10.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien $a < b$ relle Zahlen, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkt Funktion mit $f(a) < f(b)$. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ Falls es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$, ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = c$, so folgt, dass f stetig ist.
- ☐ Falls $g \circ f$ und g differenzierbar sind, so folgt, dass f differenzierbar ist.
- ☐ Falls f differenzierbar ist, gibt es $x_0 \in [a, b]$ so, dass
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Falls für jede in $]a, b[$ konvergierende Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ die Folge $(f(x_n))_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\Big)$ gilt, dann ist f is stetig in $]a, b[$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Falls $|f|$ stetig ist, so ist auch f stetig.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Falls f^2 und f^3 in $]a, b[$ differenzierbar sind und $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \,]a, b[$ so folgt, dass f in $]a, b[$ differenzierbar ist.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) Falls f in $]a, b[$ zweimal differenzierbar ist und $f''(x) > 0 \ \forall x \in \,]a, b[$, dann ist f streng konvex.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) Falls f in $x_0 \in \,]a, b[$ differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$, dann besitzt f ein lokales Extremum in x_0.

(A) wahr.

(B) falsch.

10.2. Ableitung III Diskutieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + \arctan(e^x)$$

im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, Konvexität und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

10.3. Konstruktion einer cutoff-Funktion

Wir definieren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) := f(1) - f(1-x).$$

(a) Zeigen Sie, dass f und g glatte Funktionen sind.

Tipp: *Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig oft differenzierbar. Zeige, dass sich die Ableitungen $f^{(n)}(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen.*

(b) Zeigen Sie, dass g monoton wachsend ist, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt und, für $x \geq 1$, $g(x) = f(1)$ erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\beta(x) = e^e f(g(x))$ monoton wachsend ist und für $x \leq 0$ gleich null und für $x \geq 1$ gleich eins ist.

(d) Konstruieren Sie für $a < b$ und $\epsilon > 0$ eine C^∞-Funktion $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\rho(x) = 1$ für $x \in [a,b]$ und $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a-\epsilon, b+\epsilon]$.