12.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

- ☐ $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$
- ☐ $\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$
- ☐ $\int_a^b f(\frac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$
- ☐ $\int_a^b f(\frac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$

(b) Die Ableitung nach x von $g(x) = \int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt$ ist

- ☐ $g'(x) = \int_{2x}^0 \sin^2(t)\cos^2(t)dt.$
- ☐ $g'(x) = -\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$
- ☐ $g'(x) = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$

(c) Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx\,.$$

$I(p,q)$ ist gegeben durch

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

- ☐ $\frac{p!}{(p+q+1)!}$
- ☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$
- ☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q)!}$
- ☐ $\frac{1}{p+q+1}$
- ☐ $\frac{pq}{p+q+1}$

12.2. Das riemannsche Integral (schriftlich) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

1. f ist stetig;
2. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$;
3. $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > 0$;

Zeige

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{1}$$

Zeige anhand von Beispielen, dass jede der Voraussetzungen $1, 2, 3$ notwendig ist um (1) zu schliessen.

12.3. Berechnung von Integralen Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2 - x^2 + x}{x}\,\mathrm{d}x$; **(b)** $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt{x} - 1)\,(x + 1)\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin x\,\mathrm{d}x$; **(d)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; **(f)** $\displaystyle\int (x^3 + 5x + 1)^{1291}(3x^2 + 5)\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{5x} \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$; **(h)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}\,\mathrm{d}x$.

12.4. Integrale der Trigonometrische Funktion (schriftlich) Berechne die Integrale für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

Benütze $0 < \sin x < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sowie Übung 2 um zu zeigen, dass:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)dx$$

Schliessen daraus:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$