

---

CHRISTIAN BLATTER

INGENIEUR  
ANALYSIS

Kapitel 1–3

ETHZ  
Studiengänge  
Informationstechnologie,  
Elektrotechnik und Informatik

## Vorwort

Was bewegt einen Autor dazu, den unzähligen Analysiskursen für angehende Ingenieure einen weiteren hinzuzufügen? Die zu behandelnden Themen sind ja gegeben: Funktionenlehre, Differential- und Integralrechnung in einer und in mehreren Variablen, Differentialgleichungen, Vektoranalysis — und die Kollegen von den Fachdisziplinen können sich darauf verlassen, daß alles da ist.

Die Vorstellung war lange verbreitet, Ingenieur-Analysis sei im wesentlichen eine Sammlung von Rezepten zur Lösung von gewissen Standardaufgaben, und dem Dozenten obliege es in erster Linie, seinen Studenten diese Rezepte auf möglichst schonende Art beizubringen. Die betreffenden Skripten wurden dann von den Studenten als “Kochbücher” bezeichnet. Demgegenüber wird hier das didaktische Konzept vertreten und durchgezogen, daß die Ingenieur-Analysis in erster Linie einen ungeheuren Vorrat von kraftvollen Begriffen zur Verfügung stellt, die zur Modellierung und nachfolgenden Analyse von realen (physikalischen, technischen, biologischen, ...) Situationen herangezogen werden können. Dem Leser muß dabei jederzeit bewußt sein, daß das mathematische Universum in der Tiefe offen ist: Die hier behandelten Formeln, Sätze und Beispiele sind nicht der abschließende Analysisbericht, sondern das Ergebnis eines ersten Ausflugs.

Welchen Niederschlag hat nun die Ankunft von Systemen wie Maple oder Mathematica in diesem Text gefunden? Es ist wahr: Diese Systeme haben unseren mathematischen Alltag grundlegend verändert; wir benutzen sie mit Selbstverständlichkeit fürs numerische Rechnen und zum Rechnen mit Formeln, zum Disponieren und zum Experimentieren. Mit dem Begreifen ist es aber eine andere Sache; hier helfen nur treffende Begründungen und Bilder, zum andern sorgfältig gewählte Bezeichnungen und suggestive Formeln. Was nun den vorliegenden Analysiskurs betrifft, so steht eben das Geometrisch-Begriffliche im Vordergrund (nein, nicht  $\varepsilon$  und  $\delta$ ); und gerade, weil uns der Computer langweilige Rechenarbeit abnimmt, haben wir nun mehr Zeit dafür. Zum Lösen der eingestreuten Aufgaben aber soll der Student mit Lust den Computer verwenden — sofern natürlich die betreffende Ausrüstung zur Verfügung steht. Aufgaben, die sich zur Behandlung mit Maple oder mit Mathematica eignen, sind mit dem Zeichen  $\textcircled{M}$  markiert; Tutorials für diese Systeme werden allerdings nicht mitgeliefert. Es genügt, hier festzuhalten, daß Aufgaben, wie sie in dieser Analysis vorkommen, sowohl für Maple wie für Mathematica ein leichtes sein sollten.

Nocheinmal von vorn: Dieser Text handelt im wesentlichen von den Methoden und Möglichkeiten der Differential- und Integralrechnung auf der reellen Achse, in der Ebene und im dreidimensionalen Raum. Dabei geht es weniger

um Mathematik “an sich” als darum, einen Apparat bereitzustellen, mit dem sich Zustände und Vorgänge in der Außenwelt, speziell in der Mechanik, in der Technik, aber auch in der Ökonomie, rational beschreiben oder, modern ausgedrückt: modellieren lassen. Hierzu benötigen wir unter anderem

- einen reichhaltigen Begriffsvorrat,
- geometrisches Vorstellungsvermögen,
- einen Strauß von Sätzen,
- Sicherheit im Rechnen mit Formeln,
- Gewandtheit im Herbeiziehen und Anpassen von gelernten Methoden und Beispielen,
- das Gespür für die im Einzelfall erforderliche mathematische Präzision: welche Effekte ohne Schaden vernachlässigt werden können,
- die Bereitschaft, im Prinzip irgendeine Sache auf neue Weise zu betrachten und ehrlich zuende zu denken.

Im Zentrum unserer Bemühungen stehen also nicht Beweise, sondern Vorlagen zur mathematischen Beschreibung von Situationen, die sich letzten Endes (und damit kommen wir auf die Analysis) mit Hilfe von reellen Funktionen begreifen lassen, sowie Lösungsstrategien für die Probleme, die dabei zum Vorschein kommen.

Zürich, im Oktober 1995

Die ungebundene Ausgabe zum Wintersemester 2002/03 ist im wesentlichen ein korrigierter Nachdruck der 2. Auflage (Springer 1996). Um die Lesbarkeit zu verbessern, habe ich noch Zwischentitel eingefügt; dadurch hat sich die Paginierung verändert.

Greifensee, im September 2002

Christian Blatter

## Read Me

Der ganze Text ist eingeteilt in sechs Kapitel, und jedes Kapitel ist weiter unterteilt in Abschnitte. Formeln, die später noch einmal benötigt werden, sind abschnittsweise mit mageren Ziffern nummeriert. Innerhalb eines Abschnitts wird ohne Angabe der Abschnittnummer auf Formel (1) zurückverwiesen; 3.4.(2) hingegen bezeichnet die Formel (2) des Abschnitts 3.4.

Neu eingeführte Begriffe sind am Ort ihrer Definition **halbfett** gesetzt; eine weitergehende Warnung (“Achtung, jetzt kommt eine Definition”) erfolgt nicht. Definitionen lassen sich vom Sachverzeichnis her jederzeit wieder auffinden.

Sätze (Theoreme) sind kapitelweise nummeriert; die halbfette Signatur **(4.3)** bezeichnet den dritten Satz in Kapitel 4. Sätze werden im allgemeinen angesagt; jedenfalls sind sie erkenntlich an der vorangestellten Signatur und am durchlaufenden *Schrägdruck* des Textes. Die beiden Winkel  $\lrcorner$  und  $\llcorner$  bezeichnen den Beginn und das Ende eines Beweises.

Eingekreiste Ziffern nummerieren abschnittsweise die erläuternden Beispiele und Anwendungen. Der Kreis  $\circ$  markiert das Ende eines Beispiels.

Jeder Abschnitt wird abgeschlossen durch eine Serie von Übungsaufgaben. Aufgaben, die zu einem wesentlichen Teil mit einem System wie Maple oder Mathematica behandelt werden können (und sollen!), sind mit dem Zeichen  $\textcircled{M}$  versehen.

Von Anfang an bezeichnen:

$\mathbb{N}$  die (Menge der) natürlichen Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$ ,

$\mathbb{Z}$  die ganzen Zahlen,

$\mathbb{Q}$  die rationalen Zahlen,

$\mathbb{R}$  die reellen Zahlen,

$\mathbb{C}$  die komplexen Zahlen,

$\mathbb{B}$  (für “Bits”) die Menge  $\{0, 1\}$ .

Von diesen Zahlensystemen wird im Text noch ausführlich die Rede sein.

# Inhaltsverzeichnis Kapitel 1–3

## 1 Grundstrukturen

<b>1.1 Zur mathematischen Logik</b> . . . . .	1
Einige nützliche Zeichen . . . . .	1
Einige logische Grundtatsachen . . . . .	3
<b>1.2 Mengen</b> . . . . .	11
Reden über Mengen . . . . .	11
Mengenoperationen . . . . .	12
<b>1.3 Natürliche Zahlen</b> . . . . .	16
Summen- und Produktzeichen . . . . .	16
Vollständige Induktion . . . . .	19
<b>1.4 Reelle Zahlen</b> . . . . .	23
Begriff des Körpers . . . . .	23
Betrags- und Signumfunktion . . . . .	25
Von den rationalen zu den reellen Zahlen . . . . .	27
<b>1.5 Koordinaten in der Ebene und im Raum</b> . . . . .	33
Winkel und Argument . . . . .	33
Verschiedene räumliche Koordinatensysteme . . . . .	38
<b>1.6 Vektoralgebra</b> . . . . .	44
Begriff des Vektors . . . . .	44
Summe und skalare Vielfache von Vektoren . . . . .	46
Skalarprodukt . . . . .	51
Vektorprodukt . . . . .	56
Spatprodukt und andere mehrfache Vektorprodukte . . . . .	61
<b>1.7 Komplexe Zahlen</b> . . . . .	65
Rechenregeln . . . . .	66
Polarform, Eulersche Formel . . . . .	69
Wurzelziehen im Komplexen . . . . .	72

## 2 Funktionen

<b>2.1 Erscheinungsformen</b> . . . . .	78
Begriff der Funktion . . . . .	78
Erscheinungsformen . . . . .	80
Typologie der Funktionen in diesem Buch . . . . .	86
Exkurs über harmonische Schwingungen . . . . .	92
Funktionen von mehreren Variablen . . . . .	95

<b>2.2</b>	<b>Eigenschaften von Funktionen</b>	106
	Surjektiv, injektiv, bijektiv	106
	Exkurs über unendliche Mengen	107
	Umkehrfunktion	108
	Verknüpfungen von Funktionen	113
	Stetigkeit	115
	Stetigkeit der Rechenoperationen	119
	Zwischenwertsatz	121
<b>2.3</b>	<b>Grenzwerte</b>	126
	Einige Begriffe aus der allgemeinen Topologie	126
	Begriff des Grenzwerts	127
	Uneigentliche Grenzlagen und Grenzwerte	129
	Einseitige Grenzwerte	133
	Substitutionsregel für zusammengesetzte Grenzwerte	135
	Weitere Rechenregeln	136
	Asymptoten	139
<b>2.4</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	141
	Folgen als mathematisches Konstruktionswerkzeug	141
	Unendliche Reihen	143
	Absolut konvergente Reihen	145
	Funktionenreihen	149
	Potenzreihen	150
	Rechnen mit Anfangsstücken von Potenzreihen	153
	Die Binomialreihe	155
<b>2.5</b>	<b>Die Exponentialfunktion</b>	160
	Die Funktionalgleichung	160
	Die Logarithmusfunktion	162
	Zwei Standardgrenzwerte	164
	Hyperbolische Funktionen	165
	Die cis-Funktion	168
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung</b>	
<b>3.1</b>	<b>Grundbegriffe, Rechenregeln</b>	173
	Die Ableitung, auf neue Art betrachtet	173
	Exkurs über die $o$ -Notation	177
	Geschwindigkeit und Tangentenvektor	178
	Die Ableitungen der elementaren Grundfunktionen	182
<b>3.2</b>	<b>Extrema</b>	185
	Maximum vs. Supremum	185
	Der Satz vom Maximum	187
	Lokale Extremalstellen	189
	Bestimmung der globalen Extrema	191

<b>3.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung</b>	196
Verschiedene Varianten des Mittelwertsatzes	196
Grenzwerte nach de l'Hôpital	198
Monotonie und Konvexität	200
<b>3.4 Taylor-Approximation</b>	206
Zur Einführung	206
Konstruktion des Taylor-Polynoms	208
Qualität der Approximation	209
Beispiele und Anwendungen	212
Das Newtonsche Verfahren zur Nullstellenbestimmung	216
Die Taylor-Reihe als Potenzreihe	221
<b>3.5 Differentialgleichungen I</b>	226
Modellbildung, einführende Beispiele	226
Lösungsansatz	231
Differentialgleichungen erster Ordnung, allgemein	233
Ein einfaches numerisches Verfahren	236
Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Dglen	238
<b>3.6 Differentialgleichungen II</b>	243
Homogene lineare Differentialgleichungen, allgemein	243
Die charakteristische Gleichung	246
Mehrfache Eigenwerte	249
Inhomogene lineare Differentialgleichungen	252
Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten	253
Der gedämpfte harmonische Oszillator	256
Eulersche Differentialgleichungen	260
 <b>Sachverzeichnis Kapitel 1–3</b>	 266

# Sachverzeichnis Kapitel 1–3

- Abbildung 78
- Abbrechfehler 210
- abgeschlossenes Intervall 24
- abgeschlossene Menge 126
- Ableitung 175, 176
- absolut konvergente Reihe 146
- absoluter Betrag 25
  - — einer komplexen Zahl 68
  - — eines Vektors 45
- abzählbar (unendlich) 107
- allgemeine Potenz 163
- alternierende harmonische Reihe 144
  - Reihe 144
- Amplitude 92
- Anfangsbedingungen 228
- Anfangswertproblem 228, 234
- angreifend (Vektor) 44
- äquivalent (Strecken) 45
- Arcuscosinus 112
- Arcussinus 111
- Arcustangens 112
- Areacosinus 167
- Areasinus 167
- Areatangens 167
- Argument 34
- Asymptote 139
- auf (Abbildung) 106
- Aussage 1
- Aussageform 1
- autonom 239
  
- Basisvektoren 48
- Bereich konstanter Breite 5
- Bernoulli-de l'Hôpital'sche Regel 198
- Bernoullische Ungleichung 22, 203
- Betrag einer komplexen Zahl 68
  - eines Vektors 46
- Betragsfunktion 25
- Bewegungsgleichung 230
  
- bijektiv 107
- Bildmenge 79
- Bildpunkt 78
- Binomialkoeffizient 18, 155
- Binomialreihe 155
- Binomischer Lehrsatz 21
- binäre Suche 122
- Bogenlänge 90
  
- Cassinische Kurven 96
- charakteristische Gleichung 231, 246
- charakteristisches Polynom 231, 244
- cis-Funktion 168
- Coulombfeld 104
  
- Dämpfungskonstante 258
- Darstellung einer Funktion
  - (durch eine Reihe) 221
- Definitionsbereich 79
- Differentialgleichung 85, 227
  - erster Ordnung 233
  - der harmonischen Schwingung 247
  - mit konstanten Koeffizienten 230, 243, 252
  - zweiter Ordnung 238
- Differentialoperator 244
- differenzierbar 174
- Differenzmenge 13
- direkter Beweis 4
- disjunkt 13
- divergente Folge 141
- Dreiecksungleichung 25
- Dualbruch 28
- Durchschnitt 13
  
- Eigen-Kreisfrequenz 258
- Eigenwert 231, 246
- eindeutig 106
- Einheitssphäre 48

- Einheitsvektor 48
- Einheitswurzeln 75
- einschaliges Hyperboloid 97
- Einschränkung einer Funktion 111
- Element (einer Menge) 11
- elementare Funktion 82
- entgegengesetzter Vektor 46
- euklidischer Abstand 117
- Eulersche Differentialgleichung 261
- Eulersche Formeln 69, 170
- Exponentialreihe 149
- Extremalstelle 187
  
- Fakultät 18
- Fibonacci-Folge 158
- Folge 87
- Fortsetzung einer Funktion 87
- Frequenz 92
- Fundamentalsatz der Algebra 7, 75
- Funktion 78
  - von  $n$  Variablen 95
- Funktionalgleichung 84
- Funktionentheorie 88
- Funktionsterm 78
- Funktionswert 78
  
- Gaußsche Zahlenebene 65
- gemeiner Bruch 23
- geographische Breite 41
- geographische Länge 41
- geometrische Reihe 143
- geordnet (Menge, Körper) 23
- geordnetes Paar 13
- gerade Funktion 165
- Geschwindigkeit 178
- gleich (Mengen) 11
- Glieder einer Folge 87
- globale Maximalstelle 186
- globales Maximum (Minimum) 186
- Graph (einer Funktion) 35, 79
- Grenzwert 127, 141
  
- harmonische Reihe 144
  - Schwingung 92
  
- Hodograph 171
- homogene lineare
  - Differentialgleichung 230, 243
- hyperbolischer Cosinus 166
- hyperbolische Funktionen 165
- hyperbolisches Paraboloid 98
- hyperbolischer Pythagoras 166
  - Sinus 166
  - Tangens 167
- Hyperboloid 97
  
- identische Abbildung 114
- imaginäre Achse 65
- Imaginärteil 65
- Implikation 5
- implizit definierte Funktion 83
- Indexgleichung 262
- Indexpolynom 262
- indirekter Beweis 4
- Induktionsschritt 19
- Infimum 185
- inhomogene lineare
  - Differentialgleichung 252
- injektiv 106
- Inklusion 11
- Inkrement 143
- inneres Produkt 51
- innerer Punkt 126
- Integrationskonstante 233
- inverse Abbildung 108
- Isotherme 96
  
- Jet 209
  - -Extension 239
  
- Kalkül 1
- kartesisches Produkt 14
- kaskadisch 28
- Kettenregel 179
- Koeffizienten einer Potenzreihe 150
- kompakt 187
- Komplement 126
- komplexe Amplitude 94
  - Analysis 88

- komplexe Ebene 65
  - Zahlen 65
- Komponenten eines Vektors 48, 52
- konjugiert komplex 67
- konkave Funktion 201
- konstituierende Gleichungen 226
- Kontraposition 6
- konvergente Folge 141
  - Reihe 143
- Konvergenzbereich 149
- Konvergenzradius 151
- konvexe Funktion 201
- Koordinaten eines Vektors 45
- Koordinatenfunktionen 89
- Körper 23
- Kreisfrequenz 92
- kritischer Punkt 190
- Kronecker-Delta 53
- kubische Parabel 204
- Kugelkoordinaten 41
  
- Landausches  $o$ -Symbol 177
- Länge eines Vektors 45
- leere Menge 11
- Leibnizsche Formel 207
- Lemniskate 96
- linear unabhängig 56, 244
- lineare Differentialgleichung 230
- linearer Operator 243
- Linearkombination 48, 232
- linksseitige Ableitung 175
- linksseitiger Grenzwert 133
- Lipschitz-Bedingung 115
- lipstetig 115
- logarithmische Spirale 36
- Logarithmusfunktion 162
- lokal maximal (minimal) 189
- lokale Extremalstelle 189
- Lösung einer Differentialgleichung 230
  
- maximales Element 185
- Menge 11
- Meridianebene 39
- Meridiankurve 39
  
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung 196
- mittlere Geschwindigkeit 178
- modulo 35
- momentane Zuwachsrate 173
- Momentangeschwindigkeit 178
- Momentenbedingung 50
- monoton wachsend 200
  
- $n$ -Jet 209
- $n$ -te Wurzel 7, 110
- $n$ -tes Taylorsches Approximationspolynom 209
- $n$ -Tupel 14
- natürlicher Logarithmus 162
- Newtonsches Verfahren 216
- nichtorientierter Winkel 33
- Niveaufläche 97
- Niveaulinie 96
- Normierung 48
- Nullvektor 46
  
- $o$ -Symbol 177
- offenes Intervall 24
- offene Menge 126
- orientierter Winkel 34
- Orthogonaltrajektorie 241
- orthonormiert 63
- Ortsvektor 45
  
- Paraboloid 98
- Parameterbereich 99
- Parameter 89
- Parameterdarstellung 89
- Partialsomme 143
- partikuläre Lösung 253
- Pascalsches Dreieck 18
- Phase 92
- Polardarstellung 36
- Polarform einer komplexen Zahl 69
- Polarkoordinaten 35
- Polarwinkel 34
- Pol (einer Funktion) 88
- Polygonverfahren 237
- positiver Drehsinn 34
- Potenzreihe 150

- Produktzeichen 18
- Punkt 11
- punktierte Ebene 77
  
- quadratische Konvergenz 219
- Quadratwurzel 72
- Quantoren 2
  
- Randpunkt 126
- rationale Funktion 149
  - Zahlen 23
- Realteil 65
- rechte Seite einer
  - Differentialgleichung 233
- rechtsseitige Ableitung 175
- rechtsseitiger Grenzwert 133
- rechtsseitig stetig 133
- Rechtssystem 38
- reelle Achse 65
  - Funktion 87
- Regel von Bernoulli-de l'Hôpital 198
- Reihe 143
- rekursive Definition 21
- Resonanzfall 254
- Resonanzfunktion 259
- Restglied 210
- Reuleaux-Dreieck 5
- Richtungsfeld 234
- Ring 28
  
