2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der Aussagen ist richtig?

☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.

☐ Jede konvergente Folge ist beschränkt.

☐ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

(b) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $|c_n| = |a_n| + |b_n|$. Dann:

☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt

$$\Big|\lim_{n\to\infty} a_n\Big| + \Big|\lim_{n\to\infty} b_n\Big| = \Big|\lim_{n\to\infty} c_n\Big|;$$

☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

$$\Big|\lim_{n\to\infty} a_n\Big| = \Big|\lim_{n\to\infty} c_n\Big| - \Big|\lim_{n\to\infty} b_n\Big|;$$

☐ falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.

☐ falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen (a_n) und (b_n);

(c) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq 1$$

gilt, dann konvergiert (a_n);

☐ falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent;

☐ falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;

☐ falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a$ $\forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent.

2.2. Grenzwert Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschraňkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

(a) $a_n = \sqrt{n^2+n+5} - \sqrt{n^2+1}$;

(b) $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

(c) $c_n = \dfrac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$;

(d) $d_n = n\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n}\right)\left(1 - \frac{b}{n}\right)}\right)$ für $a, b > 0$;

(e) $e_n = \frac{e_{n-1}+e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0,\ e_2 = 1.$

2.3. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n : \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

2.4. Monotone Zahlenfolge (schriftlich) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}, \quad n \geq 2.$$

Zeigen Sie:

(a) $0 \leq a_n \leq 1$, $n \geq 1$.

(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist Nullfolge.