1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$ Wählen Sie die einzig richtige Antwort.

(a) $\inf(]a,b]) = a$ für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$.

☐ Ja

☐ Nein

(b) Wenn $A \subset B$ und B ein Maximum besitzt, dann besitzt auch A ein Maximum.

☐ Ja

☐ Nein

(c) $\max\{\frac{1}{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} = 1$. Hier ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

☐ Ja

☐ Nein

(d) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Infimum. Dann:

☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine untere Schranke b von S, so dass $a < b < a + \epsilon$;

☐ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Minimum;

☐ a ist das Supremum der unteren Schranken.

1.2. Supremum und Infimum I Seien $A := \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ und $\inf(B)$ falls sie existieren.

1.3. Supremum und Infimum II Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?

1.4. Supremum und Infimum III Bestimmen Sie, falls vorhanden, das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen,

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$A_2 = \left\{ x + \frac{1}{x} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}.$$

1.5. Komplexe Zahlen - Wiederholung Für jede der folgenden komplexen Zahlen z, finden Sie

- ihre kartesische Form $A + iB$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihr Konjugiertes $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -\pi, \qquad z_2 = \frac{1}{i}, \qquad z_3 = \frac{1+i}{1-i},$$
$$z_4 = \frac{3}{2}i^2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_5 = -1 + i,$$
$$z_6 = \cos\alpha + i \sin\alpha, \qquad z_7 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i in dem Nenner erhalten! Z.B. $1 + i$ ist OK, $1/(1 + i)$ nicht.