (**Prüfung FS 2011**) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n}$.

3. (**Prüfung HS 2013**) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n},\ n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

4. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$.

Solution:

1. Mit Hilfe der Reihenentwicklung von e^x und $\sin x$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + O(n^{-5}))} = \frac{1/2}{1/6} = 3.$$

2. Die Taylorreihe von $\sqrt{1+x}$ ist $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$. Damit erhalten wir:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n} &= \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \left(1 + \frac{1}{2} n^{-3} - O(n^{-6}) - 1 - \frac{1}{2} n^{-1} + O(n^{-2}) \right) \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Beh. 1: $a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Beweis durch Induktion:
   $n=1$: $a_1 = 1 \leq 2$.
   Induktionsschritt: $n \to n+1$:
   Nach Induktionsannahme: $a_n \leq 2 \implies a_n + 1 = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} < 2$. Dies zeigt Behauptung 1.

   Beh. 2:(a_n) ist monoton wachsend, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Beweis durch Induktion:
   Verankerung: $a_1 = 1 \leq \sqrt{1+1} = a_2$
   Induktionsschritt: $n \to n+1$:
   Da nach Ind.annahme $a_n \leq a_{n+1}$ ist, folgt
   $$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}$$
   Dies zeigt Behauptung 2.

   Da jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge, konvergent ist, konvergiert $a_n \to a \in \mathbb{R}$, für ein a das wir noch bestimmen müssen.

   Falls a der Grenzwert der Folge ist, muss a unter der Rekursionsvorschrift fest bleiben, d.h.
   $$a = \sqrt{1+a}.$$
   Somit gilt $a^2 = 1 + a \iff a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da $a_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ muss auch der Grenzwert $a \geq 0$ sein und damit ist
   $$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

4. Das n-te Folgenglied ist gegeben durch $a_n = 2^{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}$ und für die geometrische Summe gilt $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$. Damit erhalten wir
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}} = 2^{\frac{1}{1-1/2}} = 2^2 = 4.$$

15.4.

1. (**Prüfung FS 2014**) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$
2. Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ sei $a_n := \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?
3. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}.$$

Solution:

1. Wir bemerken $|\sin(n)| < 1$ für alle $n \geq 1$. Es folgt:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$
Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium.
2. $$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n} &= \frac{(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{n^2+n})}{(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{n^2+n})} \\ &= \frac{\frac{1}{n} - n}{(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{n^2+n})} \\ &= \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}})} \end{aligned}$$
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \neq 0$. Also ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und somit konvergiert die Reihe nicht.
3. Die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^{2015}}$ ist nicht negativ und monoton fallend. Nach dem Integraltest konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

   Das Integral konvergiert, denn es ist:
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2015}}\,dx = -\frac{1}{2014} x^{-2014} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2014}.$$
   Somit konvergiert auch die Reihe.

15.5.

1. **(Prüfung FS 2015)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 1 \qquad d_{n+1} := \sqrt{2d_n + 3}.$$

   Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

2. **(Prüfung HS 2016)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

   Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

Solution:

1. *Behauptung 1:* Die Folge ist monoton wachsend.
   Beweis: Durch Induktion nach n:
   Verankerung: $1 = d_1 < \sqrt{5} = d_2$.
   Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} > \sqrt{2d_{n-1} + 3} = d_n$. Behauptung 1 ist also bewiesen.

   Behauptung 2: Die Folge ist nach oben durch 3 beschränkt.
   Beweis: Durch Induktion nach n:
   Verankerung: $d_1 = 1 \leq 3$.
   Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} \leq \sqrt{2\cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$. Behauptung 2 ist also auch gezeigt.

   Nach dem Satz über monotone Konvergenz konvergiert jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Also konvergiert $d_n \xrightarrow{n\to\infty} d \in \mathbb{R}$.

   Der Grenzwert d muss die Gleichung $d = \sqrt{2d+3} \iff d^2 - 2d - 3 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

   Da die Folge monoton wachsend ist und $d_1 = 1 > -1$ ist, folgt $d \neq -1$. Somit ist der Grenzwert $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 3$.

