

**11.1. MC Fragen** Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion  $f$  sind richtig?

- $f$  ist differenzierbar  $\implies f$  ist stetig  $\implies f$  ist integrierbar.
- $f$  ist integrierbar  $\implies f$  ist differenzierbar  $\implies f$  ist stetig.
- $f$  ist stetig  $\implies f$  ist differenzierbar  $\implies f$  ist integrierbar.
- $f$  ist integrierbar  $\implies f$  ist stetig  $\implies f$  ist differenzierbar.
- Keine.

(b) Welche der folgenden Funktionen sind für  $x > 0$  monoton wachsend?

- $x \mapsto \int_0^x t \, dt$
- $x \mapsto \int_0^x t^2 \, dt$
- $x \mapsto \int_0^x \sin t \, dt$
- $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t \, dt$
- Weiss nicht.

*Falsch.*

(c) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion  $f$  sind richtig?

- $f$  ist beschränkt und stetig auf  $[0, 1] \implies g(x) := f(x^2)$  ist integrierbar auf  $[0, 1]$ .
- $g$  ist integrierbar und stetig auf  $[0, 1] \implies f(x) := g(\sqrt{x})$  ist integrierbar und stetig auf  $[0, 1]$ .
- $f$  ist beschränkt und stetig auf  $[0, 1] \implies g(x) := \exp(f(x))$  ist integrierbar auf  $[0, 1]$ .
- Keine.

**11.2. (Young'sche Ungleichung)** Seien  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gegeben. Zeigen Sie für alle  $a, b \geq 0$  die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Tipp:** Betrachten Sie für  $x \geq 0$  die Funktion  $f(x) := \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}x^q - ax$ . Zeigen Sie, dass diese Funktion ihr globales Minimum an der Stelle  $x_0 = a^{\frac{1}{q-1}}$  annimmt und dort der Wert  $f(x_0) = 0$  hat. Folgern Sie heraus die Young'sche Ungleichung (wobei wir  $b$  in  $x$  umbenannt haben).

### 11.3. (schriftlich) Stammfunktionen

(a) Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen mit  $[c, d] \subseteq f([a, b])$ . Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c, d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(b)  $(x^3 + 5x + 1)^{2017}(3x^2 + 5)$ ;

(c)  $e^{\cos x} \sin x$ ;

(d)  $\frac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}$ ;

(e)  $-\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ ;

(f)  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ , mit  $f$  beliebig ;

(g)  $\tan x$ .

### 11.4. Riemann Integral (schriftlich)

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p \text{ und } q \text{ natürliche Zahlen, Teilerfremd} \end{cases}$$

Zeige,  $f$  is integrierbar und  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .