13.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin(2\pi x^{-1}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n} \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) $\exists\, x_0 \in]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(A) wahr.

(B) falsch.

(b) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

☐ Alles sind falsch.

13.2. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t;$

(f) $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x;$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$

13.3. Unbestimmte Integralen Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt$

(b) $\displaystyle\int \sinh(t)\cos(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt$

13.4. Wir betrachten für $b > a^2$ die Funktionen

$$f_k(x) = \frac{1}{(x^2+2ax+b)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und definieren die unbestimmtem Integrale (bzw. Stammfunktionen)

$$F_k(x) := \int f_k(x)\,dx, \qquad G_k(x) := \int x f_k(x)\,dx.$$

Beachte, dass diese Funktionen nur bis auf die Addition einer Konstante eindeutig bestimmt sind.

(a) Berechnen Sie explizite Ausdrücke für $F_1(x)$ und $G_1(x)$.

(b) Beweisen Sie, dass für $k > 1$ (und geeignete Konstanten) die folgenden Rekursionsformeln erfüllt sind:

$$G_k(x) = \frac{1}{2-2k} f_{k-1}(x) - aF_k(x)$$

$$F_k(x) = \frac{x+a}{(2k-2)(b-a^2)} f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)(b-a^2)} F_{k-1}(x).$$

Tipp: *Verwenden Sie partielle Integration oder vergleichen Sie die Ableitungen der jeweiligen Ausdrücke um die Rekursionen zu verifizieren.*