- Sattelfläche 98
- Satz von Rolle 196
- schlicht 98
- Schraubenlinie 91
- Schwerpunkt 50
- Schwingungsdauer 93
- separiert (Variable) 40
- Signumfunktion 27
- simulieren 256
- Skalar 47
- Skalarprodukt 52
- Spat 61
- Spatprodukt 61
- Spektrum 246
- Sprungstelle 133
- stationäre Lösung 259
  
- stationärer Punkt 190
- stetig 117
  - an einer Stelle 116
- Stirlingsche Näherungsformel 18
- streng monoton wachsend 200
- stückweise stetig 133
- Stützgerade 5, 201
- Summationsgrenzen 16
- Summationsvariable 16
- Summe einer Reihe 143
  - von Vektoren 46
- Summenzeichen 16
- summieren einer Reihe 17
- Superposition 95
- Supremum 185
- surjektiv 106
- symmetrische bilineare Funktion 52
- System von  $n$  Differentialgleichungen 239
  
- Tangentialraum 103
- Tangentialvektor 103
- Taylor-Reihe 209
- Taylorsches Approximationspolynom 209
- Teilmenge 11
- teleskopierende Summe 17
- Torus 40
- Transitivität 23
- Trendfunktion 180
- Tripel 14
- Tupel 14
  
- überabzählbar 107
- Umkehrfunktion 108
- Umkehrung (einer Implikation) 5
- uneigentlicher Grenzwert 131
- uneigentlich konvergent 141
- uneigentlicher Randpunkt 129
- unendliches Intervall 24
- unendliche Reihe 143
- ungerade Funktion 165
- unimodal 125
- Urbild 96

- Vektor 44, 45, 49  
Vektorfeld 103  
Vektorprodukt 56  
Vektorraum 49  
vektorwertige Funktion 88  
Verankerung 19  
Vereinigungsmenge 12  
Verfahren von Newton 216  
Vergleichskriterium 137  
vollständige Induktion 19
- Wendepunkt 203  
Wertebereich 79
- Wertetabelle 80  
Wertzuwachs 173  
Winkel 33  
Winkelgeschwindigkeitsvektor 60  
Würfelnorm 117
- Zahlfolge 87  
Zeiger 94  
Zetafunktion 148  
Zielbereich 79  
zusammengesetzte Abbildung 113  
Zwischenwertsatz 121  
Zylinderkoordinaten 39

---

CHRISTIAN BLATTER

INGENIEUR  
ANALYSIS

Kapitel 4–6

ETHZ  
Studiengänge  
Informationstechnologie,  
Elektrotechnik und Informatik

# Inhaltsverzeichnis Kapitel 4–6

## 4 Integralrechnung

<b>4.1 Der Integralbegriff</b>	1
Volumenmessung	1
Die Idee des “Integrals”	4
Riemannsche Summen	6
Das Integral als Grenzwert von Riemannschen Summen	10
Geometrische und physikalische Grössen, die sich als Integral auffassen lassen	14
<b>4.2 Hauptsätze</b>	27
Grundeigenschaften des Integrals, Mittelwertsatz	27
Das Integral als Funktion der oberen Grenze	28
Stammfunktionen	31
<b>4.3 Technik des Integrierens</b>	36
Grundformeln	36
Partielle Integration	38
Substitution	42
Integration der rationalen Funktionen	47
Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen	56
* Anwendung: Das arithmetisch-geometrische Mittel	62
<b>4.4 Uneigentliche Integrale</b>	68
Problemstellung	68
Zwei einfache Konvergenzkriterien	70
Anwendung: Die Gammafunktion	74
<b>4.5 Mehrfache Integrale</b>	77
Den Kuchen in Scheiben schneiden	77
Integrale über allgemeine ebene Bereiche	81
Integrale über räumliche Bereiche	85
Integration in Polarkoordinaten	90
Integration in Kugelkoordinaten	96
<b>4.6 Differentialgleichungen III</b>	103
Weiteres zur allgemeinen Theorie	103
Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	106
Randwertprobleme	112
Separierbare Differentialgleichungen	114
Weitere Beispiele	118

## 5 Mehrdimensionale Differentialrechnung

<b>5.1 Grundbegriffe</b>	128
* Komplex-eindimensionale Differentialrechnung	129
Richtungsableitung und partielle Ableitungen	132
Lineare Approximation des Wertzuwachses	140
Tangenten und Tangentialebenen	143
Der Gradient	145
Die verallgemeinerte Kettenregel	148
Differentiation unter dem Integralzeichen	151
<b>5.2 Höhere Ableitungen, Taylorsche Formel</b>	155
Funktionen der Klasse $C^r$	155
Taylor-Entwicklung bei zwei Variablen	157
Analyse von kritischen Punkten	160
<b>5.3 Implizite Funktionen</b>	167
Problemstellung	167
Hauptsatz, mit Formel für die Ableitung	169
Anwendung: Niveaulinien und Niveauflächen	174
<b>5.4 Die Funktionalmatrix</b>	181
Auf der Suche nach dem definitiven Ableitungsbegriff	181
Die Funktionalmatrix	184
Rang und Regularität, Jacobische Determinante	188
Variablentransformation bei mehrfachen Integralen	191
<b>5.5 Extrema</b>	196
1. Lektion: Kritische Punkte	196
Der Suchalgorithmus für globale Extrema	199
Bedingt kritische Punkte, geometrisch betrachtet	205
Die Methode von Lagrange	207
Zwei Beispiele	211
<b>5.6 * Kurvenscharen in der Ebene</b>	217
Reguläre und singuläre Scharelemente	217
Lösungsscharen von Differentialgleichungen	221
Orthogonaltrajektorien	224
Enveloppen	228
Geradenscharen	231

## 6 Vektoranalysis

<b>6.1 Vektorfelder, Linienintegrale</b>	237
Verschiedene Arten von Feldern	237
Beispiele	239
Feldlinien	243
Begriff des Linienintegrals	245

1-Ketten . . . . .	249
Konservative Felder . . . . .	251
Konservative Vektorfelder besitzen ein Potential . . . . .	253
Differentialformen . . . . .	255
<b>6.2 Die Greensche Formel für ebene Bereiche . . . . .</b>	<b>258</b>
Was ist ein “Integralsatz”? . . . . .	258
Die Greensche Formel . . . . .	259
Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder in der Ebene . . . . .	264
Das Gradientenfeld des Arguments (Polarwinkels) . . . . .	267
Strömungsfelder in der Ebene, Begriff des Flusses . . . . .	269
Divergenz und der Satz von Gauß in der Ebene . . . . .	275
<b>6.3 Der Satz von Gauß . . . . .</b>	<b>280</b>
Zur Theorie der Flächen im Raum . . . . .	280
Berechnung des Flächeninhalts . . . . .	284
Fluß eines Vektorfelds durch eine Fläche . . . . .	287
Divergenz und der Satz von Gauß im Raum . . . . .	290
Anwendung: Die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik . . . . .	295
Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	296
Geometrische Erklärung des Laplace-Operators . . . . .	300
<b>6.4 Der Satz von Stokes . . . . .</b>	<b>305</b>
Der Randzyklus einer orientierten Fläche . . . . .	305
Von der Greenschen Formel zum Satz von Stokes . . . . .	309
Geometrische Erklärung der Rotation . . . . .	311
Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder im Raum . . . . .	317
 <b>Sachverzeichnis Kapitel 4–6 . . . . .</b>	 <b>323</b>

# Sachverzeichnis Kapitel 4–6

- Ableitung 130, 186
- Additivität (Maß) 2
- Additivität (Integral) 5
- AGM 63
- analytische Funktion 131
- anheften (eines Vektors) 237
- Arbeitsintegral 246
- arithmetisch-geometrisches Mittel 63
- Astroide 195, 235
- aufintegrieren 29
- Ausschöpfung 69
  
- bedingt kritischer Punkt 200, 206
- bedingte Maximalstelle 205
- bedingtes Maximum 205
- bestimmtes Integral 33
- Bewegungsinvarianz 2
  
- $C^1$ -Funktion 140
- $C^r$ -Vektorfeld 239
- Clairautsche Differentialgleichung 233
- Coulombfeld 242
  
- Delta-Operator 299
- Descartessche Blatt 167
- Differential 186
- Differentialform 256
- Differentialoperator 245
- $n$ -dimensionales Maß 1
- $n$ -dimensionale Nullmenge 3
- divergent 69
- Divergenz 275, 290
- Divergenzsatz 275, 291
- Durchmesser 6
  
- Eigenfunktion 114
- Eigenwert 113
- $x$ -einfacher Bereich 81, 85
- einfach zusammenhängend 264
  
- einparametrische Kurvenschar 217
- Envelope 229
- Epizykloide 278
- Extremalaufgabe mit Nebenbedingungen 205
  
- Falllinie 235
- fast überall stetig 13
- fast disjunkt 4
- Feld 237
- Feldlinie 243
- Flächenfunktion 29
- Flächenformeln 262
- Flächeninhalt 285
- Flächennormale 284
- Fluß 271, 272, 288
- 1-Form 256
- $x$ -freie Differentialgleichung 118
- Funktionaldeterminante 190
- Funktionalmatrix 184
  
- Gammafunktion 74
- geschlossene Fläche 307
- globales Extremum 196
- Gradient 145
- Gradientenfeld 241
- Greensche Formel 259
- Grenzkosten 165
  
- Hüllkurve 229
- harmonisch 304
- harmonische Funktion 302
- Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 30, 32
- Hauptteil 52
- Hessesche Form 160
- holomorphe Funktion 131
- homogene lineare Differentialgleichung 107, 111
- homogene Differentialgleichung 121

- homogenes Vektorfeld 242
- implizite Funktionen 169
- indefinit 162
- Integrabilitätsbedingung 264, 317
- Integral mit einem Parameter 74
- Integralsatz 258
- Integration 103
- Jacobische Determinante 190
- Jacobische Matrix 184
- $N$ -Jet 159
- Kette 249
- 2-Kette 288
- Kettenlinie 34
- Kettenregel 149
- Klasse  $C^r$  155
- komplex differenzierbar 130
- konservativ 251
- Kontinuitätsgleichung 296
- konvergent (uneigentl. Integral) 69
- Korn 6
- kritischer Punkt 160
- Kuchen 5
- Kurvenschar 217
- Länge einer Kurve 25
- Lagrangescher Multiplikator 211
- Lagrangesche Prinzipalfunktion 211
- Laplace-Operator 299, 300
- Lebesgue-Maß 1
- Leibnizsche Regel 151
- Leibnizsche Regel "mit Extras" 153
- lineare Differentialgleichung
  - erster Ordnung 106
- Linearität (Integral) 5
- $u$ -Linie 281
- Linielement 25
- Linienintegral 246
- Maß 1
- Mittelwertsatz der Integralrechnung 27
- Monotonie (Maß) 2
- Nebenbedingungen 205
- Neilsche Parabel 189
- nichtentartet 161
- Niveaufläche 176
- Niveaulinie 174
- Norm 215
- Normale 207
- Normalenableitung 298
- Normaleneinheitsvektor 284
- Nullmenge 3
- Oberfläche 291
- Oberflächenelement 285, 288
- orientieren 287
- Orthogonaltrajektorie 224
- Partialbruchzerlegung 48, 50
- partielle Ableitung 136, 137
- partielle Funktion 137
- partielle Integration 38
- positiv definit 162
- Potential 242, 252
- Potentialfeld 252
- Potentialgleichung 300
- Pullback 91
- punktierte Ebene 137
- quadratische Ergänzung 58
- Quadratur 103
- Quellstärke 275, 290
- Randbedingung 112
- Randwertproblem 112
- Randzyklus 258, 307
- regulär 219, 242, 281
- regulärer Punkt 160, 188
- Richtungsableitung 134
- Riemannsches Integral 11
- Rotation 310
- Satz über die (lokale) Umkehrabbildung 190
- Satz über implizite Funktionen 169
- Satz von Gauß 275, 291
- Satz von Stokes 311

- Scharelement 217
- Scharparameter 217
- schlicht 224
- separierbare Differentialgleichung 114
- Simplex 208
- singuläre Lösung 233
- singulärer Punkt 242
- singuläres Scharelement zweiter Art 228
- Singularität 219
- Skalarfeld 237
- skalares Oberflächenelement 285
- stückweise glatte Kurve 249
- Stammfunktion 31
- stationär 296
- stationärer Punkt 160
- stetig differenzierbar 140
- Substitution 42
  
- Tangentialebene 143
- Taylorisches Approximationspolynom 159
- totales Differential 256
- Trägheitsmoment 20, 21
- transversal 210
  
- $u$ -Linie 281
- unbestimmt integrieren 36
- unbestimmtes Integral 31
- uneigentliches Integral 69
  
- Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel 209
  
- $v$ -Linie 281
- Variation der Konstanten 109
- Vektorfeld 237
- $C^r$ -Vektorfeld 239
- vektorielles Linienelement 247
- vektorielles Oberflächenelement 288
- verallgemeinerte Kettenregel 149
- Volumen 1
- Volumenelement 11
  
- Wärmefluß 297
- Wärmeleitungsgleichung 300
- Wärmeleitzahl 297
- Wallissches Produkt 41
- Wellengleichung 165
- Wirbeldichte 313
- wirbelfrei 304, 313
  
- $x$ -freie Differentialgleichung 118
  
- Zentralfeld 242
- Zirkulation 305
- zusammenhängend 253
- Zykloide 263
- Zyklus 258
- 2-Zyklus 291

# 1

## Grundstrukturen

### 1.1 Zur mathematischen Logik

#### Einige nützliche Zeichen

Die sogenannte mathematische Logik ist ein **Kalkül**, d.h. ein Gebäude von Rechenregeln, dessen Objekte  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}(x)$  nicht Zahlen oder Funktionen, sondern Aussagen, Aussageformen und deren Verknüpfungen sind.

Eine **Aussage** ist eine Behauptung oder eine Formel, die so, wie sie da steht, entweder wahr ist oder falsch.

*Bsp:* “Die Basiswinkel von gleichschenkligen Dreiecken sind gleich”, “ $10^{100}+1$  ist eine Primzahl”, “Camel ist eine Automarke”.

Gegebene Aussagen  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  können durch die logischen Operationen

$\implies$	hat zur Folge
$\iff$	gilt genau dann, wenn
$\vee$	oder (gemeint ist: oder/und)
$\wedge$	und
$\neg$	nicht

zu komplizierteren Aussagen verbunden werden. Es geht dann zum Beispiel darum, den “Wahrheitswert” eines so erhaltenen Ausdrucks zu berechnen, wenn die Wahrheitswerte der darin auftretenden Variablen  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\dots$  gegeben sind. Ein derartiger logischer Kalkül wird zum Beispiel beim Aufbau eines Systems, das komplizierte mathematische Sachverhalte verarbeiten soll, dringend benötigt.

Eine **Aussageform** ist ein Text oder eine Formel mit einer freien Variablen  $x$ , die für jeden Wert  $x$  eines vereinbarten Grundbereichs in eine wahre oder in eine falsche Aussage übergeht.

Bsp: Die folgenden Aussageformen beziehen sich auf reelle Zahlen  $x, y$  und natürliche Zahlen  $n$ :

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0, \\x^2 + y^2 &< 1, \\1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} &= \frac{1 - x^n}{1 - x}.\end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit Aussageformen treten weitere neuartige Zeichen auf:

$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
$\exists!$	es gibt genau ein
$\nexists$	es gibt kein

Diese sogenannten **Quantoren** erlauben Aussagen der folgenden Art:

$$\begin{aligned}\text{Bsp:} \quad \forall n \geq 1 : \quad 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \exists! t \in [0, 2] : \quad \cos t &= 0, \\ \forall x \forall y : \quad xy = 0 &\Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).\end{aligned}$$

Anstelle des  $\forall$ -Zeichens verwenden wir auch die folgende Klammerschreibweise, um den Geltungsbereich einer Formel anzugeben:

$$x^2 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ist aus dem Zusammenhang klar, daß eine Formel “für alle betrachteten  $x$ ” gilt, so kann das  $\forall$ -Zeichen oder die Angabe des Geltungsbereichs auch weggelassen werden.

$$\text{Bsp:} \quad x > y > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$$

Für unsere Zwecke brauchen wir von der mathematischen Logik nur die angegebenen Zeichen als praktische Abkürzungen sowie vor allem Klarheit über einige wenige Grunderfahrungen (s.u.).

Eine Bemerkung zum Thema “Gleichheitszeichen”. In den drei Gleichungen

$$x^2 - 12x + 35 = 0, \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

hat das Zeichen ‘=’ ganz unterschiedliche Bedeutung. Die erste ist eine “Bestimmungsgleichung” und definiert eine gewisse Lösungsmenge. Die zweite ist eine “Definitionsgleichung” und legt das Symbol  $e$  als Abkürzung für den

rechtsstehenden Ausdruck fest. Die dritte schliesslich ist eine “Identität”; sie gilt für alle  $t$  des vereinbarten Grundbereichs (z.B.  $\mathbb{R}$ ). Um die intendierte Bedeutung eines Gleichheitszeichens auch graphisch sichtbar zu machen, verwenden wir in diesem Text die folgenden Schreibweisen:

Wird einer noch freien Variablen ein bestimmter Wert zugewiesen oder wird für ein umständlich dargestelltes Objekt (das Definiens) ein bestimmter Bezeichner (Definiendum) vereinbart, so benutzen wir in der Regel das Zeichen  $:=$  bzw.  $\equiv$ . Der Doppelpunkt steht dabei auf der Seite des Definiendums. Diese Schreibweise wurde für das Programmieren erfunden und hat sich auch im mathematischen Gebrauch als äußerst praktisch erwiesen.

*Bsp:*

$$\begin{aligned}x &:= 3, \\f(t) &:= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &\equiv e.\end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel wird nicht etwa der Variablen  $t$ , sondern der Funktionsvariablen  $f$  ein bestimmter “Wert” erteilt:  $f$  ist jetzt nicht mehr irgendeine Funktion, sondern die bestimmte, durch den angeschriebenen Ausdruck definierte Funktion (wobei sich der Definitionsbereich aus dem Zusammenhang ergeben sollte).

Gilt eine Gleichung für alle Werte der darin auftretenden Variablen, so benutzen wir gelegentlich das Zeichen  $\equiv$ .

*Bsp:*

$$\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1.$$

Das Zeichen  $\doteq$  schließlich steht für die Vorstellung “ist angenähert gleich”. Was das mathematisch genau bedeutet, ist in jedem Fall wieder anders und bleibt ungesagt.

*Bsp:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\doteq 1-x \quad (x \doteq 0), \\ n! &\doteq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

## Einige logische Grundtatsachen

Nun zu den angekündigten Grunderfahrungen!

Ein mathematischer Sachverhalt kann typischerweise die Gestalt

$$\mathcal{A}$$

annehmen; dabei ist  $\mathcal{A}$  eine Aussage.

Bsp:  $\mathcal{A}_1 :=$  "Die Winkelsumme im Dreieck beträgt  $180^\circ$ ."  
 $\mathcal{A}_2 :=$  " $\sqrt{2}$  ist irrational."

Unter einem **direkten Beweis** der Aussage  $\mathcal{A}$  versteht man folgendes: Ausgehend von einer Liste (stillschweigend oder ausdrücklich) vereinbarter Axiome wird nach bestimmten Schlußweisen eine Kette von richtigen Aussagen aufgeschrieben, deren letztes Glied die Behauptung darstellt.