2. Offensichtlich ist die Folge von unten durch 0 beschränkt.
   Behauptung 1: Die Folge ist monoton fallend.
   Beweis: Durch Induktion nach n:

   Verankerung: $d_2 = \sqrt{9-2} = \sqrt{7} < 3 = d_1$.
   Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \leq \sqrt{3d_{n-1} - 2} = d_n$.
   Damit ist Behauptung 1 gezeigt.

   Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, konvergiert nach dem Satz über monotone Konvergenz. Also konvergiert $d_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

   Der Grenzwert muss die Gleichung $d = \sqrt{3d-2} \iff d^2 - 3d + 2 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} .$$

   Behauptung 2: Für jedes $n \geq 1$ gilt $d_n \geq 2$.
   Beweis: Durch Induktion nach n:

   Verankerung: $d_1 = 3 > 2$.
   Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \geq \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$.
   Somit ist auch Behauptung 2 gezeigt.

   Also ist $d \neq 1$ und es folgt $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 2$.

15.6.

1. **(Prüfung FS 2015)** Bestimmen Sie die ersten zwei **nicht** verschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$$

   um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

2. **(Prüfung HS 2016)** Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

   durch eine Potenzreihe in x dar.

Solution:

1. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \sqrt{1-x^2}\\
F''(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\
F'''(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x^2}{2(1-x)^{3/2}} = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \underbrace{F(0)}_{=0} + 1 \cdot x - 0 - \frac{1}{6}x^3 - \dots\\
&= x - \frac{1}{6}x^3 - \dots.
\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ also } \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Da die Taylorreihe auf ihrem Konvergenzbereich gleichmässig konvergiert können wir gliedweise integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n}\, dt\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.
\end{aligned}$$

15.7. Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\, r^{-1}, & \text{falls } x \in [0,2[,\\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2,4] \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von f.

Solution: Damit $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, muss gelten $\forall x \in [2,4] : 2rx - x^2 \geq 0$. Dies ist äquivalent zu $\forall x \in [2,4] : 2r > x$. Notwendige Bedingung ist also $2r \geq 4$, das heisst, $r \geq 2$. f ist auf $[0,4] \setminus \{2\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Die Bedingung für Stetigkeit auf $[0,4]$ ist daher

$$\lim_{2>x\to 2} f(x) = f(2) = \lim_{2<x\to 2} f(x).$$

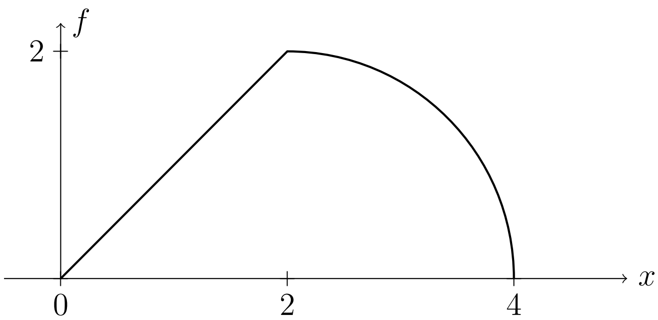
Es gilt

$$\lim_{2>x\to 2} f(x) = \lim_{2>x\to 2} 2x\, r^{-1} = 4r^{-1},$$
$$\lim_{2<x\to 2} f(x) = \lim_{2<x\to 2} \sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{4r-4} = 2\sqrt{r-1}.$$

Die Bedinung lautet also $4r^{-1} = 2\sqrt{r-1}$. Wegen $r \geq 2$ ist dies äquivalent zu $4 = r^2(r-1)$. Wir sehen, dass $r = 2$ die eine gültige Lösung ist. Somit ist f stetig für $r = 2$. Um den Graphen von f zu zeichnen, beobachten wir, dass der Graph von

$$\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$$

Teil des Kreises mit Radius r um den Punkt $(r, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Für $r = 2$ erhalten wir:



15.8.

