3.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 3 + \sqrt{\frac{2k}{3k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0 \\ \frac{3k^2+5}{k^2+2} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0 \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0\ . \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 3 + \sqrt{2/3}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \in \mathbb{R}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.
- ☐ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1,2,3,\dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1,2,3,\dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \geq 1$.

(c) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

- ☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
- ☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0.
- ☐ ist x_n beschränkt.

3.2. Grenzwert Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n+10}{2^n-1}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}-2}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

3.3. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

3.4. Konvergenz von Zahlenfolgen Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch

$$a_0 = \frac{4}{25}, \quad a_n = a_0 + a_{n-1}^2.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Beweisen Sie (induktiv) $0 < a_n < \frac{1}{5}$ und $a_{n+1} - a_n > 0$.