① Zum Beweis der Aussage  $\mathcal{A}_1$  benötigen wir das folgende Axiom: Wechselwinkel an Parallelen sind gleich (Fig. 1.1.1).  $\mathcal{A}_1$  ergibt sich dann unmittelbar aus der Figur 1.1.2. Der Leser ist aufgefordert, die einzelnen Sätze der Schlußkette selber zu formulieren.  $\circ$

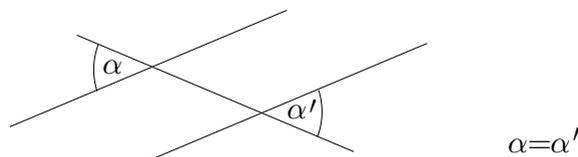


Fig. 1.1.1

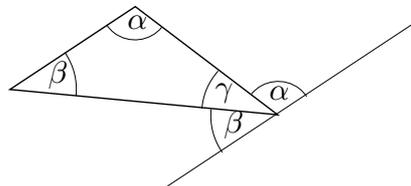


Fig. 1.1.2

Bei einem **indirekten Beweis** der Aussage  $\mathcal{A}$  nimmt man außer den vereinbarten Axiomen zusätzlich an,  $\mathcal{A}$  sei falsch — in anderen Worten: Man fügt  $\neg\mathcal{A}$  als Axiom hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer offensichtlich falschen Aussage, etwa zu " $1 = 0$ ". Hieraus schließt man, daß das zugrundegelegte (und als widerspruchsfrei angenommene) Axiomensystem mit dem Zusatzaxiom  $\neg\mathcal{A}$  nicht verträglich ist. Nach dem "Prinzip des ausgeschlossenen Dritten" muß daher  $\mathcal{A}$  zutreffen.

② Wir nehmen zusätzlich zu den Regeln der Arithmetik an,  $\mathcal{A}_2$  sei falsch. Es gibt dann zwei ganze Zahlen  $p$  und  $q$  mit  $\sqrt{2} = p/q$ , wobei wir nach Kürzen annehmen dürfen,  $p$  und  $q$  seien nicht beide gerade. Es folgt  $p^2 = 2q^2$ , somit

ist jedenfalls  $p$  gerade:  $p = 2r$ , und folglich  $q$  ungerade. Wir haben jetzt  $4r^2 = 2q^2$  bzw.  $2r^2 = q^2$ . Hier ist die linke Seite gerade, die rechte ungerade — ein Widerspruch.  $\circ$

Mathematische Sachverhalte kommen zweitens in der Form einer sogenannten **Implikation** daher:

$$\mathcal{A} \implies \mathcal{B}; \quad (1)$$

dabei sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Aussagen. Interpretation: Vielleicht trifft  $\mathcal{A}$  zu, vielleicht nicht. Sicher bzw. bewiesen ist nur: Falls  $\mathcal{A}$  zutrifft, so trifft auch  $\mathcal{B}$  zu.  $\mathcal{B}$  kann aber ohne weiteres wahr sein und  $\mathcal{A}$  gleichzeitig falsch. In anderen Worten: Die **Umkehrung** von (1), also die Implikation

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A},$$

ist mitnichten bewiesen und auch im allgemeinen falsch.

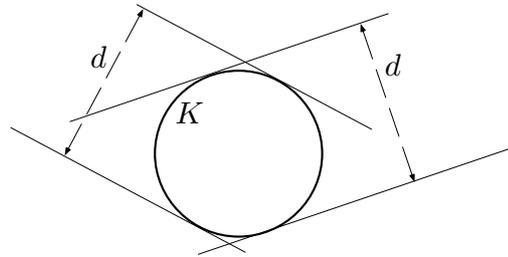


Fig. 1.1.3

③ Es geht um konvexe ebene Bereiche  $K$  (Fig. 1.1.3). Ein derartiger Bereich besitzt in jedem Randpunkt eine sogenannte **Stützgerade**; das ist eine Gerade, die  $K$  trifft, aber nicht zerlegt. Betrachte die beiden folgenden Aussagen:

$\mathcal{A}$ :  $K$  ist eine Kreisscheibe.

$\mathcal{B}$ : Der Abstand zwischen parallelen Stützgeraden von  $K$  ist konstant.

Offensichtlich gilt  $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ . Die Umkehrung  $\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$  ist aber falsch, denn es gibt **Bereiche konstanter Breite**, die nicht Kreise sind, zum Beispiel das sogenannte **Reuleaux-Dreieck** (Fig. 1.1.4).  $\circ$

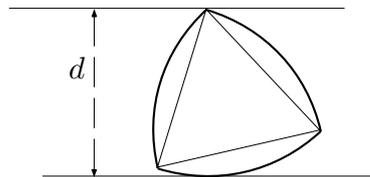


Fig. 1.1.4

Logisch äquivalent zur Implikation  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  ist deren sogenannte **Kontraposition**

$$\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A} . \quad (2)$$

Interpretation: Wenn  $\mathcal{B}$  nicht zutrifft, dann sicher auch  $\mathcal{A}$  nicht. Der Leser ist aufgefordert, hier einen Moment innezuhalten und sich durch Nachdenken davon zu überzeugen, daß (1) und (2) gleichwertig sind. Oft ist  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  der interessierende und nützliche Sachverhalt, aber die Kontraposition ist leichter zu beweisen.

④ Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck  $D$  der Seitenlänge 2 in der Ebene sowie ein Vorrat an beweglichen Dreiecken der Seitenlänge  $a < 2$ . Es geht darum, das große Dreieck mit Hilfe von kleinen zu überdecken. (Überlappungen sind ausdrücklich zugelassen, siehe die Fig. 1.1.5) Betrachte die beiden folgenden Aussagen:

$\mathcal{A}$ :  $D$  läßt sich mit 5 kleinen Dreiecken überdecken.

$\mathcal{B}$ :  $D$  läßt sich mit 4 kleinen Dreiecken überdecken.

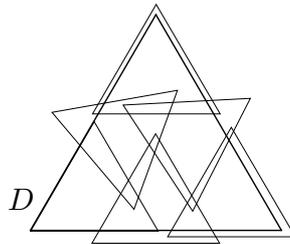


Fig. 1.1.5

Wir behaupten, es gilt

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} ,$$

und beweisen dies “durch Kontraposition”, das heißt: Wir beweisen  $\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}$ .

Angenommen, 4 kleine Dreiecke reichen nicht aus. Ein Blick auf die Fig. 1.1.6 zeigt, daß dann notwendigerweise  $a < 1$  ist. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge  $< 1$  kann aber höchstens einen der in Fig. 1.1.6 markierten Punkte überdecken, und da es sechs derartige Punkte hat, reichen 5 Dreiecke nicht aus für eine vollständige Überdeckung von  $D$ .  $\circ$

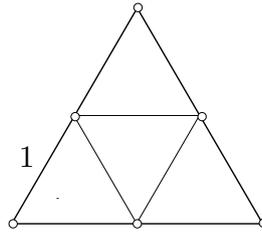


Fig. 1.1.6

Noch ein Wort zum Gebrauch der Quantoren  $\forall$  und  $\exists$ . Viele mathematische Sachverhalte haben ja die Form

$$\forall x : \mathcal{A}(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x : \mathcal{A}(x) .$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad \forall x > 0 \quad \forall y > 0 : \quad \sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} , \\ \exists c(\cdot) \quad \exists s(\cdot) : \quad c'(t) &\equiv -s(t) \quad \wedge \quad s'(t) \equiv c(t) . \end{aligned}$$

Zwei *gleiche* Quantoren dürfen vertauscht werden:

⑤ Werden in der Aussage

$$\forall c \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \exists! \xi \geq 0 : \quad \xi^n = c$$

(dieses  $\xi$  ist die  $n$ -te **Wurzel** aus  $c$ ) die beiden  $\forall$ -Quantoren vertauscht, so resultiert die gleichbedeutende Aussage

$$\forall n \geq 1 \quad \forall c \geq 0 \quad \exists! \xi \geq 0 : \quad \xi^n = c .$$

○

*Verschiedene* Quantoren dürfen hingegen auf keinen Fall vertauscht werden:

⑥ Der bekannte **Fundamentalsatz der Algebra** lautet: Jedes Polynom

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_k$  besitzt wenigstens eine Nullstelle  $\zeta \in \mathbb{C}$ . In Zeichen:

$$\forall p(\cdot) \quad \exists \zeta : \quad p(\zeta) = 0 .$$

Werden hier die Quantoren vertauscht, so kommt offensichtlicher Unsinn heraus:

$$\exists \zeta \quad \forall p(\cdot) : \quad p(\zeta) = 0 .$$

(“Es gibt eine komplexe Zahl  $\zeta$ , so daß jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten an der Stelle  $\zeta$  den Wert 0 hat.”)

○

Bei abstrakteren Situationen ist es schon schwieriger, die Reihenfolge der Quantoren im Griff zu behalten:

⑦ Die Definition der Konvergenz von Folgen lautet (wir werden später in aller Ruhe darauf eingehen): Eine Zahlfolge  $x$  konvergiert gegen die Zahl  $\xi$ , wenn es für jede vorgegebene Toleranz  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  gibt, so daß alle  $x_n$  mit Nummer  $n > n_0$  innerhalb der Toleranz  $\varepsilon$  um  $\xi$  liegen (siehe die Fig. 1.1.7) — in Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 : \quad |x_n - \xi| < \varepsilon .$$

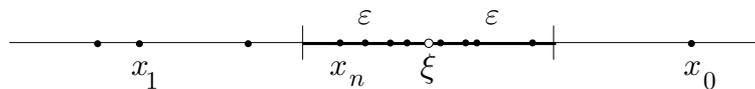


Fig. 1.1.7

Unsinnig ist hingegen die nach Vertauschen der ersten beiden Quantoren resultierende Konvergenzbedingung

$$\exists n_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > n_0 : \quad |x_n - \xi| < \varepsilon ,$$

denn das hieße ja: Es gibt ein  $n_0$ , so daß alle  $x_n$  mit Nummer  $n > n_0$  jede noch so scharfe Toleranzbedingung erfüllen, und das ist natürlich nur möglich, wenn alle diese  $x_n$  gleich  $\xi$  sind — eine höchst uninteressante Art von “Konvergenz”. ○

## Aufgaben

1. Aus einem Zoologiebuch: “Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foferante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen.” — Welche der nachstehenden Schlüsse über die Fauna von Quasiland sind zulässig?
  - (a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.
  - (b) Es gibt gebrochselte Kalupen.
  - (c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselte.
  - (d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoferant.
  - (e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoferant.

2. Hier ist eine Aussage über Quorge:
- (a) Ist ein Quorg glavul, so ropanzt er.
- Formuliere (b) die Negation, (c) die Umkehrung, (d) die Kontraposition der Aussage (a). Welche Implikationen bestehen zwischen (a), (b), (c) und (d)?
3. Welche der folgenden Aussagen sind gültige Einwände gegen das Sprichwort "Alles verstehen heißt alles verzeihen"?
- (a) Niemand versteht alles.  
 (b) Ich verstehe die Eifersucht, aber ich kann sie nicht verzeihen.  
 (c) Ich verstehe alles, aber die Eifersucht kann ich nicht verzeihen.  
 (d) Niemand würde alles verzeihen.  
 (e) Ich verzeihe die Eifersucht, obwohl ich sie nicht verstehe.
4. Welche der in Fig. 1.1.8 abgebildeten Spielkarten muß man mindestens umdrehen, um mit Sicherheit die folgende Frage (\*) beantworten zu können?
- (\*) "Sind alle Karten mit schraffierter Rückseite Asse?"

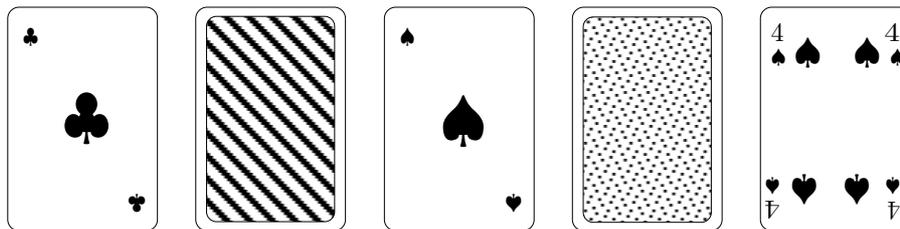


Fig. 1.1.8

5. Von den folgenden Aussagen ist genau eine richtig:
- (a) Fritz hat mehr als tausend Bücher.  
 (b) Fritz hat weniger als tausend Bücher.  
 (c) Fritz hat mindestens ein Buch.
- Wieviele Bücher hat Fritz?
6. Gegeben sind eine kreisrunde Bisquitdose sowie ein Vorrat von gleichgroßen kreisrunden Plätzchen. Zeige: Lassen sich 6 Plätzchen nebeneinander in die Dose legen, so auch deren 7. (*Hinweis*: Beweise die Kontraposition; vgl. Beispiel ④.)

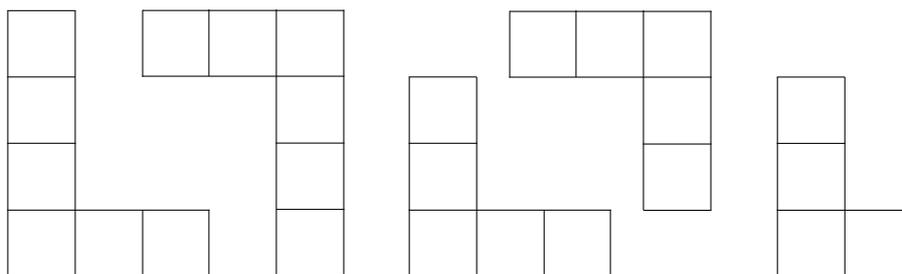


Fig. 1.1.9

7. Die fünf Teile der Figur 1.1.9 bestehen aus insgesamt 26 Einheitsquadraten. Sie sollen "achsenparallel" und ohne Überlappen in eine Schachtel mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 5.94 gelegt werden. Zeige, daß das nicht geht.

## 1.2 Mengen

### Reden über Mengen

Wir versuchen nicht zu erklären, was eine Menge ist, und wir werden auch keine “Mengenlehre” betreiben. In diesem Abschnitt geht es nur darum, die auf Mengen bezüglichen Schreibweisen und Bezeichnungen festzulegen. Alles beginnt natürlich mit der Relation

$$x \in A : \quad \text{“}x \text{ ist } \mathbf{Element} \text{ (Punkt) der Menge } A \text{”} , \\ \text{“}x \text{ in } A \text{”}$$

und ihrer Negation  $x \notin A$ , sprich: “ $x$  nicht in  $A$ ”. Davon zu unterscheiden ist die **Inklusion**, eine Relation zwischen zwei Mengen:

$$A \subset B : \quad \text{“Die Menge } A \text{ ist } \mathbf{Teilmenge} \text{ der Menge } B \text{”} ,$$

will sagen: Jedes Element von  $A$  ist auch Element von  $B$ , in Zeichen:

$$\forall x : \quad x \in A \implies x \in B .$$

Bsp:  $4 \in \mathbb{Q}, \quad \pi \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}i \in \mathbb{C}, \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C} .$

Sind  $a, b, c, \dots, p, q$  gegebene Objekte, so bezeichnet zum Beispiel  $\{a, c, p\}$  die Menge, die genau die Objekte  $a, b$  und  $p$  enthält, und  $\{a, b, \dots, q\}$  die Menge, die genau die sämtlichen Objekte  $a, b, \dots, q$  enthält. Mit dem Symbol  $\emptyset$  ist die **leere Menge** gemeint.

Ist  $X$  eine vereinbarte Grundmenge (zum Beispiel  $X := \mathbb{R}$ ) und  $\mathcal{A}(x)$  eine Aussageform, die für jedes einzelne  $x \in X$  entweder zutrifft oder eben nicht, so bezeichnet

$$\{x \in X \mid \mathcal{A}(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \{x \mid \mathcal{A}(x)\}$$

die Menge aller derjenigen  $x \in X$ , für die  $\mathcal{A}(x)$  zutrifft.

Bsp:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 2x^2 = 0\} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} ,$   
 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 - 2x^2 = 0\} = \{0\} ,$   
 $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z} \wedge z^2 = -4\} = \emptyset \quad (z = \bar{z} \text{ bedeutet: } z \text{ ist reell}).$

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind **gleich**, in Zeichen:  $A = B$ , wenn jede eine Teilmenge der andern ist. Die Gleichheit von zwei zunächst unterschiedlich aussehenden Mengen läßt sich in einfachen Fällen durch eine Schlußkette der Gestalt

$$x \in A \iff \dots \iff \dots \iff \dots \iff x \in B$$

beweisen; in schwierigeren Fällen braucht es zwei über verschiedene Wege laufende Ketten

$$x \in A \implies \dots \implies \dots \quad \dots \implies x \in B$$

und

$$x \in B \implies \dots \implies \dots \quad \dots \implies x \in A .$$

① Die folgende Situation kommt immer wieder vor: Wir sollen eine Gleichung oder ein Gleichungssystem auflösen. Was ist damit gemeint? Die gegebene Gleichung,

Bsp: 
$$\sqrt{2x - 1} = x - 2 ,$$

definiert eine Lösungsmenge  $L$ . Anstelle dieser “impliziten” Darstellung von  $L$  ist eine “explizite” Darstellung in der Form einer Liste verlangt. Typischerweise wird man nun mit Hilfe von geeigneten algebraischen Operationen aus den gegebenen Gleichungen neue, einfachere Gleichungen herleiten, an denen die gewünschte Liste unmittelbar abgelesen werden kann. In unserem Beispiel erhält man so nacheinander folgendes:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 1} = x - 2 &\implies 2x - 1 = x^2 - 4x + 4 \implies \\ x^2 - 6x + 5 = 0 &\implies x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \implies x = 5 \vee x = 1 , \end{aligned}$$

worauf man die Liste  $L' := \{5, 1\}$  als Lösungsmenge präsentieren wird. In Wirklichkeit hat man aber nur  $L \subset L'$  bewiesen und muß nun durch Einsetzen verifizieren, daß die umgekehrte Inklusion  $L' \subset L$  ebenfalls zutrifft. Dabei stellt man fest, daß die Zahl 5 die gegebene Gleichung erfüllt, die Zahl 1 aber nicht. — Zum Spaß lassen wir auch Maple (Version V.2) diese Gleichung lösen:

- `solve(sqrt(2*x - 1) = x - 2, x);`  
1, 5



## Mengenoperationen

Verschiedene Verknüpfungen erlauben, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden. Wir benötigen:

**Vereinigungsmenge  $A \cup B$ :**

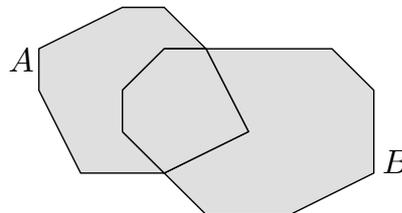


Fig. 1.2.1a

**Durchschnitt**  $A \cap B$ :

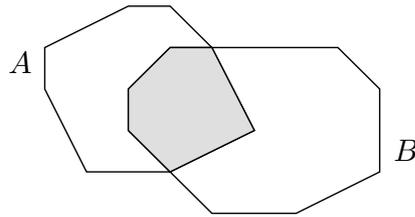


Fig. 1.2.1b

**Differenzmenge**  $A \setminus B$ :

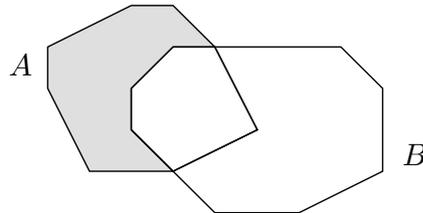


Fig. 1.2.1c

Die neuen Zeichen sind eingeführt worden, da die Schreibweisen  $A+B$ ,  $A \cdot B$ ,  $A-B$  für Konstrukte reserviert bleiben sollten, bei denen tatsächlich “gerechnet” wird: Sind  $A$  und  $B$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so definiert man

$$A + B := \{x + y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

und analog für  $-$  und  $\cdot$ . Derartige Bildungen spielen bei der sogenannten Intervallarithmetik eine Rolle.

Besitzen die Mengen  $A$  und  $B$  einen leeren Durchschnitt, so heißen sie **disjunkt**, in Zeichen ausgedrückt:  $A \supset \subset B$ . Den gegenteiligen Sachverhalt:  $A \cap B \neq \emptyset$ , “ $A$  und  $B$  schneiden sich”, bezeichnen wir kurz mit  $A \not\supset \subset B$ .