1. **(Prüfung HS 2010)** Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

2. **(Prüfung FS 2010)** Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot(1-\cos(x))}{x\cdot\sin(x)}.$$

3. **(Prüfung FS 2011)** Bestimmen Sie die Werte von den reellen Parametern a und b so, dass der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2}$$

existiert und bestimmen Sie den Limes in diesem Fall.

Solution:

1. Nach Stetigkeit gilt $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x}{1+x})x}$. Da

$$\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x}{1+x})x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x}{1+x})}{1/x}$$

Man sieht leicht, dass es sich um eine unbestimmte Form des Typs $\frac{0}{0}$ handelt, auf die man L' Hospitals Regel anwenden kann.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x}{1+x})}{1/x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{-1/x^2} = -1.$$

Somit folgt folgt, dass $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2. Da

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{B. d H.}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1/2,$$

folgt, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(a+bx)}{x^2}$$

Da $\cos(x)-(a+bx)$ für $x=0$ der Wert $1-a$ besitzt, kann der obige Limes nur für $a=1$ existieren.

Man sieht leicht, dass es sich um eine unbestimmte Form des Typs $\frac{0}{0}$ handelt, auf die man L' Hospitals Regel anwenden kann. Somit haben wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(1+bx)}{x^2} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)-b}{2x}.$$

Da $-\sin(x)-b$ für $x=0$ der Wert $-b$ besitzt, kann der obige Limes nur für $b=0$ existieren.

Somit haben wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

15.9.

1. **(Prüfung HS 2010)** Untersuchen Sie die Folge

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2}$$

auf Konvergenz.

2. **(Prüfung FS 2010)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n} + n + 1}.$$

3. **(Prüfung FS 2011)** Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

4. **(Prüfung HS 2011)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 1}.$$

5. **(Prüfung HS 2009)** Bestimmen Sie die Menge **aller** $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+4} \cdot x^n$$

konvergiert.

Solution:

1. s_n ist für $n \geq 0$ monoton wachsend und beschränkt, weil

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2} \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 1}{2^j (j+1)^2} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2 \end{aligned}$$

gilt. Somit konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe, weil die harmonische Reihe divergiert.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt{n}+n+1} &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{n}+2)n}\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+2}\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\\ &\geq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.\end{aligned}$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned}|a_n| &= |\sin(n)\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}|\\ &= |\sin(n)|\cdot|\frac{2n-1}{(n+1)^2}|\\ &\leq |\frac{2+\frac{1}{n}}{n+2+\frac{1}{n}}| \overset{n\to\infty}{\to} 0\ .\end{aligned}$$

Somit konvergiert a_n gegen 0.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
Es gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}\geq\frac{\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+n}\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\\ &\geq \frac{1}{2n}\ ,\end{aligned}$$

für $n\geq 9$.

Es ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ für $\alpha\leq 1$ divergiert, insbesodere divergiert auch die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Nach Minoranten / Majorantenkriterium / Cauchy-Kriterium divergiert somit auch $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Somit ist die Reihe konvergent.

5. Konvergenzradius ist

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+4}}{4} = \frac{1}{4}$$

Also Konvergenz in $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, Divergenz für $|x| > \frac{1}{4}$.

Randpunkte: $x = \pm\frac{1}{4}$ einzeln untersuchen.

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{divergent, da es harmonische Reihe ist}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{konvergent, da alternierende harmonische Reihe}$$

15.10. (Prüfung HS 2009)

1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x^{(x^2)}, \quad x > 0$$

sowie

$$(f^{-1})'(2).$$

2. Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(e^{i\pi/4} \cdot z) < \sqrt{2}\}.$$

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.
Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

Solution:

1.

$$f(x) = 2x^{x^2} = 2(e^{\log(x)})^{x^2} = 2e^{x^2 \cdot \log(x)}$$

also

$$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2 \log(x)} \cdot (x^2 \log(x))' = 2x^{x^2}(2x \cdot \log(x) + x)$$

Da $f(1) = 2$ ist $f^{-1}(2) = 1$ und (Umkehrsatz)

