Wählen Sie die richtigen Antworten.

14.1. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Seien

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \text{ oder } x > 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

und

$$a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)dx$$

wobei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl bezeichnet. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) f ist stetig, aber f ist nicht glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) f besitzt unendlich viele lokale Minimalstellen.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) f besitzt ein lokales Maximum in $x = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $a_1 > 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

14.2. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \geq 1$ so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[a, b]$ gleichmässig gegen f konvergiert. Geben Sie für jede folgender Aussagen an ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Sei $x_0 \in \,]a, b[$. Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 differenzierbar.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Falls f_n für alle $n \geq 1$ auf $[a, b]$ beschränkt ist dann folgt, dass für jede Partition P von $[a, b]$ der Grenzwert der Untersumme $\lim_{n\to\infty} s(f_n, P)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} s(f_n, P) = s(f, P).$$

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Falls f_n für alle $n \geq 1$ stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) Falls f_n für alle $n \geq 1$ konvex ist, so ist f konvex.

(A) wahr.

(B) falsch.

14.3. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x)\sin(2\pi x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \dfrac{j}{n} \leq x < \dfrac{j+1}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \dfrac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) g ist glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) $\exists\, x_0 \in\,]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(A) wahr.

(B) falsch.

14.4. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)(n+2)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist divergent.

(d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

14.5. Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(c) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(d) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $]a, b[$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

14.6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x x^3 \ln x$. Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

(a) $x^2(3\ln x + x\ln x)e^x$

(b) $x^2(3\ln x + 1)e^x$

(c) $x^2(3\ln x + 1 + x\ln x)e^x$

(d) $3x^2$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

14.7. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) $-\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

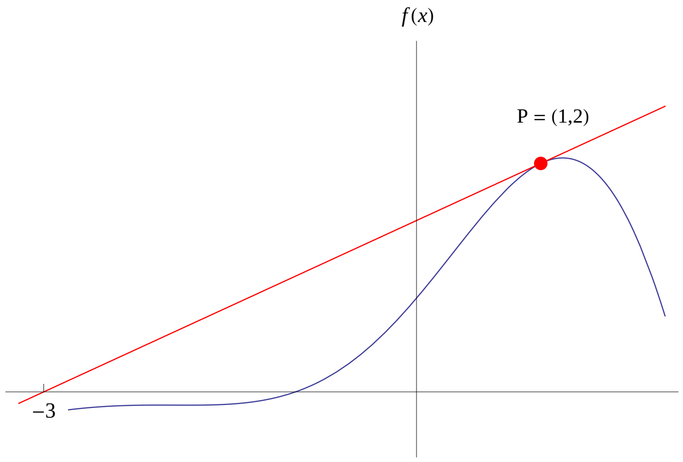
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

14.8. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

14.9. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

14.10. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f : [2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-2)^{\frac{1}{3}},$$

an der Stelle $x = 10$?

(a) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

(b) $y = \frac{1}{12}x + \frac{7}{6}$.

(c) $y = \frac{1}{12}x + 2$.

(d) $y = \frac{1}{4}x + 2$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

14.11. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = x^2$.

(d) $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

(e) $f'(x) = x + x \log x$.

(f) keiner der obigen Ausdrücke.

14.12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

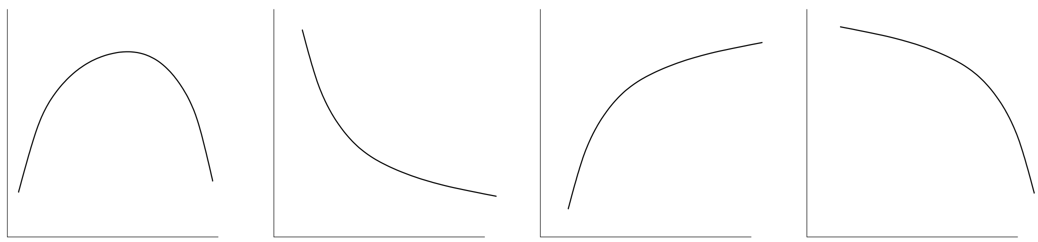
14.13. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(b) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

(c) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.

14.14. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



I II III IV

(a) I

(b) II

(c) III

(d) IV

(e) Keine.

14.15. Sei

$$\begin{aligned} f \ : \ [0,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0, 6]$.

(c) -16 ist das globale Minimum von f auf $[0, 6]$.

(d) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

(e) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

14.16. Bestimmen Sie das globale Maximum von $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$ auf dem Intervall $[0,\pi]$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

14.17. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \cos(x^2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist f auf dem Definitionsbereich D injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0,1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von f im Intervall $[1/\sqrt{2}, 1]$.

14.18. Sei $0 < \alpha < 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x - \alpha \sin x$. Welche der Aussagen gilt?

(a) f ist strikt monoton wachsend.

(b) f ist konvex.

(c) Die Umkehrfunktion g von f erfüllt $g'(0) = (1-\alpha)^{-1}$.

14.19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \neq 0 \text{ und } \ p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}.$$

Welche der Aussagen gilt?

(a) Sei $E = \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{\sqrt{3}q | q \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt $\lim_{E \ni x \to 1} f(x) = 0$.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(d) f ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

14.20. Welche der uneigentlichen Integrale konvergieren?

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

(b) $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$

(c) $\int_0^{\infty} |\cos(x^2)| dx$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(e) $\int_0^{\infty} x\cos(x^4) dx$