Sind  $a$  und  $b$  irgendwelche Objekte, so nennt man die Liste

$$(a, b)$$

ein **geordnetes Paar**. Dieses zweikomponentige Objekt ist wohl zu unterscheiden von der Menge  $\{a, b\}$ , bei der es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

① Die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 - 5x + 6 = 0$  bilden die zweielementige Menge  $\{2, 3\}$ . Die Lösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{array} \right\}$$

hingegen ist das geordnete Paar  $(x, y) = (1, 2)$ .



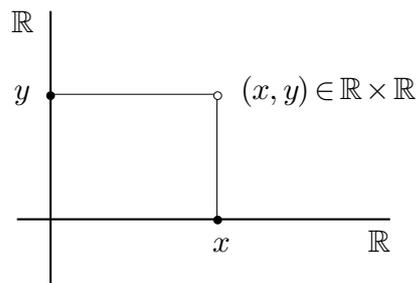


Fig. 1.2.2

$A$  und  $B$  seien beliebige Mengen. Dann heißt die Menge

$$A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

aller aus je einem Element von  $A$  und von  $B$  gebildeten Paare das **kartesische Produkt** von  $A$  und  $B$ , weil Descartes mit der Erfindung des Koordinatenkreuzes als erster die Ebene als “Produkt” von zwei reellen Achsen aufgefaßt hat (Fig. 1.2.2).

Anstelle von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  schreibt man natürlich  $\mathbb{R}^2$ . Analog ist  $\mathbb{R}^3$  die Menge

$$\{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

aller geordneten **Tripel**  $(x, y, z)$  von reellen Zahlen und allgemein  $\mathbb{R}^n$  die Menge aller sogenannten  **$n$ -Tupel**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Ist  $A$  eine beliebige endliche Menge, so bezeichnet man die Anzahl ihrer Elemente mit  $\#A$  oder auch mit  $|A|$ .

Bsp: Hier ist ein fundamentales Prinzip der Kombinatorik:

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B .$$

## Aufgaben

1. Stelle die folgenden Mengen in geeigneten Figuren anschaulich dar:

- (a)  $\{t \in \mathbb{R} \mid 4 < t^2 \leq 16\}$ ,      (b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| = 8\}$ ,
- (c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$ ,
- (d)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2}\right\}$ ,
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$ ,
- (f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| + 2 \leq |x|\}$ .

2. Zwei an sich unabhängige reelle Größen  $x$  und  $y$  sind miteinander verknüpft durch die Einschränkung

$$x^2 + 6x \leq 8y - y^2 . \quad (*)$$

- (a) Man verschaffe sich eine Übersicht über die Gesamtheit der möglichen "Zustände"  $(x, y)$ . Gemeint ist: Man zeichne eine Figur.
- (b) Welchen Wert kann die Größe  $x$  unter der Bedingung  $(*)$  höchstens annehmen, und wie müßte  $y$  gewählt werden, damit dieser Maximalwert von  $x$  tatsächlich realisiert werden kann?
3. Es bezeichne  $A$  das Innere des Oktaeders mit den sechs Ecken  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1)$ . Man stelle diese Menge auf möglichst einfache Weise in der Form  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$  dar.
4. Naef (ein Spielzeugfabrikant) produziert einen kugelförmigen Spielwürfel, auf dem die Zahlen von 1 bis 6 aufgemalt sind. Wenn dieser "Würfel" auf einer horizontalen Ebene zur Ruhe kommt, ist allemal eine Zahl zuoberst. Überlege, wie dieses Objekt funktioniert, und stelle dessen Hauptkomponente in der Form  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$  dar.
5. Es sei  $S$  die Menge aller natürlichen Zahlen ohne quadratischen Teiler,  $T$  die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau drei Primfaktoren (1 ist keine Primzahl) und  $U$  die Menge aller natürlichen Zahlen  $\leq 200$ . Bestimme  $S \cap T \cap U$ .
6. Bestimme die Lösungsmenge  $L \subset \mathbb{R}^2$  des folgenden Gleichungssystems:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} + y = 1 \\ 2x - \sqrt{24y+25} = 5 \end{array} \right\} .$$

(Hinweis:  $\sqrt{c}$  ist nur für  $c \geq 0$  definiert und bezeichnet die nichtnegative Lösung  $t$  der Gleichung  $t^2 = c$ .)

## 1.3 Natürliche Zahlen

Es geht hier um die Verwendung der natürlichen Zahlen zum Zählen und zum Nummerieren, weniger ums Rechnen in  $\mathbb{N}$ . — Im folgenden sind  $j, k, l, m, n$  Variable für natürliche oder ganze Zahlen, auch wenn das nicht an jeder Stelle ausdrücklich gesagt wird. Für Mengen von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen verwenden wir die folgende Notation:

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid p \leq k \leq q\} =: [p..q].$$

### Summen- und Produktzeichen

Wir beginnen mit der Erklärung des **Summenzeichens**  $\sum$ : Es seien  $p$  und  $q$  beliebige ganze Zahlen, und die Objekte  $a_k$  (Zahlen, Vektoren, Funktionen, ...) seien für alle  $k \in [p..q]$  definiert. Dann ist

$$\sum_{k=p}^q a_k := \begin{cases} 0 & (q < p), \\ a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_q & (q \geq p). \end{cases}$$

Die Anzahl der Summanden ist also  $= q - p + 1$ . Die Variable  $k$  heißt **Summationsvariable**. Der Wert der Summe hängt ab von den Werten der Summanden  $a_k$  und von den **Summationsgrenzen**  $p$  und  $q$ , hingegen nicht davon, welcher Buchstabe als Summationsvariable gewählt wurde.

① Sei etwa

$$a_k := \frac{(k+1)(k+3)}{2k-1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_k &= \sum_{j=1}^5 a_j = \sum_{j=1}^5 \frac{(j+1)(j+3)}{2j-1} \\ &= \underbrace{\frac{2 \cdot 4}{1}}_{j=1} + \frac{3 \cdot 5}{3} + \frac{4 \cdot 6}{5} + \frac{5 \cdot 7}{7} + \underbrace{\frac{6 \cdot 8}{9}}_{j=5} = \frac{422}{15}. \end{aligned}$$

Die Zuweisungen

$$b_0 := 3, \quad b_1 := 5, \quad b_2 := 6, \quad b_3 := 4, \quad b_4 := 2$$

liefern

$$\sum_{k=0}^4 b_k \cdot 10^k = 24653, \quad \sum_{k=0}^4 b_k \cdot 10^{-k} = 3.5642.$$

Mit den doppelt indizierten Summanden  $c_{kj} := k/j^2$  lassen sich zum Beispiel die folgenden Summen bilden:

$$\sum_{k=3}^6 c_{k4} = \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{9}{8},$$

$$\sum_{j=1}^3 c_{2j} = \frac{2}{1} + \frac{2}{4} + \frac{2}{9} = \frac{49}{18}.$$

○

Gelegentlich ist es nützlich, unter dem Summenzeichen eine Variablentranslation vorzunehmen, zum Beispiel “ $k + 1$  durch  $k$  zu ersetzen”. Das geht so vor sich: Im Ausdruck für  $a_k$  wird die Summationsvariable  $k$  vermöge  $k := k' - r$  bzw.  $k + r = k'$  durch eine neue Variable  $k'$  ausgedrückt, wobei die “Verschiebungszahl”  $r$  frei gewählt werden kann. Damit dieselben Dinge wie vorher aufsummiert werden, muß die Variable  $k'$  von  $p+r$  bis  $q+r$  laufen. Am Schluß kann der Strich wieder weggelassen werden. Im ganzen sieht das so aus:

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k'=p+r}^{q+r} a_{k'-r} = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}.$$

② In der Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (1)$$

ist

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \quad (2)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &\text{(eine **teleskopierende Summe**)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Es ist also gelungen, die Reihe (1) zu **summieren**, das heißt: eine  $\sum$ -freie Darstellung von  $S_n$  anzugeben. Wir behandeln nun dieses einfache Beispiel noch einmal mit Hilfe einer Variablentranslation. Aufgrund von (2) ist

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}. \quad (3)$$

In der zweiten Summe setzen wir  $k := k' - 1$  bzw.  $k + 1 = k'$ ; dann geht  $k'$  von 2 bis  $n + 1$ , und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k},$$

wobei der Strich zum Schluß wieder weggelassen wurde. Aus (3) ergibt sich nun

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

wie oben. ○

Analog zum Summenzeichen wird das **Produktzeichen**  $\prod$  erklärt:

$$\prod_{k=p}^q a_k := \begin{cases} 1 & (q < p), \\ a_p \cdot a_{p+1} \cdot \dots \cdot a_q & (q \geq p). \end{cases}$$

Beachte: Das ‐leere Produkt‐ hat definitionsgemäß den Wert 1. Als Beispiel diene die **Fakultät**(funktion)

$$0! := 1, \quad n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \geq 1)$$

(gelesen ‐ $n$ -Fakultät‐). Bekanntlich zählt  $n!$  die Anzahl Arten,  $n$  unterscheidbare Objekte in eine Reihe zu legen oder von 1 bis  $n$  zu nummerieren. Im Gegensatz zur Summe  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  läßt sich  $n!$  nicht mühelos berechnen. Für große  $n$  gibt es die **Stirlingsche Näherungsformel**

$$n! \doteq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Bsp:  $10! = 3\,628\,800$ ; die Stirlingsche Formel liefert  $10! \doteq 3\,598\,695.622$ .

Mit Hilfe der Fakultät werden die sogenannten **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

(gelesen ‐ $n$  tief  $k$ ‐) gebildet, die ebenfalls in der Kombinatorik eine Rolle spielen. Beispiel: Eine  $n$ -elementige Menge besitzt genau  $\binom{n}{k}$  verschiedene  $k$ -elementige Teilmengen (s.u.). Die Binomialkoeffizienten genügen verschiedenen Identitäten, so zum Beispiel der folgenden, die dem sogenannten **Pascalschen Dreieck** (Tabelle der Binomialkoeffizienten) zugrundeliegt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \quad (4)$$

□ Indem man auf den Generalnenner bringt, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} (k + (n-k+1)) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}. \quad \square \end{aligned}$$

## Vollständige Induktion

Zu den Grundeigenschaften von  $\mathbb{N}$  gehört das Prinzip (Axiom) der **vollständigen Induktion**:

*Es sei  $\mathcal{A}(n)$  eine Aussageform über natürliche Zahlen  $n$ . Trifft  $\mathcal{A}(0)$  zu und gilt für alle  $n \geq 0$  die Implikation  $\mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1)$ , so trifft  $\mathcal{A}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  zu.*

Um mit Hilfe dieses Prinzips nachzuweisen, daß  $\mathcal{A}(n)$  für alle natürlichen  $n$  zutrifft, hat man hiernach folgendes zu tun:

1. Man muß verifizieren, daß  $\mathcal{A}(0)$  zutrifft. (**Verankerung**)
2. Man muß einen für alle  $n \geq 0$  gültigen Beweis liefern, daß die Aussage  $\mathcal{A}(n+1)$  zutrifft, wenn man annimmt, daß  $\mathcal{A}(n)$  zutrifft. (**Induktionsschritt**)

Wir geben dazu zwei Beispiele.

③ Es soll das folgende Sätzlein bewiesen werden: Ist  $n \geq 2$  und  $0 < x_k < 1$  für  $1 \leq k \leq n$ , so gilt

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) > 1 - \sum_{k=1}^n x_k. \quad (5)$$

(Diese Ungleichung ist dann interessant, wenn alle  $x_k$  sehr klein sind. Sie besagt: Werden mehrere Rabatte hintereinander abgezogen, so muß man mehr bezahlen, als wenn einfach die Rabattsätze addiert werden.)

□ Wir bezeichnen die zu beweisende Formel (5) mit  $\mathcal{A}_{>}(n)$ . Verankerung: Für  $n := 1$  gilt anstelle von  $>$  das Gleichheitszeichen, d.h.  $\mathcal{A}_{=}(1)$  trifft zu. — Induktionsschritt: Wir zeigen, daß  $\mathcal{A}_{>}(n+1)$  schon aus der abgeschwächten Voraussetzung  $\mathcal{A}_{\geq}(n)$  folgt:

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) = \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \cdot (1 - x_{n+1})$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot (1 - x_{n+1}) = 1 - \sum_{k=1}^n x_k - x_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k x_{n+1} \\
&> 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k .
\end{aligned}$$

┘  
○

④ Es bezeichne  $T(k, n)$  die Anzahl der verschiedenen  $k$ -elementigen Teilmengen der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Durch Induktion “nach  $n$ ” beweisen wir:

$$T(k, n) = \binom{n}{k} \quad (0 \leq k \leq n) .$$

Die Aussage  $\mathcal{A}(n)$  hat hier folgende Form: Für alle  $k$  zwischen 0 und  $n$  trifft ein bestimmter Sachverhalt zu.

┘ Verankerung:  $T(0, 0) = 1 = \binom{0}{0}$ . — Induktionsschritt: Man erhält eine  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n, n+1\} = \{1, \dots, n\} \cup \{n+1\}$ , indem man

- entweder eine  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$  bildet
- oder eine  $(k-1)$ -elementige Menge von  $\{1, \dots, n\}$  bildet und das Element  $n+1$  hinzunimmt.

Die Anzahlen der genannten Teilmengen stehen hiernach in der folgenden Beziehung zueinander:

$$T(k, n+1) = T(k, n) + T(k-1, n) .$$

Nach Induktionsvoraussetzung und (4) ist folglich

$$T(k, n+1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} .$$

┘  
○

⑤ Wir betrachten das Produkt

$$P := \prod_{k=1}^n (1 + x_k) = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \cdots (1 + x_n)$$

als Funktion der Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . Wird rechter Hand tatsächlich ausmultipliziert, so entstehen insgesamt  $2^n$  Summanden. Jeder Summand ist ein Produkt einer gewissen Auswahl von insgesamt  $n$  Einsen und Ixen. Ordnet man die Summanden nach steigender Aufladung mit Ixen, so hat man

$$\begin{aligned}
P = & 1 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \left( \underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n}_{\text{alle } \binom{n}{2} \text{ möglichen Produkte von je zwei Ixen}} \right) \\
& + \left( \underbrace{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n}_{\text{alle } \binom{n}{3} \text{ möglichen Produkte von je drei Ixen}} \right) + \dots + x_1x_2 \cdots x_n .
\end{aligned}$$

Es sei jetzt  $x$  eine fest gegebene reelle (oder komplexe) Zahl. Setzen wir alle  $x_k := x$ , so hat einerseits  $P$  den Wert  $(1+x)^n$ , und andererseits hat jedes Produkt von  $r$  Ixen den Wert  $x^r$ . Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k\end{aligned}$$

(**Binomischer Lehrsatz**). Wir werden später sehen, daß diese Formel auf beliebige reelle Exponenten  $\alpha$  (anstelle von  $n$ ) umgeschrieben werden kann. Dabei entsteht die sogenannte Binomialreihe.  $\circ$

In diesen Zusammenhang gehört das Prinzip der **rekursiven Definition**. Eine Folge  $x$ . (zum Beispiel von Näherungswerten für eine gesuchte Größe  $\xi$ ) läßt sich festlegen durch die Vorgabe von  $x_0$  und eine Vorschrift, die für jedes  $n \geq 0$  den Wert  $x_{n+1}$  zu berechnen gestattet, wenn alle vorangehenden Werte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  bekannt sind. Computer lieben das heiß; besonders, wenn zur Berechnung von  $x_{n+1}$  nur die zuletzt gefundenen Werte  $x_k$  gebraucht werden. Es ist dann nicht nötig, alle  $x_k$  zu speichern, und das Rechenprogramm hat die Struktur einer "Schleife".

⑥ Es sei  $c > 1$  eine fest vorgegebene Zahl. Betrachte die durch

$$x_0 := c, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \quad (n \geq 0)$$

rekursiv definierte Folge  $x$ . von positiven Zahlen. Wir zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{c}.$$

┌ Man hat

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + c - 2x_n\sqrt{c}) = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{2x_n}; \quad (6)$$

insbesondere ist  $x_n > \sqrt{c} > 1$  für alle  $n \geq 0$ . Wir schreiben (6) in der Form

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = q_n(x_n - \sqrt{c})$$

mit

$$0 < q_n := \frac{x_n - \sqrt{c}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

und schließen daraus, daß nach jedem Rechenschritt der Abstand zwischen  $x_n$  und  $\sqrt{c}$  höchstens noch halb so groß ist wie vorher. Hieraus folgt schon die Behauptung.  $\lrcorner$

In Wirklichkeit ist die Konvergenz noch wesentlich besser, nämlich “quadratisch”. Nach einigen Schritten ist bestimmt  $x_n - \sqrt{c} < 1$ , und von da an sorgt (6) bzw.

$$x_{n+1} - \sqrt{c} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{c})^2$$

dafür, daß sich die Zahl der richtigen Dezimalstellen mit jedem Schritt im wesentlichen verdoppelt, denn es ist zum Beispiel  $0.001^2 = 0.000001$ .

Bsp: Für  $c := 100$  erhält man nacheinander

100.0  
50.5  
26.24  
15.03  
10.84  
10.03  
10.000 053  
10.000 000 00 .

○

## Aufgaben

1. Zeige mit vollständiger Induktion:

- (a) Durch  $n$  Geraden “in allgemeiner Lage” wird die Ebene in  $\frac{n^2 + n + 2}{2}$  Gebiete zerlegt. (*Hinweis:* Jede weitere Gerade zerlegt eine ganz bestimmte Anzahl der schon vorhandenen Gebiete in zwei Teile.)
- (b) Für beliebiges  $x > -1$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernoullische Ungleichung}) .$$

- (c) Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen  $< 10n$  beträgt  $20n^2$ .
- (d)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,      (e)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ .

2. (M) Bestimme den Koeffizienten beim Term  $x^4 y^7$  in der Entwicklung von

$$(3 - 5x + 7y)^{13} .$$

## 1.4 Reelle Zahlen

### Begriff des Körpers

Nicht ganzzahlige Größen werden bekanntlich mit Hilfe von gemeinen Brüchen oder mit Hilfe von Dezimal- bzw. Dualbrüchen dargestellt oder wenigstens approximiert.

Die **gemeinen Brüche**

$$\frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_{\geq 1})$$

bilden zusammen den Körper  $\mathbb{Q}$  der **rationalen Zahlen**. In der Analysis arbeiten wir mit dem umfassenderen Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen — davon unten mehr. Der Begriff **Körper** bezeichnet den Sachverhalt, daß in dem betreffenden System die vier Grundrechenarten unbeschränkt ausführbar sind (ausgenommen natürlich die Division durch 0) und daß die üblichen Rechengesetze gelten, zum Beispiel

$$\begin{aligned}x + y &= y + x, & (x + y) + z &= x + (y + z) \\0 \cdot x &= 0, & -(-x) &= x, \\x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z,\end{aligned}$$

allgemeiner:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n} x_i y_k, \\x \cdot y = 0 &\implies x = 0 \vee y = 0\end{aligned}$$

und weitere dieser Art.

Darüberhinaus sind  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  **geordnet**, das heißt: Für je zwei Zahlen  $x$  und  $y$  gilt genau eine der Beziehungen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Bezüglich dieser Ordnung gelten die üblichen Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen, zum Beispiel

$$\begin{aligned}(x < y) \wedge (y < z) &\implies x < z \quad (\mathbf{Transitivität}), \\x < y &\implies x + a < y + a, \\(a > 0) \wedge (x < y) &\implies ax < ay, \\(a < 0) \wedge (x < y) &\implies ax > ay \quad (!), \\x > y > 0 &\implies 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}\end{aligned}$$

und weitere dieser Art.

Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  der Form

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =: [a, b]$$

heißt ein **abgeschlossenes Intervall**, und

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =: ]a, b[$$

ist ein **offenes Intervall**. Für **unendliche Intervalle** verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad \mathbb{R}_{> a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$



Fig. 1.4.1

① Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 1} < 3x - 4? \quad (*)$$

Da  $x - 1$  beiderlei Vorzeichen annehmen kann, darf man nicht einfach heraufmultiplizieren, sondern muß Fallunterscheidungen vornehmen. — Im Fall  $x > 1$  ist

$$\begin{aligned} (*) &\iff x^2 + 2x < (x - 1)(3x - 4) = 3x^2 - 7x + 4 \\ &\iff 2x^2 - 9x + 4 > 0 \\ &\iff 2(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ &\iff x > 4 \end{aligned}$$

( $x < \frac{1}{2}$  ist mit  $x > 1$  nicht vereinbar).

Gilt jedoch von vorneherein  $x < 1$ , so erhält man analog

$$\begin{aligned} (*) &\iff x^2 + 2x > (x - 1)(3x - 4) \\ &\vdots \\ &\iff 2(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \\ &\iff \frac{1}{2} < x < 1. \end{aligned}$$

Die gesuchte Menge ist somit die Vereinigung der beiden Intervalle  $\mathbb{R}_{>4}$  und  $] \frac{1}{2}, 1[$ , siehe die Fig. 1.4.1.  $\bigcirc$

## Betrags- und Signumfunktion

Mit Hilfe der Ordnung definiert man die **Betragsfunktion** (Fig. 1.4.2)

$$|x| := \text{abs } x := \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x \leq 0). \end{cases}$$

Bsp:  $-5 < 0 \implies |-5| := -(-5) = 5.$

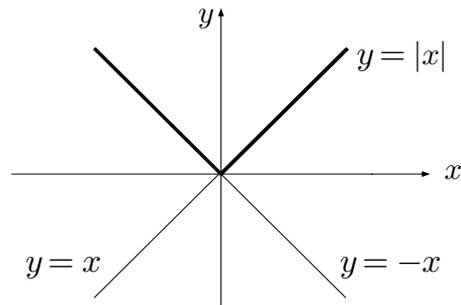


Fig. 1.4.2

Die Größe  $|x|$  ist immer  $\geq 0$  und stellt den Abstand des Punktes  $x$  vom Ursprung dar. Es gilt (Fig. 1.4.3):

$$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon.$$



Fig. 1.4.3

Allgemein ist  $|x - a|$  der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $a$  auf der Zahlengeraden, und es gilt

$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Die Betragsfunktion ist multiplikativ:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

und sie genügt der sogenannten **Dreiecksungleichung**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

die bei Fehlerabschätzungen eine zentrale Rolle spielt.

Tritt die Betragsfunktion in einer definierenden Gleichung auf, so sind im allgemeinen Fallunterscheidungen notwendig.

② Wir behandeln die folgende Aufgabe: Man zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x) := |2 - |1 - x|| - |x| .$$

Die Terme  $|1 - x|$  und  $|x|$  bewirken, daß jedenfalls an den Stellen 0 und 1 "etwas passiert". Wir haben daher vorweg drei Fälle, die sich (wegen der äußeren  $|\cdot|$ -Klammer) unter Umständen weiter aufteilen.

1 :  $x \leq 0$  ( $\implies 1 - x \geq 0$ )

Hier ist

$$f(x) = |2 - (1 - x)| - (-x) = |1 + x| + x .$$

Wir unterscheiden daher weiter: Im Fall

1.1 :  $x \leq -1$  ( $\implies 1 + x \leq 0$ )

gilt

$$f(x) = -(1 + x) - (-x) = -1 ,$$

und im Fall

1.2 :  $-1 \leq x \leq 0$  ( $\implies 1 + x \geq 0$ )

hat man

$$f(x) = 1 + x - (-x) = 1 + 2x .$$

2 :  $0 \leq x \leq 1$  ( $\implies 1 \pm x \geq 0$ ) .

Hier ist

$$f(x) = |2 - (1 - x)| - x = |1 + x| - x = 1 + x - x = 1 .$$

3 :  $x \geq 1$  ( $\implies 1 - x \leq 0$ ) .

Man hat

$$f(x) = |2 + (1 - x)| - x = |3 - x| - x$$

und muß daher weiter unterscheiden: Im Fall

3.1 :  $1 \leq x \leq 3$  ( $\implies 3 - x \geq 0$ )

gilt

$$f(x) = 3 - x - x = 3 - 2x ,$$

und im Fall

3.2 :  $x \geq 3$

schließlich

$$f(x) = -(3 - x) - x = -3 .$$

Alles in allem erhalten wir den in Fig. 1.4.4 dargestellten Graphen. ○

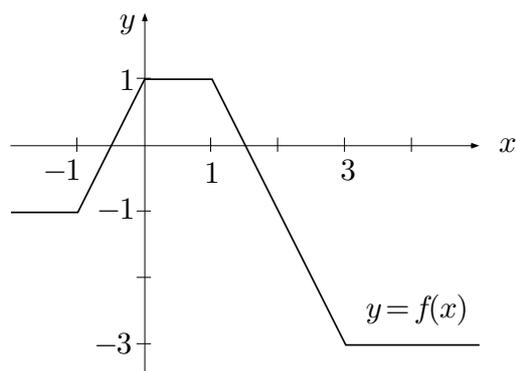


Fig. 1.4.4

Die in der Betragsfunktion verlorengegangene Information über  $x$  ist gespeichert in der **Signumfunktion** (Fig. 1.4.5)

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & (x > 0) , \\ 0 & (x = 0) , \\ -1 & (x < 0) . \end{cases}$$

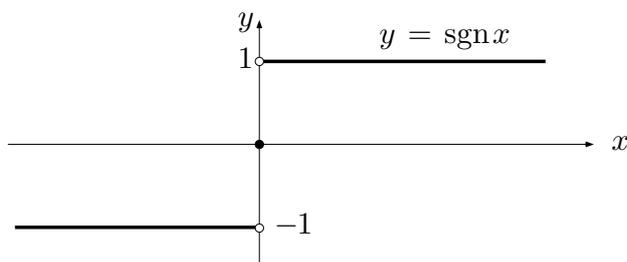


Fig. 1.4.5

Es gelten folgende Identitäten:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x| , \quad \operatorname{sgn} (x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y ;$$

die Signumfunktion ist also ebenfalls multiplikativ.

## Von den rationalen zu den reellen Zahlen

Die hier behandelten Rechenregeln gelten zunächst in  $\mathbb{Q}$ , dann aber auch in  $\mathbb{R}$ . Was sind denn überhaupt "reelle Zahlen"? Schon die Pythagoräer wußten, daß die rationalen Zahlen für eine befriedigende Theorie des Quadrats nicht

ausreichen. Es wird aber berichtet, daß “der Mann, der als erster die Betrachtung der irrationalen Größen aus dem Verborgenen an die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar deshalb, weil das Unaussprechliche und Bildlose für immer hätte verborgen bleiben sollen.”

$\mathbb{R}$  ist also eine Erweiterung, “Vervollständigung” von  $\mathbb{Q}$ . Um hiervon eine gewisse Vorstellung zu vermitteln, nehmen wir allerdings zuerst eine Ausdünnung von  $\mathbb{Q}$  vor, indem wir von den gemeinen Brüchen nur noch die behalten, deren Nenner eine Potenz von 10 bzw. von 2 ist — in anderen Worten: indem wir zu endlichen Dezimal- bzw. Dualbrüchen übergehen. Dies entspricht auch unserem tatsächlichen Umgang mit reellen Zahlen in der Rechenpraxis; denn das numerische Rechnen mit gemeinen Brüchen ist ziemlich umständlich. Es beginnt damit, daß verschiedene Brüche, zum Beispiel  $\frac{15}{24}$  und  $\frac{20}{32}$ , ohne weiteres dieselbe Zahl darstellen können und daß sehr nahe beieinanderliegende Zahlen sehr verschiedene Darstellungen haben:

$$\left| \frac{233}{610} - \frac{377}{987} \right| < 0.0000017 .$$

Vor allem aber pflegen die Nenner beim Aufaddieren von Zahlenkolonnen ins Uferlose zu wachsen.

Wir betrachten also für einen Moment nur noch rationale Zahlen  $a$  der speziellen Form

$$a = \frac{p}{2^s} \quad (p \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N})$$

und bezeichnen die Menge dieser Zahlen mit  $\mathbb{D}$ . Jedes  $a \in \mathbb{D}$  besitzt eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Darstellung als (**endlicher**) **Dualbruch**:

$$a = ' \pm \beta_r \dots \beta_{-2} \beta_{-1} \beta_0 \cdot \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s ' , \quad \beta_k \in \mathbb{B} \quad (r \leq k \leq s)$$

( $r \leq 0$  und  $s \geq 0$  hängen von  $a$  ab). Diese Darstellung codiert den folgenden Sachverhalt:

$$a = \pm \sum_{k=r}^s \beta_k 2^{-k} .$$

Das Rechnen mit Dualbrüchen ist ja genial einfach, und es ist auch von bloßem Auge möglich, eine Liste von Dualbrüchen der Größe nach zu ordnen.

*Anmerkung:* Anstelle von Dualbrüchen könnte man auch Dezimalbrüche nehmen.

In Fig. 1.4.6 wurde versucht, den **kaskadischen**, das heißt: sich in immer kleineren Maßstäben reproduzierenden Charakter der Menge  $\mathbb{D}$  zeichnerisch umzusetzen. Algebraisch gesehen ist  $\mathbb{D}$  ein **Ring** (das heißt: Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in  $\mathbb{D}$  unbeschränkt möglich), aber kein Körper mehr, denn die Division von Dualbrüchen geht im allgemeinen nicht auf. Das läßt sich verschmerzen, da  $\mathbb{D}$  in der Menge aller reellen Zahlen dicht

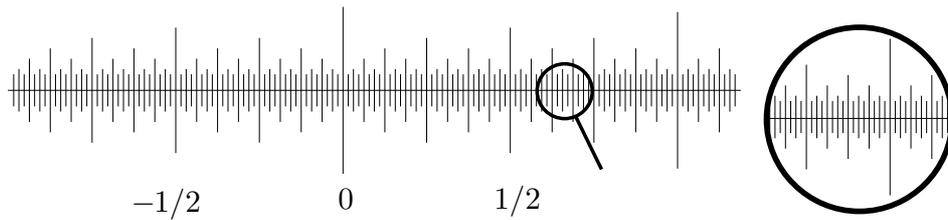


Fig. 1.4.6

liegt (siehe die Figur) und man sich in der Praxis mit einer hinreichenden Approximation zufrieden gibt.

So läuft zum Beispiel der in der Schule gelernte Divisionsalgorithmus auf folgendes hinaus: Es seien  $a$  und  $b$  gegebene Dualbrüche,  $b \neq 0$ , deren Quotient  $a/b$  als Dualbruch dargestellt werden soll, und es sei  $\varepsilon > 0$  eine beliebig kleine vorgegebene Toleranz, zum Beispiel  $\varepsilon := 2^{-20}$ . Dann kann man (durch “Herunterholen von Nullen”) immer ein  $q \in \mathbb{D}$  finden, so daß gilt:

$$q \leq \frac{a}{b} < q + \varepsilon .$$

In anderen Worten: Der vom Divisionsalgorithmus gelieferte Dualbruch  $q$  ist weniger als  $\varepsilon$  von der “gemeinten” Zahl  $a/b$  entfernt.

③ Zur Erläuterung rechnen wir im vertrauteren Dezimalsystem. Es soll die Zahl  $a/b := 83/19$  in einen Dezimalbruch “entwickelt” werden. Der Divisionsalgorithmus liefert

$a$	$:$	$b$	$=$	$q$
83.		19		4.36842
7.0				
1.30				
.160				
80				
40				
2				(“Rest”) .

Wird an dieser Stelle abgebrochen, so gilt einerseits  $qb < a$  (wegen des Restes) und andererseits  $(q + 10^{-5})b > a$  (sonst wäre die letzte Stelle von  $q$  nicht 2 gewesen). Zusammen ergibt sich

$$q < \frac{a}{b} < q + 10^{-5} ,$$

wie oben allgemein beschrieben. ○

Für den Rest dieses Abschnitts treffen wir die folgende Vereinbarung: lateinische Buchstaben  $a, b, x, \dots$  sowie  $\varepsilon$  bezeichnen Dualbrüche und griechische Buchstaben  $\alpha, \beta, \dots$  reelle Zahlen.

Die “reellen Zahlen” sind gewisse ideale Objekte, mit denen wir etwa folgende Vorstellungen verknüpfen:

- (a) Die reellen Zahlen bilden einen geordneten Körper.
- (b) Jede reelle Zahl  $\alpha$  läßt sich beliebig genau durch Dualbrüche von unten annähern. Genau: Zu jeder noch so kleinen Toleranz  $\varepsilon > 0$  (zum Beispiel  $\varepsilon := 2^{-20}$ ) gibt es ein  $a \in \mathbb{D}$  mit

$$a \leq \alpha < a + \varepsilon .$$

- (c) Ist  $a \doteq \alpha$  und  $b \doteq \beta$ , so gilt  $a + b \doteq \alpha + \beta$  und  $a \cdot b \doteq \alpha \cdot \beta$ .

Dieser entscheidende Sachverhalt ermöglicht, in Gedanken und Formeln zwei “unendlich genaue” reelle Zahlen exakt miteinander zu multiplizieren und dann dieselbe Rechnung mit endlichen Dualbrüchen numerisch zu simulieren.

- (d) Jeder “unendliche Dualbruch” stellt eine reelle Zahl dar, und umgekehrt: Jede reelle Zahl besitzt eine im wesentlichen eindeutige Darstellung als “unendlicher Dualbruch”.

(Die Elemente von  $\mathbb{D}$  besitzen genau zwei derartige Darstellungen, alle andern reellen Zahlen genau eine. So stellen zum Beispiel  $0.1111\dots$  und  $1.0000\dots$  beide die Zahl  $1 \in \mathbb{R}$  dar.)

- ④ Die reelle Zahl  $\alpha := 4/7$  besitzt die nicht abbrechende Dualbruchentwicklung

$$0.10010010010010\dots \quad \left( = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} + \dots = \frac{4}{7} \right)$$

und läßt sich folglich durch die endlichen Dualbrüche

$$\begin{array}{l} 0.1 \\ 0.1001 \\ 0.1001001 \\ 0.1001001001 \\ \vdots \end{array}$$

besser und besser approximieren.



Daß sich nach diesen vagen Vorstellungen tatsächlich ein logisch konsistentes System  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{D}$  (bzw. aus  $\mathbb{Q}$ ) fabrizieren läßt, hat Dedekind 1872 als erster bewiesen. In diesem System sind dann nicht nur so einfache Zahlen wie  $\sqrt{2}$  (bzw.  $4/7$  wieder) vorhanden, sondern “überabzählbar viele” (s.u.) weitere, darunter natürlich  $e$  und  $\pi$ , und alle lassen sich mindestens in Gedanken mit unendlicher Genauigkeit erfassen, addieren und multiplizieren.

Der geometrische Gehalt dieser Erweiterung ist folgender: Die zu  $\mathbb{D}$  hinzugefügten Zahlen bilden sozusagen den “Leim”, der die in Fig. 1.4.6 dargestellte kaskadische Struktur zu einem vollständig homogenen Kontinuum macht. So ist es zum Beispiel möglich,  $\mathbb{D}$  mit einer Axt in eine Untermenge  $A$  und eine Obermenge  $B$  zu spalten, ohne dabei eine einzige Zahl zu berühren,

$$\text{Bsp:} \quad A := \{x \in \mathbb{D} \mid x < \sqrt{2}\}, \quad B := \{x \in \mathbb{D} \mid x > \sqrt{2}\}.$$

Hier gibt es zwischen jedem einzelnen  $x \in A$  und  $\sqrt{2}$  unendlich viele weitere Zahlen von  $A$ . Eine derartige Zerlegung von  $\mathbb{R}$  ist jedoch nicht möglich: Wird  $\mathbb{R}$  auf irgendeine Weise in eine Untermenge  $A$  und eine Obermenge  $B$  gespalten, so hat *entweder*  $A$  ein maximales Element *oder*  $B$  ein minimales Element. Jedenfalls berührt die Axt eine wohlbestimmte reelle Zahl  $\alpha$ .

Die Reichhaltigkeit von  $\mathbb{R}$  läßt sich auf verschiedene Weise analytisch charakterisieren. Vom konstruktiven Standpunkt aus, das heißt: für das Definieren und das konkrete Berechnen von reellen Größen (z.B.  $e$  oder  $\pi$ ), ist folgende Fassung am zweckmäßigsten:

**(1.1)** *Jede monoton wachsende und beschränkte Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von reellen Zahlen ist konvergent gegen eine wohlbestimmte reelle Zahl  $\alpha$ .*

┌ Für den Beweis benötigt man natürlich den genauen Konvergenzbegriff. — Wir spalten  $\mathbb{R}$  in die Untermenge  $A$  derjenigen  $\xi$ , die von wenigstens einem  $\alpha_k$  übertroffen werden, und in die Obermenge  $B$  derjenigen  $\xi$ , die von keinem  $\alpha_k$  übertroffen werden. Weder  $A$  noch  $B$  sind leer. Die Axt trifft eine wohlbestimmte Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$ , und dieses  $\alpha$  ist der behauptete Grenzwert: Ist ein (beliebig kleines)  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so liegt  $\alpha - \varepsilon$  in  $A$ , es gibt also ein  $n$  mit  $\alpha_n > \alpha - \varepsilon$ . Wegen der Monotonie liegen daher alle  $\alpha_k$  mit Nummer  $k \geq n$  im Intervall  $]\alpha - \varepsilon, \alpha]$ . ─

Die obige Vorstellung (d) läßt sich nunmehr folgendermaßen konkretisieren: Ein “unendlicher Dualbruch”, zum Beispiel

$$1.10110011101\dots,$$

besitzt Anfangsstücke

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1.1, \quad a_2 := 1.1, \quad a_3 := 1.101, \quad a_4 := 1.011, \quad \dots$$

Die  $a_k$  bilden eine monoton wachsende Folge von reellen Zahlen, und diese Folge ist natürlich beschränkt: Da alle Ziffern  $\beta_k$  gleich 0 oder 1 sind, gilt

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k 2^{-k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^n 2^{-k} < a_0 + 1$$

für alle  $n$ . Somit besitzt die Folge  $a$  nach (1.1) einen wohlbestimmten Grenzwert  $\alpha \in \mathbb{R}$ , und dieses  $\alpha$  ist die von dem betreffenden “unendlichen Dualbruch” repräsentierte reelle Zahl.

## Aufgaben

1. Stelle die folgenden rationalen Zahlen im Dualsystem dar:  
(a) 6423,    (b) 643/7,    (c) 324/761.
2. Bestimme die ersten 15 Stellen der Dualbruchentwicklung von  $\pi$ .
3. Die Funktion  $f$  sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & (x < -1) \\ -x & (-1 \leq x \leq 1) \\ x - 2 & (x > 1) \end{cases} .$$

Stelle  $f$  mit Hilfe der Betragsfunktion durch einen einzigen, für alle  $x \in \mathbb{R}$  gültigen Ausdruck dar.

4. Beim Stand 165.50 seines Tageskilometerzählers passiert ein Automobilist eine Tafel “Landesgrenze 29 km” und beim Stand 173.20 die Tafel “Landesgrenze 22 km”. Beim Stand 179.45 kommt er zu einer Tankstelle. Wie weit ist es jetzt noch zur Landesgrenze (auf 150 m genau)? — Hierzu soll man annehmen, daß die Angaben auf den Tafeln nach der nächsten ganzen Zahl gerundet sind.
5. Die Funktionen  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien rekursiv definiert durch

$$f_0(x) := |x|, \quad f_{n+1}(x) := |1 - f_n(x)| \quad (n \geq 0) .$$

Zeichne den Graphen von  $f_{100}$ .