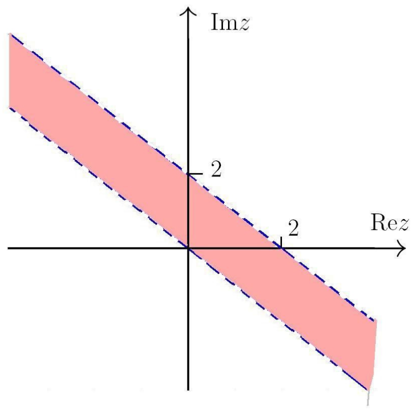
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

2. $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Rightarrow$ für $z = x+iy$:

$$(x+iy)e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+i(x+y))$$

Also ist Bedingung

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x+y < 2 \Leftrightarrow -x < y < 2-x$$



3. Für $f(t) = \sqrt[3]{t} = t^{1/3}$ ist $f'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}$. $\Rightarrow$ Lineares Taylorpolynom um $t_0 = 8$:

$$P_1 f(t) = f(8) + f'(8)(t-8) = 2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 \cdot (t-8)$$

Also Näherung für $\sqrt[3]{7}$:

$$P_1(7) = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$$

Fehlerabschätzung:

$$\text{Restglied} = \frac{f''(\xi)}{2!}(t-t_0)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}(7-8)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

für ein $\xi \in [7,8]$.

Aus $f''(t) = -\frac{2}{9}t^{-5/3}$

$$\Rightarrow |\text{Fehler}| \leq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in[7,8]}|f''(\xi)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7^{5/3}} = \frac{1}{9\cdot 7^{5/3}}.$$

15.11. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

1.
$$\int e^{-2x} \sin(6x)\, dx \ .$$

2.
$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx \ .$$

3.
$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx \ .$$

Solution:

1. Zweimal partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{2} \sin(6x) + 3 \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\cos(6x)}_{\downarrow}\, dx \\
&= -\frac{e^{-2x}}{2} \sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2} \cos(6x) - 9 \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
10 \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{2} \sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2} \cos(6x) + c \\
\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{20} \sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{20} \cos(6x) + \tilde{c} \ .
\end{aligned}$$

2. Mit der Substitution $\sqrt{x-1} = u$, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = du$ folgt es

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{u^2+1} du \\
&= [2\arctan u]\,|_1^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} \ .
\end{aligned}$$

3. Variante 1:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx - \int \frac{5x}{x^3-x^2-2x}\,dx \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx\ .\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{1}{x^2-x-2}$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B = 0\ , \\ -2A+B = 1\ . \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $A=\frac{-1}{3}$ und $B=\frac{1}{3}$.

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\left[\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx\right] \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c\ .\end{aligned}$$

Variante 2: Direkt mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\ .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B+C = 3\ , \\ -A+B-2C = -7\ , \\ -2A = -2\ . \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung folgt sofort, dass $A=1$. Das System reduziert sich auf $\begin{cases} B+C = 2\ , \\ B-2C = -6\ , \end{cases}$ die $B=2-C$ impliziert. Somit folgt $2-C-2C=-6 \quad \Rightarrow C=\frac{8}{3}, B=\frac{-2}{3}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c\ .\end{aligned}$$

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned}
& \ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c = \\
= \; & \ln(|x| \cdot |x-2| \cdot |x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\
= \; & \ln(|x|) + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\
= \; & \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c \; .
\end{aligned}$$

15.12.

1. (Basisprüfung D-INFK Winter '15) Berechnen Sie die Ableitung von
$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx$$
konvergiert. Falls ja, berechnen Sie den Wert dieses Integrals. Es wird in dieser Teilaufgabe erwartet, dass Sie verwendete Stammfunktionen **selbst** berechnen.

