15.1. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei $c \in [0, \pi]$ beliebig, sei $(a_k)_{k \geq 1}$ die rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = c,$$
$$a_{k+1} = \sin(a_k), \quad k \geq 1.$$

Zeige Sie, dass $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$.

15.2.

(a) **(Prüfung FS 2015)** Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{1+i}{2+3i} \cdot e^{-i\pi/2} + e^{i\pi/2}$$

in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) **(Prüfung HS 2016)** Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = (2+i)e^{i\pi/2} + \frac{i-1}{2+i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

in der Form $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

15.3.

(a) (**Prüfung FS 11**) Brechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})}$.

(b) (**Prüfung FS 11**) Berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$.

(c) (**Prüfung HS 13**) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n},\ n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$.

15.4.

(a) (**Prüfung FS 14**) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ sei $a_n := \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}.$$

15.5.

(a) (Prüfung FS 2015) Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 1 \qquad d_{n+1} := \sqrt{2d_n + 3}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

(b) (Prüfung HS 2016) Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

15.6.

(a) (Prüfung FS 2015) Bestimmen Sie die ersten zwei **nicht** verschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) (Prüfung HS 2016) Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

durch eine Potenzreihe in x dar.

15.7. Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\, r^{-1}, & \text{falls } x \in [0, 2[, \\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2, 4] \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von f.

15.8.

(a) (Prüfung HS 2010) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}.$$

(b) (Prüfung FS 2010) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\cdot(1-\cos(x))}{x\cdot\sin(x)}.$$

(c) (Prüfung FS 2011) Bestimmen Sie die Werte von den reellen Parametern a und b so, dass der Limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(a+bx)}{x^2}$$

existiert und bestimmen Sie den Limes in diesem Fall.

15.9.

(a) (Prüfung HS 2010) Untersuchen Sie die Folge

$$s_n := \sum_{j=0}^{n}\frac{j^2-2}{2^j(j+1)^2}$$

auf Konvergenz.

(b) (Prüfung FS 2010) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt{n}+n+1}.$$

(c) (Prüfung FS 2011) Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(n)\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

(d) (Prüfung HS 2011) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}.$$

(e) (Prüfung HS 2009) Bestimmen Sie die Menge **aller** $x\in\mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+4}\cdot x^n$$

konvergiert.

15.10. (Prüfung HS 2009)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x^{(x^2)}, \quad x > 0$$

sowie

$$(f^{-1})'(2).$$

(b) Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen

$$\{z \in \mathbb{C} : \; 0 < \operatorname{Im}(e^{i\pi/4} \cdot z) < \sqrt{2}\}.$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.
Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

15.11. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int e^{-2x} \sin(6x) \, dx \; .$$

(b)

$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \, dx \; .$$

(c)

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx \; .$$

15.12.

(a) (Basisprüfung D-INFK Winter '15) Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

(b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} \, dx$$

konvergiert. Falls ja, berechnen Sie den Wert dieses Integrals. Es wird in dieser Teilaufgabe erwartet, dass Sie verwendete Stammfunktionen **selbst** berechnen.

15.13. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

15.14. Dezimaldarstellung reeller Zahlen Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in [0,1)$ gegeben. Definiere $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{Z}$ rekursiv durch

$$x_1 := [bx], \qquad x_n := \left[b^n\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k b^{-k}\right)\right]$$

wobei für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq a\}$ die grösste ganze Zahl $\leq a$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

   a) $0 \leq x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$

   b) $x_n \in \{0, 1, 2, \cdots, b-1\}$

   und folgern Sie daraus $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$.

2. Interpretieren Sie das Resultat als Dezimalbruch im Fall $b = 10$.

15.15. Leibniz Kriterium Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge und definiere

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k.$$

1. Zeigen Sie, dass die Intervalle $I_k := [s_{2k-1}, s_{2k}]$ eine Intervallschachtellung bilden (d.h. $I_{k+1} \subset I_k$ und $|I_k|$ konvergiert gegen 0 für $k \to \infty$)
2. Sei $s \in \mathbb{R}$ die eindeutige reelle Zahl, sodass $s \in I_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ und folgern Sie daraus, dass $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.
3. Die Monotoniebedingung ist notwendig: Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_{2n} = \frac{1}{n}$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ divergiert.

15.16. Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots \tag{1}$$

1. Folgern Sie mit Hilfe des Leibnitz Kriteriums (Satz 2.7.12 in professor Marc Burger's skript) die Ungleichung:
$$\left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{für } 0 < x < 1. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass (2) auch für $x = 1$ gilt, und folgern Sie hieraus (1).

15.17. Berechnen Sie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Tipp: *Berechne einen expliziten Ausdruck für die Potzenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ *indem Sie den Differenzialoperator* $x\frac{d}{dx}$ *zwei mal auf die geometrische Reihe* $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *anwenden.*

15.18. Taylorpolynom Berechnen Sie die Taylorapproximation bis auf 4 ordnung. Ordnung an der Stelle x_0 für die folgenden Funktionen und Punkte:

(a) $\dfrac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0,$

(b) $\cosh x \quad$ und $\quad \sinh x, \quad x_0 = 0$

(c) $\cos(\mathrm{e}^{x^2} - 1), \quad x_0 = 0,$

(d) $\log(\cos x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

15.19. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:
$$A(x) = \int_0^{x^7+\mathrm{e}^x} \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\,\mathrm{d}t, \qquad\qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

15.20. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)

(a) Zu zeigen: für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty, c]$ nach t integrierbar.

(b) Sei für jedes $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) := \int_{-\infty}^{x^3} \exp(-t^2)dt \tag{3}$$
Zu zeigen: f ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen der ersten Ableitung von f mit (3). Geben Sie an, ob es sich um lokale Minima oder lokale Maxima von f handelt.

(d) Bestimmen Sie alle intervalle auf denen f mit (3) konvex ist.

(e) Zeigen Sie, unter Benützung der Taylor-Approximation, dass es für jedes $x \in]0,1]$, ein $\eta \in]0,x[$ gibt so dass

$$\int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt = \frac{f''(\eta)x^2}{2}.$$

Wir definieren f mit (3).

15.21. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Wir definieren folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ (-x)^{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Benützen Sie die Taylor Approximation im Punkt $x_0 = 1$ zur dritten Ordnung, um eine Approximation von $(\frac{7}{5})^{\frac{7}{5}}$ anzugeben.