9.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Definiere für $x > 0$

$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} \Big(\min\{x, x^{-1}\} \Big)^k .$$

Dann

- ☐ f ist stetig und differenzierbar
- ☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ☐ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

(b) Falls f differenzierbar ist, so ist $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ auch differenzierbar.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

(c) Sei $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, dann ist f im Nullpunkt x

- ☐ f ist stetig und differenzierbar
- ☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ☐ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

9.2. Ableitung I

(a) Definiere für $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen dieser Funktionen gilt

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \text{und} \qquad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

(b) Definiere $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\tanh'(x) = 1 - \tanh(x)^2$ gilt. Folgern Sie, dass $\tanh(x)$ eine streng monoton wachsende und bijektive Funktion ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Umkehrfunktion $\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ durch

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{1 - y^2}$$

gegeben ist.

9.3. Ableitung II Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^{-x}$

(b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \cos\left(x^{-x}\right).$

Tipp: *Der Ausdruck x^{-x} ist definiert als $x^{-x} := e^{-x \log(x)}$.*

9.4. Definiere

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) f ist differenzierbar.

(b) f' ist beschränkt und unstetig.

(c) $f'(0) = 1$, aber f ist auf keinem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, monoton wachsend.