Solution:

1. $g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\,dt$.
Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $\frac{\cosh(t)}{t^2}$, d.h. $F'(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist
$$g(x) = F(3x) - F(1).$$
Daraus folgt:
$$g'(x) = F'(3x) \cdot 3 = 3\frac{\cosh(3x)}{(3x)^2} = \frac{\cosh(3x)}{3x^2} \; .$$

2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$.
Da $0 \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 1$ konvergiert, folgt mit

dem Majorantenkriterium, dass auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$ konvergiert.
Benutze die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \\ \Rightarrow 1 &= A(x+1) + Bx \\ \Rightarrow A &= 1 \text{ und } B = -1, \text{ d.h. } \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{1}{x^2+x}dx &= \int_0^R \frac{1}{x}dx - \int_0^R \frac{1}{x+1}dx \\ &= \log(|x|)|_1^R - \log(|x+1|)|_1^R \\ &= \log(R) - \log(R+1) + \log(2) \\ &= \log\left(\frac{R}{R+1}\right) + \log(2) \overset{R\to\infty}{\to} \log(1) + \log(2) = \log(2). \end{aligned}$$

Also $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx = \log(2)$ konvergiert.

15.13. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

Solution: Es folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

15.14. Dezimaldarstellung reeller Zahlen Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in [0,1)$ gegeben. Definiere $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{Z}$ rekursiv durch

$$x_1 := [bx], \qquad x_n := \left[b^n\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k b^{-k}\right)\right]$$

wobei für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq a\}$ die grösste ganze Zahl $\leq a$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

a) $0 \leq x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$

b) $x_n \in \{0, 1, 2, \cdots, b-1\}$

und folgern Sie daraus $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$.

2. Interpretieren Sie das Resultat als Dezimalbruch im Fall $b = 10$.

Solution:

1. Aus der Definition
$$x_n := \left[b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) \right]$$
folgt sofort
$$0 \leq b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) - x_n < 1.$$
Dividieren wir diese Abschätzung durch b^n, so folgt
$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$$
und das liefert (i). Falls wir diese Ungleichung wiederum mit b^{n+1} multiplizieren, so folgt
$$0 \leq b^{n+1} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) < b$$
und somit
$$x_{n+1} := \left[b^{n+1} \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} \right) \right] \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$
Das beweist (ii). Schliesslich folgt aus der Abschätzung $\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} \right| < \frac{1}{b^n}$ sofort
$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} =: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}.$$

2. Sei $x \in [0, 1)$ eine reelle Zahl mit der Dezimaldarstelung $x = 0.864301....$ Dann entsprechen die Nachkommastellen genau der Folge x_k welche wir oben (für $b = 10$) konstruiert haben, d.h. $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, ... (Im Allgemeinen kann eine Zahl mehrere Dezimaldarstellungen besitzten, da z.B. 0.09999999... = 0.1 gilt. So eine Mehrdeutigkeit existiert nur, wenn es eine Darstellung als endliche Dezimalzahl gibt. Unsere Konstruktion liefert in diesem Fall stets die endliche Darstellung, also 0.1 = 0.100000... anstelle von 0.0999999...)

15.15. Leibniz Kriterium Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge und definiere

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k.$$

1. Zeigen Sie, dass die Intervalle $I_k := [s_{2k-1}, s_{2k}]$ eine Intervallschachtellung bilden (d.h. $I_{k+1} \subset I_k$ und $|I_k|$ konvergiert gegen 0 für $k \to \infty$)

2. Sei $s \in \mathbb{R}$ die eindeutige reelle Zahl, sodass $s \in I_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ und folgern Sie daraus, dass $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

3. Die Monotoniebedingung ist notwendig: Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_{2n} = \frac{1}{n}$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ divergiert.

Solution:

1. Die Folge $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ der linken Randpunkte wächst monoton, da

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.$$

   Hier benutzen wir, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Analog zeigt man, dass die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der rechten Randpunkte monoton fällt, da

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0.$$

   Es folgt $I_n := [s_{2n-1}, s_{2n}] \subset [s_{2n+1}, s_{2n+2}] =: I_{n+1}$. Schliesslich erhalten wir aus $|I_n| = s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} > 0$ noch

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

   und somit bilden die Intervalle I_n eine Intervallschachtelung.