6. Bestimme die Menge der  $x \in \mathbb{R}$ , welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{x+3}{x-1} > |x| .$$

## 1.5 Koordinaten in der Ebene und im Raum

In diesem Abschnitt werden nur Bezeichnungen festgelegt.

Wir beziehen uns zunächst auf die Fig. 1.5.1. Die im folgenden angebotenen Bezeichnungen werden wir in freier Weise abwechselnd benutzen:

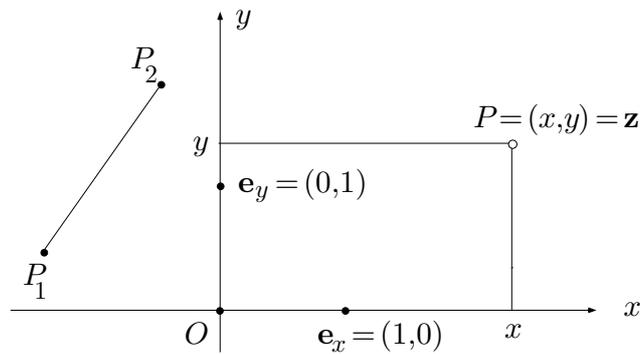


Fig. 1.5.1

Allgemeiner Punkt:  $P = (x, y) = \mathbf{z}$  ;  
 spezielle Punkte:  $O = (0, 0) = \mathbf{0}$  ,  $\mathbf{e}_x = (1, 0)$  ,  $\mathbf{e}_y = (0, 1)$  ;  
 Abstand vom Ursprung:  $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{z}| = r$  ;  
 Abstand zweier Punkte:  $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1|$  .

### Winkel und Argument

Sind  $\mathbf{z}_1$  und  $\mathbf{z}_2$  beide  $\neq \mathbf{0}$ , so bezeichnet  $\angle(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$  den **nichtorientierten Winkel** zwischen den von  $\mathbf{0}$  ausgehenden Strahlen durch  $\mathbf{z}_1$  und durch  $\mathbf{z}_2$ . Hierunter versteht man die Länge  $\omega$  des kürzeren von den beiden Bögen, die die zwei Strahlen aus dem Einheitskreis herauschneiden (siehe die Fig. 1.5.2). Es ist immer  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

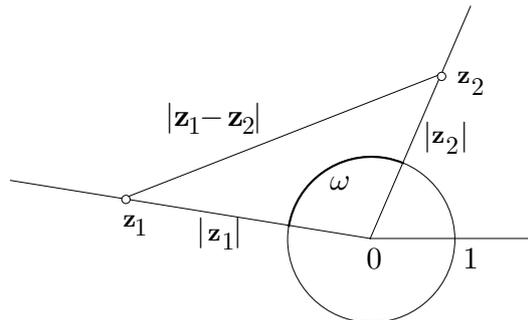


Fig. 1.5.2

Nach dem Cosinussatz ist

$$|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1|^2 = |\mathbf{z}_1|^2 + |\mathbf{z}_2|^2 - 2|\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| \cos \omega$$

und somit

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2|\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| \cos \omega .$$

Es folgt

$$\cos \omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} .$$

Durch diese Gleichung ist  $\omega \in [0, \pi]$  eindeutig bestimmt.

Der Gegenuhrzeigersinn wird als **positiver Drehsinn** angesehen. Mit dem Symbol  $\mathfrak{A}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$  bezeichnen wir den **orientierten Winkel** zwischen den beiden Strahlen  $\mathbf{Oz}_1$  und  $\mathbf{Oz}_2$ . Hierunter versteht man den erforderlichen Drehwinkel, wenn der Strahl  $\mathbf{Oz}_1$  in positivem Sinn in den Strahl  $\mathbf{Oz}_2$  gedreht werden soll. Dieser orientierte Winkel ist nur bis auf additive Vielfache von  $2\pi$  bestimmt (Fig. 1.5.3).

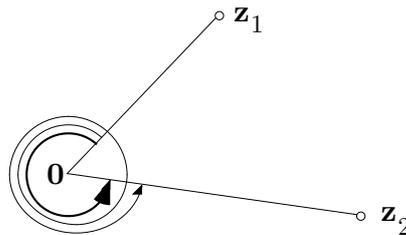


Fig. 1.5.3

Ob in einer gegebenen Situation mit orientierten oder besser mit nichtorientierten Winkeln gearbeitet werden soll, muß im Einzelfall entschieden werden. Nichtorientierte Winkel haben auch im dreidimensionalen Raum einen Sinn, orientierte nicht von vorneherein.

Ist  $\mathbf{z} = (x, y) \neq \mathbf{0}$ , so heißt

$$\mathfrak{A}(\mathbf{e}_x, \mathbf{z}) =: \arg(x, y) =: \phi$$

das **Argument** oder der **Polarwinkel** des Punktes  $\mathbf{z}$ . Der Figur 1.5.4 entnimmt man die Identität

$$\arg(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & (x > 0) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & (x < 0) . \end{cases}$$

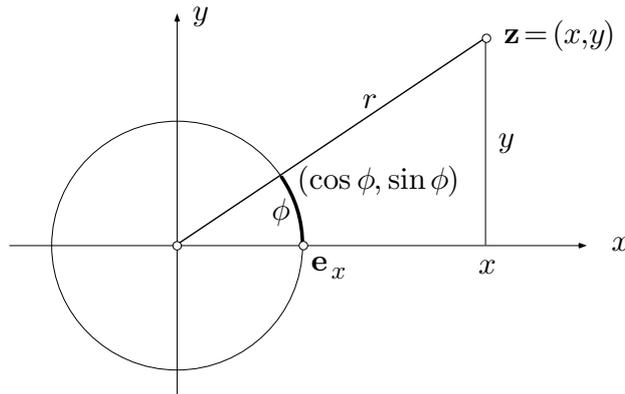


Fig. 1.5.4

Ohne weitergehende Verabredungen ist das Argument  $\phi$  eines Punktes  $(x, y)$  nur bis auf additive Vielfache von  $2\pi$ , oder, wie man auch sagt: **modulo**  $2\pi$  bestimmt. Hierauf braucht man aber in vielen Fällen keine Rücksicht zu nehmen, und man kann  $\phi$  wie eine gewöhnliche reelle Variable behandeln.

Die Größen  $r$  und  $\phi$  heißen die **Polarkoordinaten** des Punktes  $(x, y)$ . Es gelten die folgenden Umrechnungsformeln, die man ohne weiteres an der Figur 1.5.4 verifiziert:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arg(x, y) \end{cases} .$$

Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine (stetige) Funktion der Variablen  $x$ , so beschreibt die Gleichung  $y = f(x)$  bekanntlich eine (im folgenden mit  $\mathcal{G}(f)$  bezeichnete) Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene, den sogenannten **Graphen** von  $f$ :

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge y = f(x) \} .$$

Ist weiter  $h > 0$  fest, so ist der Graph der Funktion  $f_h: x \mapsto f(x - h)$  zum Graphen von  $f$  kongruent, aber gegenüber  $\mathcal{G}(f)$  um  $h$  nach rechts verschoben (Fig. 1.5.6).

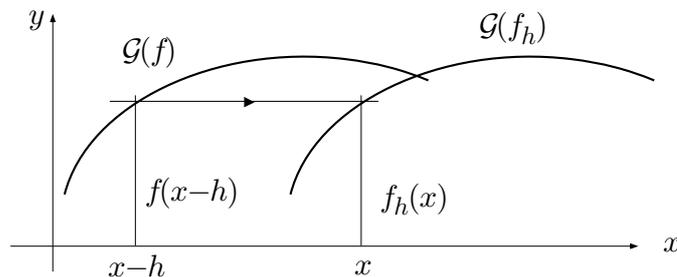


Fig. 1.5.5

Es sei jetzt  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine nichtnegative (stetige) Funktion der Variablen  $\phi$ . Die Gleichung

$$r = f(\phi) \quad (\alpha \leq \phi \leq \beta), \quad (1)$$

zwischen den Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$  der Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  läßt sich ebenfalls als Gleichung einer Kurve  $\gamma$  auffassen. Man nennt (1) die **Polar-darstellung** dieser Kurve. Die einzelnen Punkte von  $\gamma$  werden erhalten, indem man für jedes  $\phi \in [\alpha, \beta]$  auf dem Strahl  $\arg(x, y) = \phi$  von  $O$  aus die Länge  $r := f(\phi)$  abträgt (Fig. 1.5.6). Weiter: Ist  $\delta > 0$  fest, so ist die Kurve  $\gamma'$  mit der Polardarstellung

$$r = f(\phi - \delta) \quad (\alpha + \delta \leq \phi \leq \beta + \delta)$$

zu  $\gamma$  kongruent, aber gegenüber  $\gamma$  um den Winkel  $\delta$  in positivem Sinn gedreht.

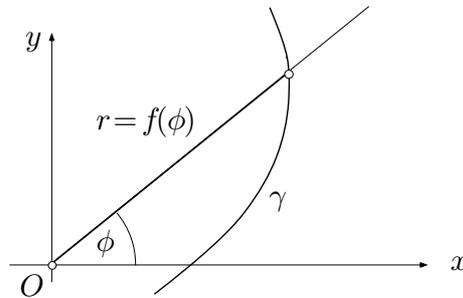


Fig. 1.5.6

① Es seien  $a > 0$ ,  $q \neq 0$  fest gegeben. Dann ist

$$\gamma: \quad r = ae^{q\phi} \quad (=: f(\phi)) \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

die Polardarstellung einer **logarithmischen Spirale** (Fig. 1.5.7). Wird  $\gamma$  von  $O$  aus um den Faktor  $c > 0$  gestreckt, so besitzt die resultierende Kurve  $\gamma_c$  die Polardarstellung

$$\gamma_c: \quad r = cae^{q\phi} \quad (=: f_c(\phi)).$$

Nun gilt (identisch in  $\phi$ )

$$f_c(\phi) = ae^{q\phi + \log c} = ae^{q(\phi - \delta)} = f(\phi - \delta);$$

dabei wurde zur Abkürzung  $-\log c/q =: \delta$  gesetzt. Hieraus folgt:  $\gamma_c$  ist *kongruent* zu  $\gamma$  (und nicht etwa "größer"), aber um den Winkel  $\delta$  gegenüber  $\gamma$

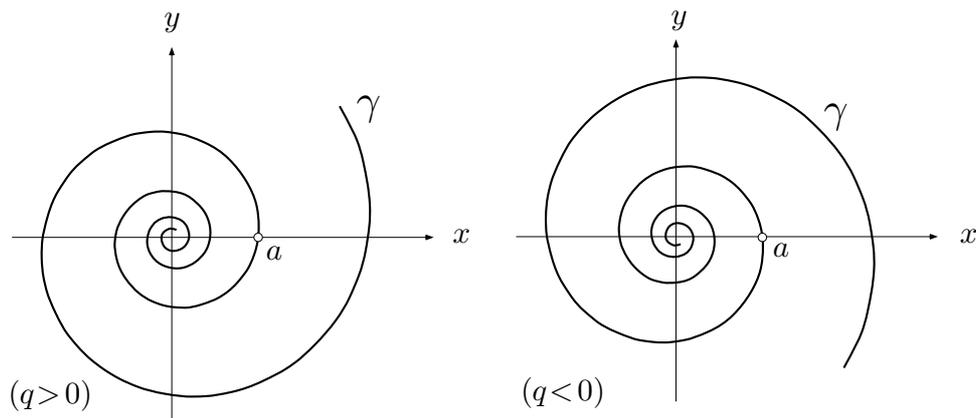


Fig. 1.5.7

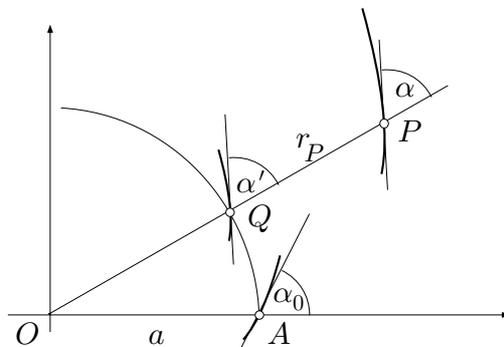


Fig. 1.5.8

gedreht. Auf dem Grabstein von Johann Bernoulli, der als erster die logarithmische Spirale untersucht hat, steht die Inschrift: “*Eadem mutata resurgo*”. Wir zeigen weiter:  $\gamma$  schneidet jeden von  $O$  ausgehenden Strahl unter demselben (nur von  $q$  abhängigen) Winkel  $\alpha_0$ .

□ Es sei  $P$  ein Spiralenpunkt im Abstand  $r_P$  vom Ursprung und  $\alpha$  der fragliche Winkel bei  $P$  (Fig. 1.5.8). Wird die Spirale  $\gamma$  im Verhältnis  $c := a/r_P$  von  $O$  aus gestreckt, so resultiert eine neue Spirale  $\gamma_c$ . Der Punkt  $P$  geht dabei über in den Punkt  $Q$  im Abstand  $a$  vom Ursprung, und  $\gamma_c$  schneidet dort den Strahl  $OP$  unter dem Winkel  $\alpha' = \alpha$ . Andererseits können wir nach dem Vorangehenden die Spirale  $\gamma_c$  auch erhalten, indem wir  $\gamma$  um den Winkel  $\delta = -\log c/q$  drehen. Dabei geht der Punkt  $A$  in  $Q$  über, und es ist  $\alpha' = \alpha_0$ . Da  $P \in \gamma$  beliebig war, folgt die Behauptung. ┘

○

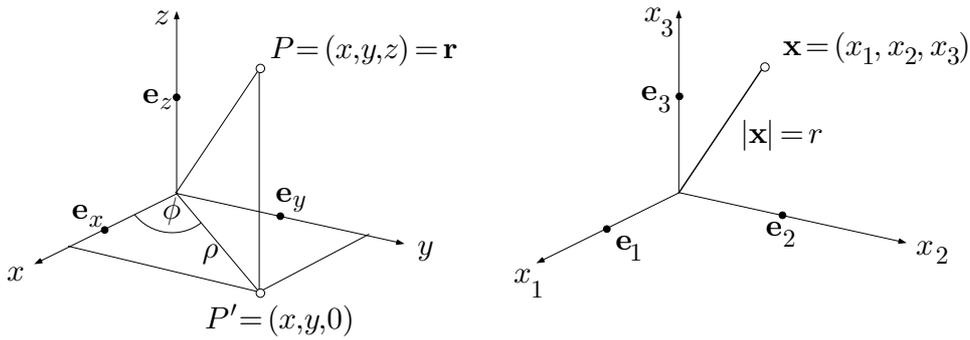


Fig. 1.5.9

## Verschiedene räumliche Koordinatensysteme

Im dreidimensionalen Raum werden die kartesischen Koordinaten entweder mit  $x, y, z$  oder mit  $x_1, x_2, x_3$  bezeichnet. Für die Behandlung von konkreten Beispielen, etwa eines Ellipsoids mit gegebenen Halbachsen  $a, b, c$ , sind  $x, y, z$  handlicher; bei allgemeinen Erörterungen aber sind  $x_1, x_2, x_3$  unbedingt vorzuziehen. Die beiden Bezeichnungsweisen sind in der Figur 1.5.9 und in den folgenden Formeln festgehalten.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_y &= (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1) = \mathbf{e}_3; \\ |OP| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{r}| = r & \text{bzw.} & & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} &= |\mathbf{x}| = r; \\ |OP'| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \rho. \end{aligned}$$

Werden dreidimensionale Situationen betrachtet, so ist es üblich, die Polarkoordinaten in der  $(x, y)$ -Ebene mit  $\rho, \phi$  (anstelle von  $r, \phi$ ) zu bezeichnen. — Man beachte, daß wir in jedem Fall ein **Rechtssystem** zugrundelegen: Wird der Vektor  $\mathbf{e}_x$  um  $\pi/2$  in die Richtung von  $\mathbf{e}_y$  gedreht, so rückt ein mitgedrehter Korkzieher in die Richtung von  $\mathbf{e}_z$  vor (Fig. 1.5.10).

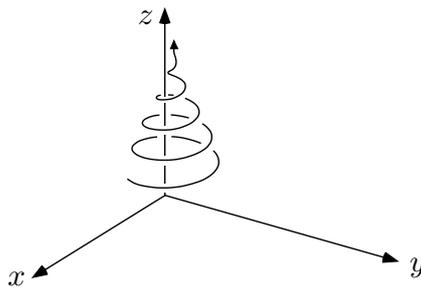


Fig. 1.5.10

Die durch  $\arg(x, y) = \text{const.}$  charakterisierten Halbebenen  $M$  im  $(x, y, z)$ -Raum heißen **Meridianebenen**. Die Meridianebenen werden “nummeriert” durch die Argumentvariable  $\phi$ , die laufenden kartesischen Koordinaten in einer Meridianebene sind  $\rho$  ( $\geq 0$ ) und  $z$  (Fig. 1.5.11). Ist eine Situation rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse, so bietet sie in allen Meridianebenen denselben Aspekt, und dieser Aspekt lässt sich vollständig mit Hilfe der Variablen  $\rho$  und  $z$  beschreiben.

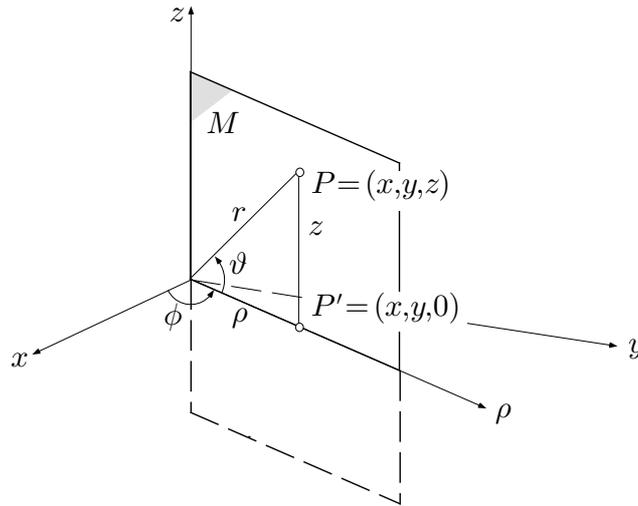


Fig. 1.5.11

Bsp: Eine Drehfläche  $S$  ist vollständig bestimmt durch ihre in der  $(\rho, z)$ -Halbebene liegende **Meridiankurve**  $\gamma_M$  (Fig. 1.5.12).

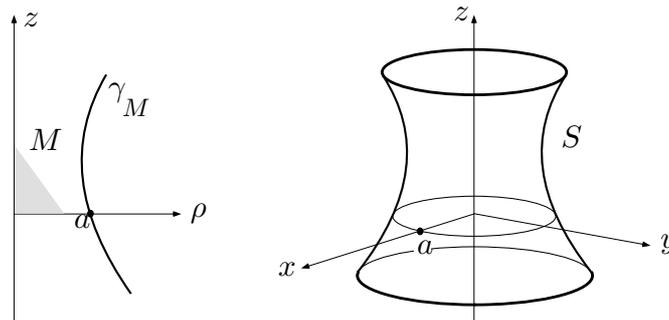


Fig. 1.5.12

Die angemessenen Koordinaten zur Behandlung einer derartigen Situation sind die **Zylinderkoordinaten**  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ . Hier sind  $\rho$  und  $z$  die wesentlichen

Variablen; die Variable  $\phi$  ist von diesen **separiert** und fällt in vielen Fällen aus der Rechnung heraus.

