

8.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien f_1, f_2 stetige Funktionen und seien g_1, g_2 unstetige Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} definiert sind. Dann gilt:

- $f_1 + f_2$ ist stetig.
- $f_1 + g_1$ ist stetig.
- $g_1 + g_2$ ist unstetig.
- $f_2 + g_2$ ist unstetig.
- $f_1 + f_2 + g_1 + g_2$ ist stetig.

(b) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.
- Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0, M]} : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

8.2. Konvergenz von Funktionenfolgen Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f ? Falls ja, bestimme f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^2, \quad n \in \mathbb{N};$

(b) $f_n(x) := 1 + x^n(1 - x)^n, \quad n \in \mathbb{N};$

(c) $f_n(x) := \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x < \frac{1}{2n}; \\ 2 - 2nx, & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$

8.3. Eine Funktionenreihe Die Funktion $\langle \cdot \rangle : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wie folgt: $\langle x \rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion (Aufgabe 1.3):

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiert die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 100x \rangle}{100} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

definieren.

- (a) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.
- (b) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}$. Konvergiert f_n nach f gleichmässig?
- (c) Ist f stetig?

8.4. Trigonometrische Funktion

- (a) Zeigen Sie,

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

- (b) Zeigen Sie,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$