2. Sei nun $s \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Zahl, sodass $s \in I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 2k-1$ folgt aus $s \in I_k = [s_{2k-1}, s_{2k}]$ sofort $|s - s_{2k-1}| \leq |I_k| = a_{2k}$. Für $n = 2k$ folgt aus $s \in I_{k+1} = [s_{2k+1}, s_{2k+2}] \supset [s_{2k+1}, s_{2k}]$ sofort $|s - s_{2k}| \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}$. Wir haben also $|s - s_n| < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, folgt, dass s_n gegen s konvergiert und somit

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

3. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_{2n} = \frac{1}{n}$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - 1$$

und die rechte Seite divergiert gegen $+\infty$ für $n \to \infty$, da die harmonische Reihe divergiert.

15.16. Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots \tag{1}$$

1. Folgern Sie mit Hilfe des Leibnitz Kriteriums (Satz 2.7.12 in professor Marc Burger's skript) die Ungleichung:

$$\left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{für } 0 < x < 1. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass (2) auch für $x = 1$ gilt, und folgern Sie hieraus (3).

Solution:

1. Für $0 < x < 1$ ist $(\frac{x^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ und es gilt die Restglied Abschätzung:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \log(1+x)$ für $-1 < x < 1$ gilt. Die Restglied Abschätzung für $0 < x < 1$ ist folglich äquivalent zu

$$\left|\log(x+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}. \tag{3}$$

2. Da die linkte Seite von (3) in x stetig ist, erhalten wir

$$\left|\log(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \lim_{x\uparrow 1}\left|\log(x+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

und folglich

$$\log(2) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

15.17. Berechnen Sie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Tipp: *Berechne einen expliziten Ausdruck für die Potzenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ *indem Sie den Differenzialoperator* $x\frac{d}{dx}$ *zwei mal auf die geometrische Reihe* $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *anwenden.*

Solution: Aus der Formel für die geometrischen Reihe folgt die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

wobei die Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat. Die Ableitung der Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzbereiches gegeben durch die Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden. Wir erhalten somit

$$xf'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

Eine zweite Anwendung des Differenzialoperators $x\frac{d}{dx}$ liefert:

$$xf'(x) + x^2 f''(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ folgt dann
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} f''\left(\frac{1}{2}\right).$$
Die Ableitungen berechnen wir als

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

und erhalten $f'(\frac{1}{2}) = 4$, $f''(\frac{1}{2}) = 16$ und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 2 + 4 = 6.$$

15.18. Taylorpolynom Berechnen Sie die Taylorapproximation bis auf 4 ordnung.

Ordnung an der Stelle x_0 für die folgenden Funktionen und Punkte:

(a) $\dfrac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0,$

(b) $\cosh x$ und $\sinh x, \quad x_0 = 0$

(c) $\cos(e^{x^2} - 1), \quad x_0 = 0,$

(d) $\log(\cos x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

Solution: Wir nennen jedes Mal f die bedachte Funktion. Das Taylorpolynom ist

$$\begin{aligned} P_4(f, x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4. \end{aligned}$$

1. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1+x)^{-2}, & f''(x) &= 2(1+x)^{-3}, \\ f'''(x) &= -6(1+x)^{-4}, & f^{(4)}(x) &= 24(1+x)^{-5}, \end{aligned}$$

somit an der Stelle $x_0 = 0$ erhalten wir:

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

2. Nach Definition gilt

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{4}$$

somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\text{für jedes gerade } k, \quad \frac{d^k \cosh x}{dx^k} = \cosh x, \quad \frac{d^k \sinh x}{dx^k} = \sinh x, \\ &\text{für jedes ungerade } k, \quad \frac{d^k \cosh x}{dx^k} = \sinh x. \quad \frac{d^k \sinh x}{dx^k} = \cosh x \end{aligned}$$

Da $\sinh 0 = 0$ und $\cosh 0 = 1$ schliessen wir, dass

$$P_4(\cosh, 0)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{und} \quad P_4(\sinh, 0)(x) = x + \frac{x^3}{3!}.$$

