5.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

- ☐ konvergiert nicht unbedingt.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.
- ☐ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

- ☐ konvergiert nicht unbedingt.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.
- ☐ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(c) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

5.2. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (e).

5.3. Reihe I

(a) Es seien $\alpha, \beta \geq 0$ reelle Zahlen. Berechne den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n} z^n.$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2} x^n \ ?$$

Verwende das Wurzelkriterium.

5.4. Reihen II

Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right).$$