4.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ Falls $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \geq 1$, so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon\ \forall\, n \geq N$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
- ☐ Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so folgt: $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \geq 1$ so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon$ $\forall\, n \geq N$.
- ☐ Falls $\sum_{k=1}^{\infty} \sin a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(b) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \geq 1 :\ a_k \leq 0$. Die Reihe konvergiert...

- ☐ ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.
- ☐ ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.
- ☐ ..., falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

(c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

4.2. Grenzwert Beweise: Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}, \quad n \geq 1,$$

ist konvergent. Bestimme den Grenzwert.
Hinweis: Zeige zuerst, dass die Folge monoton wächst und durch $c = 2$ beschränkt ist.

4.3. Reihe I Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{1/n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^7 + n^4 - 1}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$. (Berechne zusätzlich den Wert der Reihe)

Begründe deine Antwort!

4.4. Reihe II Seien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen so dass

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

Folgt daraus, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(a_k)$$

konvergiert? Falls ja, muss die Aussage bewiesen werden. Falls nein, muss ein begründetes Beispiel gegeben werden.