3. Wir können entweder die ersten vier Ableitungen berechnen, oder aber die Potenzreihenentwicklung von cos und e^x verwenden. Das Berechnen der Ableitungen ist v.a. für die höheren Ableitungen sehr aufwändig. Falls man dies trotzdem macht ergeben sich sehr lange Terme von denen fast alle in $x = 0$ Null sind und schliesslich ergibt sich:

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = -12$$

und man kann

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$$

berechnen. Besser benutzt man die Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt (beachte: für $x = 0$ ist $e^{x^2} - 1 = 0$, deshalb müssen wir auch den cos um Null entwickeln). Da wir nur das Taylorpolynom 4. Ordnung von f berechnen wollen, brauchen wir auch nur die Tayolorpolynome der Ordnung 4.
Es ist:

$$P_4(\cos(y), 0)(x) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!}$$

und aus der Potenzreihenentwicklung von e^x erhalten wir

$$P_4(e^{x^2} - 1, 0)(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} - 1 = x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

Damit gilt

$$P_4(\cos(P_4(e^{x^2} - 1, 0), 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{2}x^4)^2 + \frac{1}{4!} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}x^4)^4 = 1 - \frac{1}{2}x^4$$
$$+ \text{ Potenzen höherer Ordnung}$$

Also ist das Taylorpolynom 4. Ordnung

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4.$$

4. Wir erinnern uns die Identitäten $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\cos x,\\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \log\cos(\frac{\pi}{4}\Big) = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\log 2,\\
f'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x,\\
f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,\\
f''(x) &= -(1+\tan^2(x)),\\
f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -(1+\tan^2(\pi/4)) = -2,\\
f'''(x) &= -2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = -2\tan(x) - 2\tan(x)^3,\\
f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4,\\
f^{(4)}(x) &= -2(1+\tan(x)^2) - 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x)),\\
f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4-12 = -16.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
P_4\left(f,\frac{\pi}{4}\right)(x) &= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) + -\frac{2}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{4}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{-16}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4\\
&= -\frac{1}{2}\log 2 - (x-\frac{\pi}{4}) - (x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^4.
\end{aligned}$$

15.19. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+e^x} \cos(e^{2t}+2t)\,dt, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Solution: Wie bekannt, lautet der Hauptsatz der Integralrechnung, dass für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $c \in [a,b]$ die Funktion $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ differenzierbar ist mit Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Wir betrachten A als Komposition: $A = (\phi \circ \beta)(x)$, wobei

$$\phi(x) = \int_0^x \cos(e^{2t}+2t)\,dt \quad \text{und} \quad \beta(x) = x^7 + e^x.$$

Die Kettenregel und der Hauptsatz der Integralrechnung liefern demnach:

$$A'(x) = \phi'(\beta(x))\beta'(x) = \cos(\exp(2(x^7 + \mathrm{e}^x)) + 2(x^7 + \mathrm{e}^x))(7x^6 + \mathrm{e}^x).$$

Was B betrifft, so können wir uns wegen der Additivität des Integrals:

$$\int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x^2+1}^{c} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (c \text{ belibig}),$$

B als

$$B(x) = (\phi_1 \circ \beta_1)(x) + (\phi_2 \circ \beta_2)(x)$$

denken, wobei

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_x^c \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, = -\int_c^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t & \beta_1(x) &= x^2 + 1, \\ \phi_2(x) &= \int_c^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, & \beta_2(x) &= x^2 + 5. \end{aligned}$$

Nochmals durch die Kettenregel und den Hauptsatz der Integralrechnung schliessen wir, dass

$$\begin{aligned} B'(x) &= \phi_1'(\beta_1(x))\beta_1'(x) + \phi_2'(\beta_2(x))\beta_2'(x) \\ &= -\frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1}2x + \frac{\sin(x^2+5)}{x^2+5}2x. \end{aligned}$$

15.20. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)

1. Zu zeigen: für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty, c]$ nach t integrierbar.
2. Sei für jedes $x \in \mathbb{R}$

   $$f(x) := \int_{-\infty}^{x^3} \exp(-t^2)dt \tag{5}$$

   Zu zeigen: f ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.
3. Bestimmen Sie alle Nullstellen der ersten Ableitung von f mit (5). Geben Sie an, ob es sich um lokale Minima oder lokale Maxima von f handelt.
4. Bestimmen Sie alle intervalle auf denen f mit (5) konvex ist.

