

7.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? In allen Fällen seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$.

- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a, b) genau eine Nullstelle.

(b) Sei $f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig monoton steigende Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(3)$ an

- Falsch.
- Wahr.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f Maximum und Minimum an.

- Wahr.
- Falsch.

7.2. Zwischenwertsatz Zeige, dass die folgende Funktion bijektiv ist

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hinweis: Zwischenwertsatz, Monotonie.

7.3. Exponentialfunktion I Zeigen Sie:

- (a) Sei $q \in \mathbb{N}$. $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_0 > 0$ mit: $e^x > nx^q$ für alle $x > x_0$;
- (b) Sei $q \in \mathbb{N}$. $q!e^{-1} \notin \mathbb{Z}$;
- (c) $e \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Zeigen Sie:

$$q!e^{-1} = \sum_{n=0}^q \frac{(-1)^n q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!}$$

und

$$0 < \left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^n q!}{n!} \right| < 1$$

7.4. Exponentialfunktion II

(a) Zeigen Sie: $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in (-1, 1)$.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig.

Hinweis: Benutzen, dass $\exp(y) \leq \frac{1}{1-y}$ für alle $y \leq 0$ gilt.