5. Zeigen Sie, unter Benützung der Taylor-Approximation, dass es für jedes $x \in]0,1]$, ein $\eta \in]0,x[$ gibt so dass
$$\int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt = \frac{f''(\eta)x^2}{2}.$$
Wir definieren f mit (5).

Solution:

1. It suffices to show $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,-1]$, then $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,c]$ for any $c \leq -1$. Since $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-1,c]$ for any $c > -1$, $\exp(-t^2)$ is also integrable on $]-\infty,c]$ for any $c > -1$.
To show $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,-1]$, notice that $\exp(-t^2) < \exp(t)$ for any $t < -1$ and
$$\int_{-\infty}^{-1} \exp(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \exp(t)dt = \exp(-1).$$
Therefore $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,-1]$.

2. It suffices to show
$$t \to \int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt$$
is twice-differentiable. By Theorem 5.4.6 (Substitution), we have
$$f(x) = \int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt = \int_0^x \exp(-y^6)\cdot 3y^2dy.$$
Then by Theorem 5.4.1 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung), we have f is differentiable and its derivative is given by
$$f'(x) = 3x^2\exp(-x^6).$$
Since $x \to 3x^2\exp(-x^6)$ is differentiable, f is of C^2.

3. Its derivative is given by
$$f'(x) = 3x^2\exp(-x^6).$$
Then f has only one critical point $x=0$. Since $\exp(-t^2) > 0$ for any $t \in \mathbb{R}$, we know for any $\epsilon > 0$,
$$\int_{-\infty}^{(-\epsilon)^3} \exp(-t^2)dt < \int_{-\infty}^{0} \exp(-t^2)dt < \int_{-\infty}^{\epsilon^3} \exp(-t^2)dt.$$
Therefore $x=0$ is neither local minimum nor local maximum.

4. We compute

$$f''(x) = 6x(1-3x^6)\exp(-x^6) = 6x(1-\sqrt{3}x^3)(1+\sqrt{3}x^3)\exp(-x^6).$$

Then we know

$$f'' \geq 0 \quad \iff \quad x \in \left[0, 3^{-\frac{1}{6}}\right] \text{ or } x \in \left]-\infty, -3^{-\frac{1}{6}}\right].$$

5. Since f is of C^2, we apply Theorem 4.4.5 (Taylor Approximation) to f at the point $x = 0$. Hence, for any $x \in]0,1]$, there exists $\eta \in]0,x[$ such that

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)x^2}{2}.$$

Notice that $f'(0) = 0$ and

$$f(x) - f(0) = \int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt.$$

15.21. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Wir definieren folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ (-x)^{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
2. Benützen Sie die Taylor Approximation im Punkt $x_0 = 1$ zur dritten Ordnung, um eine Approximation von $(\frac{7}{5})^{\frac{7}{5}}$ anzugeben.

Solution:

(a) Because x^x is continuous for $x > 0$, $(-x)^{-x}$ is continuous for $x < 0$ and it suffices to prove $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

We have

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{y\to +\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0 \quad \to \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = 1$$

Since this function is even (or do the same computation), we have

$$\lim_{x\to 0^-} x^x = 1$$

(b) Compute the derivatives

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+\ln x)x^x \\
f''(x) &= (1+\ln x)^2 x^x + \frac{x^x}{x} \\
f'''(x) &= (1+\ln x)^3 x^x + \frac{3(1+\ln x)x^x}{x} - \frac{x^x}{x^2}
\end{aligned}$$

then

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \quad \text{for } x \text{ close to } 1$$

then

$$f\left(\frac{7}{5}\right) \approx 1 + \left(\frac{7}{5}-1\right) + \frac{2}{2}\left(\frac{7}{5}-1\right)^2 + \frac{3}{6}\left(\frac{7}{5}-1\right)^3 = \frac{199}{125}$$