Um die Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten umzurechnen, muß man sich nur vergegenwärtigen, daß  $\rho$ ,  $\phi$  gerade Polarkoordinaten in der  $(x, y)$ -Ebene sind (Fig. 1.5.11):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arg(x, y) \\ z = z \end{cases} . \quad (2)$$

② Rotiert ein in der  $(\rho, z)$ -Halbebene gezeichneter Kreis um die  $z$ -Achse, so entsteht ein sogenannter **Torus**, genau: eine Torusfläche  $T$  (Fig. 1.5.13). Analytisch tritt  $T$  auf folgende Weisen in Erscheinung:

— Gleichung der Meridiankurve  $\gamma_M$ :

$$(\rho - a)^2 + z^2 = b^2 ,$$

— Gleichung des Torus in Zylinderkoordinaten (die Variable  $\phi$  fällt heraus!):

$$(\rho - a)^2 + z^2 = b^2 ,$$

— Gleichung des Torus in kartesischen Koordinaten:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2 ,$$

— Parameterdarstellung der Meridiankurve:

$$\gamma_M : \begin{cases} \rho = a + b \cos \psi \\ z = b \sin \psi \end{cases} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi) ,$$

— Parameterdarstellung des Torus:

$$T : \begin{cases} x = (a + b \cos \psi) \cos \phi \\ y = (a + b \cos \psi) \sin \phi \\ z = b \sin \psi \end{cases} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi , 0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

(Der Begriff der Parameterdarstellung wird erst in Abschnitt 2.1 offiziell eingeführt.) ○

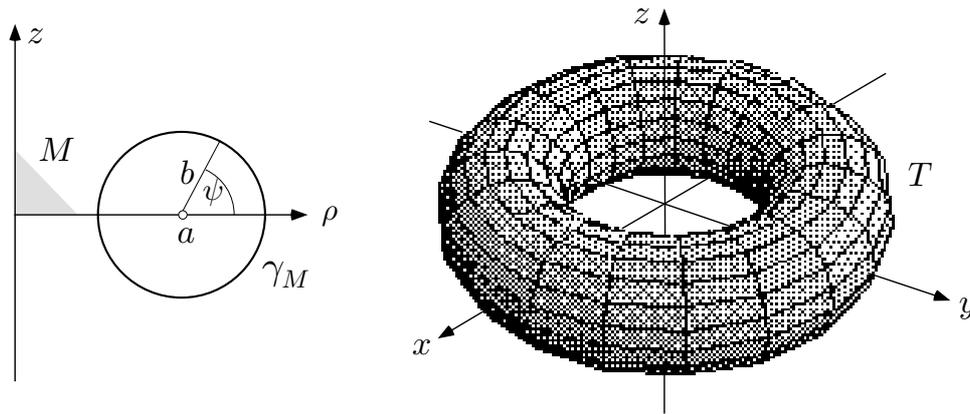


Fig. 1.5.13

Ersetzt man in den Meridianebenen  $M$  die (für  $M$ ) kartesischen Koordinaten  $\rho, z$  durch Polarkoordinaten  $r, \theta$ , so gelangt man zu den **Kugelkoordinaten**  $r, \phi, \theta$ ; dabei kann die Variable  $\theta$  nur Werte im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  annehmen. Die Ortsbestimmung auf der Erdkugel erfolgt mit Kugelkoordinaten:  $\phi$  ist die **geographische Länge**,  $\theta$  die **geographische Breite**. (Anmerkung: Verschiedene Autoren messen den Winkel  $\theta$  von der positiven  $z$ -Achse aus;  $\theta$  variiert dann im Intervall  $[0, \pi]$ , und die nachstehenden Formeln sind geringfügig zu modifizieren.)

Aus der Figur 1.5.11 ergeben sich die Formeln

$$\begin{cases} \rho = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arg(\rho, z) \end{cases},$$

und mit (2) folgt

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \cos \theta \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \arg(x, y) \\ \theta = \arg(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \end{cases}. \quad (3)$$

Hier ist vor allem der Formelsatz links von Bedeutung. Man benötigt ihn, um gegebene Gleichungen und Funktionsausdrücke von kartesischen auf Kugelkoordinaten umzuschreiben.

③ Eine Fliege besteigt einen halbkugelförmigen Pudding vom Radius 1; sie kann aber nicht steiler als  $45^\circ$  gehen (Fig. 1.5.14). Aufgabe: Die sich ergebende Kurve und deren Länge zu bestimmen.

Im  $(\phi, \theta)$ -Gradnetz sieht die Kurve etwa so aus, wie in Fig. 1.5.15 gezeichnet, denn am Anfang ( $\theta = 0$ ) ist die Wand vertikal, und für  $\theta \geq \frac{\pi}{4}$  kann die Fliege

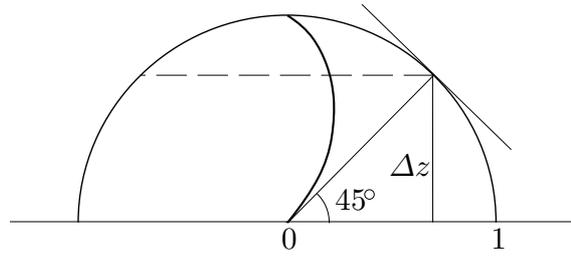


Fig. 1.5.14

direkt auf ihr Ziel lossteuern. Man hat daher

$$\phi = \begin{cases} u(\theta) & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}) \\ \phi_0 & (\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

mit einer unbekanntem Funktion  $u(\theta)$  und  $u(\frac{\pi}{4}) =: \phi_0$ .

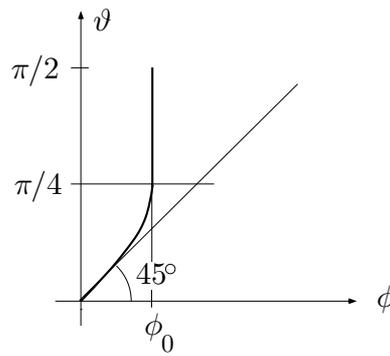


Fig. 1.5.15

Nach (3) besitzt die gesuchte Raumkurve in der ersten Phase folgende Parameterdarstellung:

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= \cos \theta \cos u(\theta) \\ y(\theta) &= \cos \theta \sin u(\theta) \\ z(\theta) &= \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right). \quad (4)$$

Die 45°-Bedingung läuft darauf hinaus, daß

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist (Fig. 1.5.16), und führt damit auf die Differentialgleichung

$$z'^2(\theta) = x'^2(\theta) + y'^2(\theta).$$

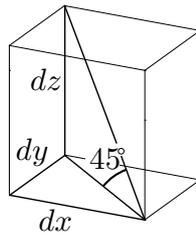


Fig. 1.5.16

Die nach Einsetzen von (4) resultierende Differentialgleichung für die unbekannte Funktion  $u(\theta)$  können wir hier nicht behandeln. Hingegen können wir die Länge der gesuchten Kurve berechnen: In der ersten Phase ist die reale Steigung stets  $45^\circ$ . Da dabei die Höhe  $\Delta z = \sqrt{2}/2$  gewonnen wird (Fig. 1.5.15), beträgt die Länge des zugehörigen Kurvenstücks  $\sqrt{2} \Delta z = 1$ . Die Gesamtlänge der Kurve ist daher  $1 + \frac{\pi}{4}$ .  $\circ$

## Aufgaben

- Die  $z$ -Achse sei Achse eines Rotationskegels bzw. -doppelkegels vom halben Öffnungswinkel  $\frac{\pi}{6}$ . Man gebe die Gleichung dieses Kegels
  - in kartesischen Koordinaten,
  - in Zylinderkoordinaten,
  - in Kugelkoordinaten.
- Es sei  $P$  ein Punkt einer logarithmischen Spirale im Abstand  $r$  vom Zentrum. Die Spirale schneide den Strahl  $OP$  unter dem Winkel  $\alpha$ . Stelle Überlegungen an über die von  $P$  aus bis zum inneren "Ende" gemessene Länge der Spirale.
- Zeige: Wird die Kurve  $y = ce^{\lambda x}$  ( $-\infty < x < \infty$ ) in  $y$ -Richtung affin gestreckt, so ist die resultierende Kurve zur Ausgangskurve kongruent.
- Eine Fliege möchte möglichst schnell zur Spitze eines aufrechten Kreiskegels (Höhe  $h$ , halber Öffnungswinkel  $\alpha$ ) gelangen. Sie kann aber nicht steiler als  $45^\circ$  gehen. An welches "Bewegungsgesetz" soll sie sich halten? Wie sieht die entstehende Kurve  $\gamma$  von oben aus? Wie lang ist  $\gamma$ ? (*Hinweis:* Startet die Fliege im Punkt  $(h \tan \alpha, 0, 0)$ , so ist die Startrichtung eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{m} := (-\tan \alpha, 0, 1)$  und  $\mathbf{e}_2$ .)
- Die Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei in Kugelkoordinaten durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\tilde{f}(r, \theta, \phi) := r^2 (\sin(2\phi) \cos^2 \theta + (\sin \phi + \cos \phi) \sin(2\theta)) .$$

Bestimme den Ausdruck für  $f$  in kartesischen Koordinaten.

## 1.6 Vektoralgebra

### Begriff des Vektors

Aus der Physik ist bekannt, daß gewisse Größen (zum Beispiel Kräfte, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeiten) am besten als Pfeile oder eben als “Vektoren” dargestellt werden, die an einem bestimmten Raumpunkt “angreifen” oder in anderen Fällen frei parallel verschiebbar sind. Die “Vektorrechnung” handelt vom praktischen Umgang mit derartigen Größen; sie wurde in erster Linie im Hinblick auf physikalische Anwendungen erdacht und funktioniert so nur im  $\mathbb{R}^3$ .

Mathematisch treten die Vektoren auf verschiedene Arten in Erscheinung:

- als gerichtete Strecken  $\underline{AB}$ , dargestellt als “Pfeil von  $A$  nach  $B$ ”,
- als Ortsvektoren von Punkten,
- als “Äquivalenzklassen von gerichteten Strecken”
- als halbfette oder mit einem Pfeil versehene kleine Buchstaben:  $\mathbf{a}$ ,  $\vec{x}$ ,
- als Zahlentripel  $(a_1, a_2, a_3)$ , oft als Kolonnenvektoren  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  und selten als Zeilenvektoren  $[a_1 \ a_2 \ a_3]$ .

Diese Vielfalt der Auffassungen und Darstellungen hat zur Folge, daß man sich erst nach einiger Übung in der Welt der Vektoren zurechtfindet.

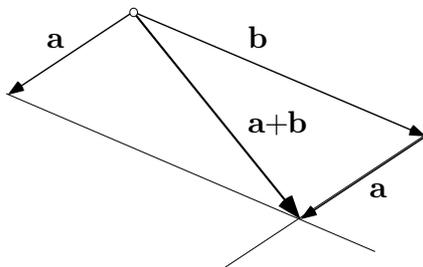


Fig. 1.6.1

Zur Einführung der Vektoren bedienen wir uns der Sprache der Elementargeometrie. So wird die Summe  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  von zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  anhand der Figur 1.6.1 (“Parallelogramm der Kräfte”) definiert und ähnlich für jeden Vektor  $\mathbf{a}$  und eine beliebige Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  das  $\lambda$ -fache des Vektors  $\mathbf{a}$  geometrisch erklärt (s.u.). Im einzelnen sieht das etwa folgendermaßen aus (wir verzichten natürlich auf einen strengen Aufbau):

Ein geordnetes Paar von Punkten  $A, B \in \mathbb{R}^3$  bezeichnen wir im jetzigen Zusammenhang mit  $\underline{AB}$  und nennen  $\underline{AB}$  einen **im Punkt  $A$  angreifenden**

**Vektor** oder, etwas ungenau, einen **Vektor**. Wir zeichnen dafür einen Pfeil mit Anfangspunkt  $A$  und Spitze in  $B$ . Der Vektor  $\underline{OB}$  heißt **Ortsvektor** des Punktes  $B$  (siehe die Fig. 1.6.2).

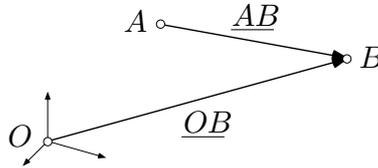


Fig. 1.6.2

Sind die Strecken  $AB$  und  $CD$  gleich lang und gleichsinnig parallel, das heißt: Gibt es eine Translation  $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\tau(A) = C$  und  $\tau(B) = D$ , so werden  $\underline{AB}$  und  $\underline{CD}$  für die Zwecke der Vektorrechnung als **äquivalent**, d.h. als Repräsentanten desselben **Vektors**  $\mathbf{v}$  angesehen (Fig. 1.6.3). Man schreibt (unter Mißbrauch des Gleichheitszeichens)  $\underline{AB} = \underline{CD} =: \mathbf{v}$ , wobei eben in  $\mathbf{v}$  keine Information mehr über den Angriffspunkt vorhanden ist. Für Vektoren verwenden wir wenn immer möglich halbfette lateinische Buchstaben.

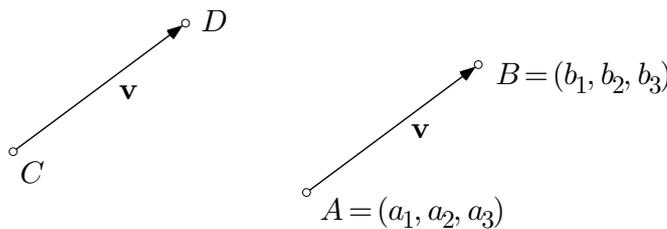


Fig. 1.6.3

Der **Betrag** oder die **Länge** eines Vektors  $\mathbf{v}$  ist gleich der Länge jeder repräsentierenden Strecke:

$$|\mathbf{v}| := |\underline{AB}| .$$

Die **Koordinaten** des Vektors  $\mathbf{v} := \underline{AB}$  sind die drei Zahlen

$$(v_1, v_2, v_3) := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) .$$

Ist  $\underline{AB} = \underline{CD}$ , so liefert das Paar  $\underline{CD}$  dieselben Koordinatendifferenzen wie  $\underline{AB}$ ; die Koordinaten  $(v_1, v_2, v_3)$  eines Vektors  $\mathbf{v}$  sind also wohldefiniert. Insbesondere ist, unter Mißbrauch des Gleichheitszeichens,

$$\underline{OB} = (b_1, b_2, b_3) =: \mathbf{b} ,$$

was zum Ausdruck bringt, daß ein Punkt und sein Ortsvektor als dasselbe Ding angesehen werden können. Der Buchstabe  $\mathbf{b}$  bezeichnet also (Fig. 1.6.4):

- den Punkt  $B$ ,
- das Tripel  $(b_1, b_2, b_3)$ ,
- den Ortsvektor  $\underline{OB}$ ,
- irgendeinen zu  $\underline{OB}$  äquivalenten Vektor.

Daran muß man sich gewöhnen.

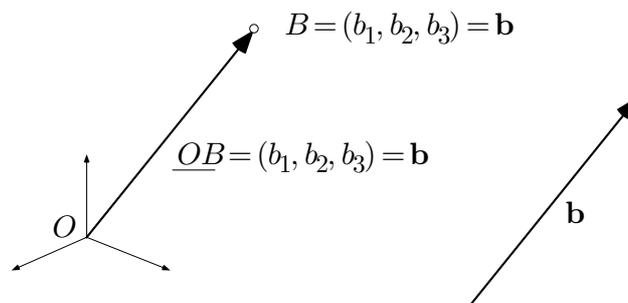


Fig. 1.6.4

## Summe und skalare Vielfache von Vektoren

Die **Summe**  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  zweier Vektoren ist geometrisch durch die bekannte Figur 1.6.1 erklärt, in Koordinaten ist

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

wobei man beweisen müßte, daß diese “analytische Definition” auf dasselbe hinausläuft wie die geometrische. Die Addition von Vektoren ist kommutativ und assoziativ:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Ferner gibt es zu jedem Vektor  $\underline{AB} =: \mathbf{v}$  den **entgegengesetzten Vektor**  $-\mathbf{v} := \underline{BA}$  (siehe die Fig. 1.6.5); es ist

$$-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, -v_3), \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (\text{Nullvektor}).$$

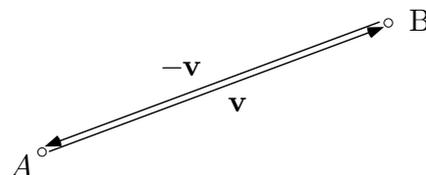


Fig. 1.6.5

Durch

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} := \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$$

ist dann auch die Subtraktion definiert, und es gelten die üblichen Rechenregeln. Insbesondere ist (Fig. 1.6.6)

$$\underline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} .$$

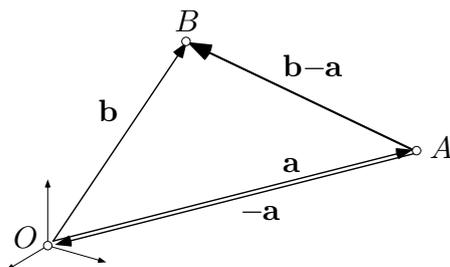


Fig. 1.6.6

Ist weiter  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine beliebige Zahl (in diesem Zusammenhang als **Skalar** bezeichnet), so ist  $\lambda \mathbf{a}$  erklärt durch die Figur 1.6.7 und die Festsetzung

$$|\lambda \mathbf{a}| := |\lambda| |\mathbf{a}| .$$

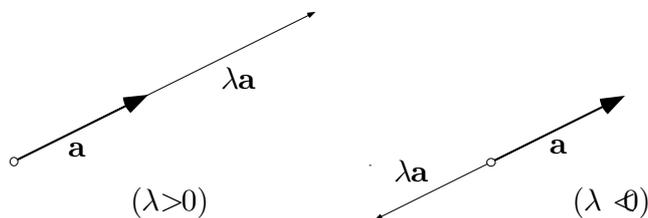


Fig. 1.6.7

Wie erwartet, gilt dann in Koordinaten

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) ;$$

ferner hat man die plausiblen Rechenregeln

$$\begin{aligned} 0 \mathbf{a} &= \mathbf{0}, & 1 \mathbf{a} &= \mathbf{a}, & (-1) \mathbf{a} &= -\mathbf{a}, \\ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, & (\lambda + \mu) \mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} \end{aligned}$$

und andere.

Ein Vektor  $\mathbf{e}$  der Länge 1 ist ein **Einheitsvektor**. Die Spitzen der in  $O$  angehefteten Einheitsvektoren bilden zusammen die (zweidimensionale) **Einheitssphäre**

$$S^2 := \{ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{e}| = 1 \} .$$

Zu jedem Vektor  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  erhält man durch **Normierung** einen Einheitsvektor  $\mathbf{e}$ , der in dieselbe Richtung zeigt wie  $\mathbf{a}$ , und zwar ist  $\mathbf{e}$  gegeben durch (Fig. 1.6.8)

$$\mathbf{e} := \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} .$$

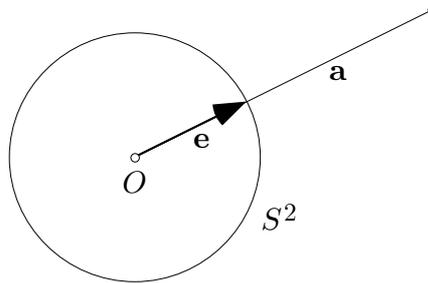


Fig. 1.6.8

Jeder Vektor  $\mathbf{x}$  läßt sich (in eindeutiger Weise) als **Linearkombination** der drei **Basisvektoren**  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  darstellen (Fig. 1.6.9):

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k .$$

Die drei Vektoren  $x_k \mathbf{e}_k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) sind die **Komponenten** von  $\mathbf{x}$  in den drei Achsenrichtungen.

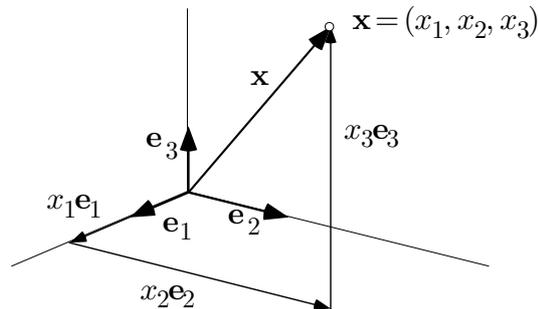


Fig. 1.6.9

*Bemerkung:* Der dreidimensionale Raum, versehen mit der hier behandelten additiven Struktur, ist dem allgemeinen Begriff des **Vektorraums** Pate gestanden. Hierunter versteht man ein System von irgendwelchen Objekten, genannt **Vektoren**, die unter sich addiert und mit Skalaren  $\lambda \in \mathbb{R}$  gestreckt werden können, so daß die “üblichen Rechenregeln” gelten.

① Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  der Differentialgleichung

$$y'''' = 0$$

ist nicht eine Menge von Zahlen (oder von Punkten  $(x, y)$ ), sondern eine Menge von Funktionen: Gesucht sind diejenigen Funktionen  $t \mapsto y(t)$ , für die  $y''''(t) \equiv 0$  ist. Wie man sich leicht überlegt, besteht  $\mathcal{L}$  aus den sämtlichen Polynomen

$$p(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}).$$

Die Menge  $\mathcal{L}$  ist somit nicht einfach “ein Sack voll Funktionen”, sondern besitzt eine bestimmte algebraische Struktur:  $\mathcal{L}$  ist ein vierdimensionaler Vektorraum. Die vier Monome

$$e_k(\cdot): \quad t \mapsto t^k \quad (0 \leq k \leq 3)$$

bilden eine Basis dieses Vektorraums, und jedes  $p(\cdot) \in \mathcal{L}$  ist eine wohlbestimmte Linearkombination der  $e_k(\cdot)$ . Für das angeschriebene  $p(\cdot)$  sieht das folgendermaßen aus:

$$p(\cdot) = \sum_{k=0}^3 \alpha_k e_k(\cdot).$$

○

② Gegeben sind  $N$  Punktmassen  $m_i$  in den Punkten  $A_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Gesucht ist der sogenannte Schwerpunkt dieses Systems (Fig. 1.6.10). — Beachte: Der Index  $i$  nummeriert die Punkte, nicht die Koordinatenvariablen, die wir hier übungshalber mit  $x, y, z$  bezeichnen.

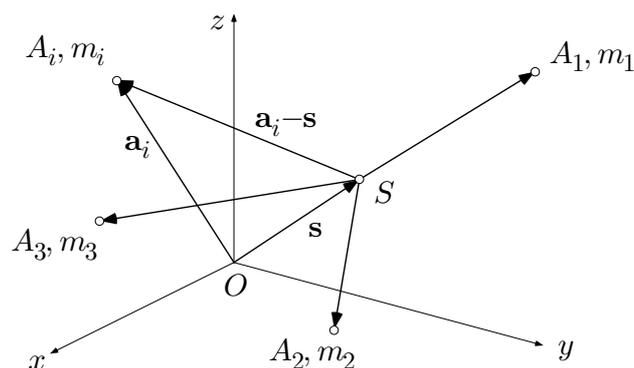


Fig. 1.6.10

Der **Schwerpunkt**  $S$  ist definiert durch die sogenannte **Momentenbedingung**

$$\sum_{i=1}^N m_i \underline{SA}_i = \mathbf{0} .$$

Wegen  $\underline{SA}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{s}$  folgt

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i - \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{s}$$

und somit

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^N m_i ; \quad (1)$$

in Worten:  $\mathbf{s}$  ist das gewichtete Mittel der  $\mathbf{a}_i$ . Sind alle Massen  $m_i$  gleich, so hebt sich der gemeinsame Wert heraus, und man hat

$$\mathbf{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i .$$

In Koordinaten sieht das folgendermaßen aus: Es sei

$$\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad (1 \leq i \leq N)$$

und  $\mathbf{s} = (\xi, \eta, \zeta)$ . Die Formel (1) gilt dann auch "koordinatenweise":

$$\xi = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \eta = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad \bigcirc$$

③ Gegeben sind ein Punkt  $A$  mit Ortsvektor  $\mathbf{a}$  und ein Vektor  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ . Die Gerade  $g$  durch  $A$  in Richtung  $\mathbf{p}$  hat folgende Parameterdarstellung, wobei  $\mathbf{x}$  den Ortsvektor des laufenden Punktes  $X \in g$  bezeichnet:

$$g: \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{p} \quad (-\infty < t < \infty) .$$

Insbesondere ist  $\mathbf{x}(0) = A$ ,  $\mathbf{x}(1) = B$  (Fig. 1.6.11). Beachte: Dieselbe Gerade kann verschiedene derartige Parameterdarstellungen haben, da zum Beispiel der "Anfangspunkt"  $A$  durch  $g$  nicht vorbestimmt ist.

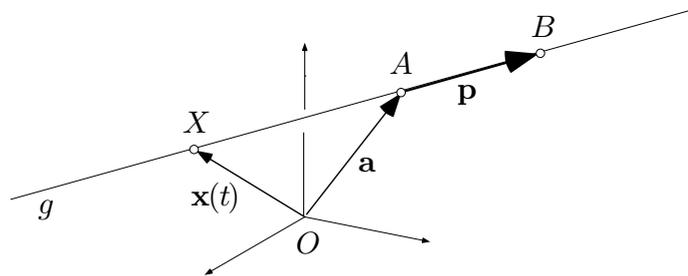


Fig. 1.6.11

Bsp: Gegeben seien  $A := (2, 1, 7)$  und  $\mathbf{p} := \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ . Der Vektor  $\mathbf{p}$  ist ein Einheitsvektor. Verwenden wir Koordinaten  $x, y, z$ , so haben wir

$$g: \quad \mathbf{r}(t) = (2, 1, 7) + \frac{t}{3}(2, -2, 1) \quad (-\infty < t < \infty)$$

bzw.

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2 + \frac{2}{3}t \\ y(t) = 1 - \frac{2}{3}t \\ z(t) = 7 + \frac{1}{3}t \end{array} \right\} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Eine Parameterdarstellung der Ebene  $\Sigma$  durch drei gegebene Punkte  $A, B, C$  erhält man folgendermaßen (Fig. 1.6.12): Setze  $\mathbf{p} := \underline{AB}$ ,  $\mathbf{q} := \underline{AC}$ . Dann wird  $\Sigma$  produziert durch

$$\Sigma: \quad \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q} \quad (-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty).$$

Man beachte, daß wir zur Parameterdarstellung einer sogenannten “zweidimensionalen Mannigfaltigkeit”, *volgo*: Fläche, zwei Parameter  $u, v$  benötigen. ○

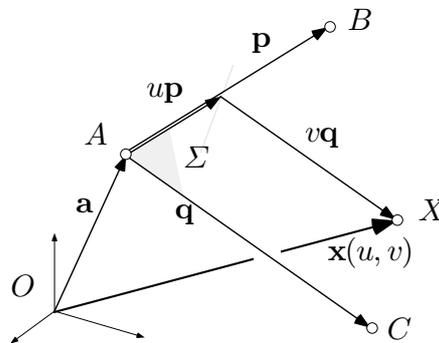


Fig. 1.6.12

## Skalarprodukt

Je zwei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  lassen sich auf zwei Arten miteinander multiplizieren. Wir behandeln zunächst das sogenannte Skalarprodukt, auch **inneres Produkt** genannt. Hier ist das Resultat der Multiplikation eine *Zahl*.

Sind die beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  beide  $\neq \mathbf{0}$ , so ist der nichtorientierte Winkel  $\phi := \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  wohldefiniert (Fig. 1.6.13). Das **Skalarprodukt** von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist dann geometrisch erklärt durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi \quad (\implies \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2) .$$

Das Skalarprodukt ist

$> 0$ , wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  einen spitzen Winkel einschließen,

$= 0$ , wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufeinander senkrecht stehen,

$< 0$ , wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  einen stumpfen Winkel einschließen,

und definitionsgemäß

$= 0$ , wenn  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  oder  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  ist.

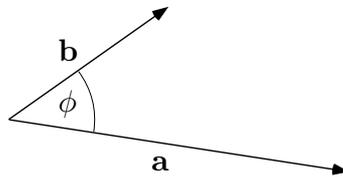


Fig. 1.6.13

**(1.2)** Das Skalarprodukt ist eine **symmetrische bilineare Funktion** von zwei Vektorvariablen, das heißt: Es gilt

(a) 
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} ,$$

(b) 
$$\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) ,$$

(c) 
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} .$$

□ (a) und (b) sind ziemlich klar. Beim Beweis des Distributivgesetzes (c) dürfen wir wegen (b) annehmen,  $\mathbf{a}$  sei ein Einheitsvektor, den wir im weiteren mit  $\mathbf{e}$  bezeichnen und festhalten. Jeder Vektor  $\mathbf{x}$  besitzt eine wohlbestimmte Orthogonalprojektion in die Richtung von  $\mathbf{e}$ . Bezeichnen wir diese **e-Komponente** von  $\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{x}_e$ , so gilt (Fig. 1.6.14):

$$\mathbf{x}_e = |\mathbf{x}| \cos \phi \mathbf{e} = |\mathbf{x}| |\mathbf{e}| \cos \phi \mathbf{e}$$

und somit nach Definition des Skalarprodukts:

$$\mathbf{x}_e = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e} . \tag{2}$$

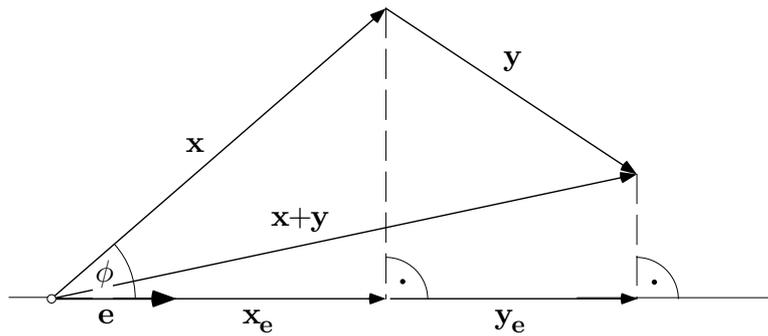


Fig. 1.6.14

Wie man der Figur entnimmt, ist

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})_e = \mathbf{x}_e + \mathbf{y}_e$$

und somit wegen (2):

$$(\mathbf{e} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})) \mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{e} .$$

Hieraus folgt (c) durch Koeffizientenvergleich. ┘

Da die drei Basis-Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\forall i, \forall k: \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} ,$$

wobei das praktische **Kronecker-Delta** folgendermaßen definiert ist:

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

Damit sind wir auch imstande, das Skalarprodukt “in Koordinaten auszudrücken”: Ist  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , so können wir schreiben

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i ,$$

analog für  $\mathbf{b}$ . Aufgrund der Bilinearität ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \left( \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^3 b_k \mathbf{e}_k \right) \\ &= \sum_{i,k} a_i b_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{i,k} a_i b_k \delta_{ik} . \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite geben nur die drei Summanden mit  $i = k$  einen Beitrag, und wir erhalten die Formel

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

die auch als “analytische Definition” des Skalarprodukts bezeichnet wird.

④ Der von zwei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  (beide  $\neq \mathbf{0}$ ) eingeschlossene Winkel  $\phi := \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ist bestimmt durch

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Bsp: Für  $\mathbf{a} := (-2, -1, 2)$  und  $\mathbf{b} := (2, 2, 0)$  ergibt sich

$$\cos \phi = \frac{(-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

folglich ist  $\phi = 3\pi/4$ . ○

⑤ Gegeben sind ein Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  und ein Punkt  $A = (a_1, a_2, a_3)$ . Gesucht ist die Gleichung der Ebene  $\Sigma$ , die auf  $\mathbf{n}$  senkrecht steht und durch  $A$  geht.

Betrachte einen allgemeinen Raumpunkt  $X$ . Es gilt (Fig. 1.6.15):

$$\begin{aligned} X \in \Sigma &\iff \mathbf{x}_n = \mathbf{d} = \mathbf{a}_n \stackrel{(*)}{\iff} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{n} \\ &\iff \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned}$$

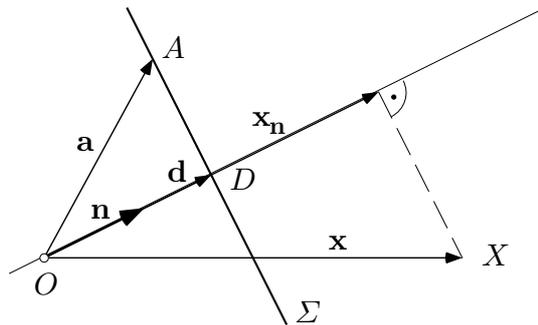


Fig. 1.6.15

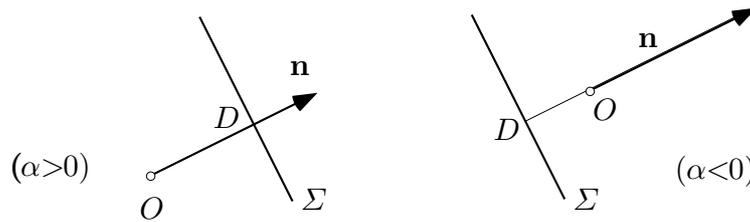


Fig. 1.6.16

wobei wir an der Stelle (\*) die Formel (2) verwendet haben. Die rechte Seite dieser Schlußkette ist die vektorielle Gestalt der gesuchten Ebenengleichung. Es sei zum Beispiel  $\mathbf{n} := (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  und  $A := (5, 1, -3)$ . Dann lautet die zugehörige Ebenengleichung in Koordinaten:

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}(-3) = 1 .$$

Es sei  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{n}$  und somit  $|\alpha|$  der Abstand der Ebene  $\Sigma$  vom Ursprung (Fig. 1.6.16). Betrachtet man anstelle von  $A$  den Punkt  $D$  als vorgegebenen Punkt, so erhält man als Ebenengleichung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} .$$

Wegen  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{n} \cdot (\alpha \mathbf{n}) = \alpha$  können wir dies in der Form

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha \quad (|\mathbf{n}| = 1)$$

schreiben, wobei nun  $\alpha$  eine geometrische Bedeutung hat und der durch  $\Sigma$  nicht vorbestimmte Punkt  $A$  nicht in Erscheinung tritt.  $\bigcirc$

⑥ Gesucht ist die Gleichung des Doppelkegels  $K$  mit Spitze  $S$ , Achsenrichtung  $\mathbf{a}$  und halbem Öffnungswinkel  $\omega$ .

Wir betrachten wieder einen allgemeinen Raumpunkt  $X$ . Mit den Bezeichnungen der Fig. 1.6.17 gilt:

$$\begin{aligned} X \in K &\iff \phi = \omega \vee \phi = \pi - \omega \iff \cos^2 \phi = \cos^2 \omega \\ &\iff \frac{((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a})^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 \cdot |\mathbf{a}|^2} = \cos^2 \omega \\ &\iff ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a})^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 |\mathbf{a}|^2 \cos^2 \omega , \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle (\*) das Ergebnis von Beispiel ④ verwendet haben. Die letzte Gleichung ist die gesuchte Kegelgleichung.

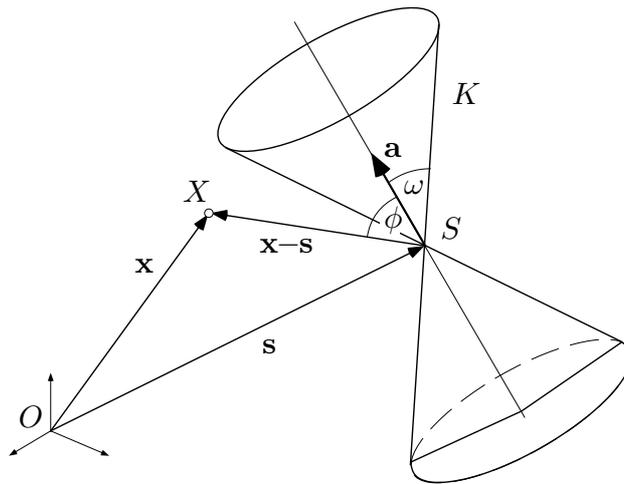


Fig. 1.6.17

Bsp: Für  $\mathbf{s} := \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a} := (1, 1, 1)$  und  $\cos \omega := 1/\sqrt{3}$  wird

$$(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = x_1 + x_2 + x_3 .$$

Damit erhält man die Kegelgleichung

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} ,$$

vereinfacht:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 .$$

Die drei Koordinatenachsen sind Mantellinien dieses Kegels. ○

## Vektorprodukt

Die  $r$  Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  heißen **linear unabhängig**, wenn sie einen  $r$ -dimensionalen Teilraum des  $\mathbb{R}^3$  aufspannen. Ein Vektor ist linear unabhängig, wenn er  $\neq \mathbf{0}$  ist; zwei Vektoren sind linear unabhängig, wenn sie eine Ebene aufspannen, drei Vektoren, wenn sie den ganzen Raum aufspannen, das heißt: wenn sie nicht in einer Ebene liegen (Fig. 1.6.18).

Das **Vektorprodukt**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (ein Vektor!) der zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist wie folgt definiert: Sind  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  linear abhängig, so ist  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \mathbf{0}$ . Sind  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  linear unabhängig, so ist  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  festgelegt durch (Fig. 1.6.19):

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \phi$ ,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{a}$  und auf  $\mathbf{b}$ ,
- die drei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

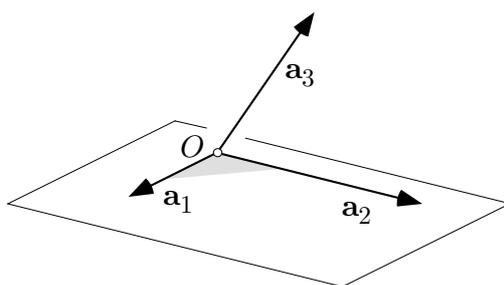


Fig. 1.6.18

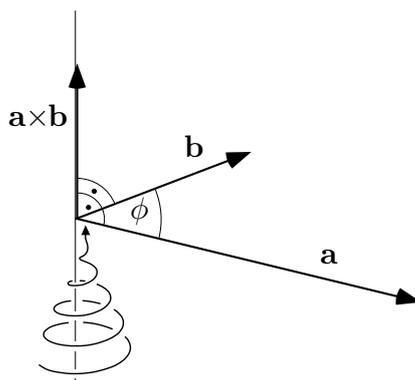


Fig. 1.6.19

*Folgerungen:*

- (a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind linear abhängig.

*Merke:* Verschwinden des Skalarprodukts signalisiert die Orthogonalität, Verschwinden des Vektorprodukts die lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .

- (b)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  ist der Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms (Fig. 1.6.20).

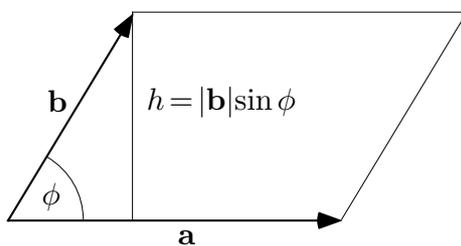


Fig. 1.6.20

- (c)  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$   
 (d)  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0};$   
 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$   
 bzw.  $\forall i: \quad \mathbf{e}_{i+1} \times \mathbf{e}_{i+2} = \mathbf{e}_i.$

In der letzten Formel ist die Indexvariable  $i$  "modulo 3" zu nehmen, siehe auch die Fig. 1.6.21.

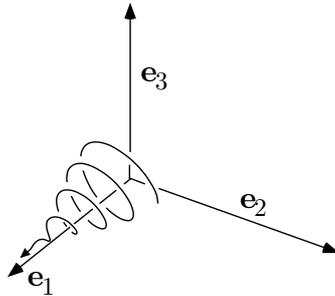


Fig. 1.6.21

**(1.3)** Das Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$  ist eine schiefsymmetrische bilineare vektorwertige Funktion von zwei Vektorvariablen. Insbesondere gilt

- (a)  $\lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$   
 (b)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y}.$

□ (a) ist ziemlich klar. — Beim Beweis von (b) dürfen wir annehmen,  $\mathbf{a}$  sei ein Einheitsvektor, den wir im weiteren mit  $\mathbf{e}$  bezeichnen und festhalten. Es seien  $E$  die zu  $\mathbf{e}$  senkrechte Ebene durch  $\mathbf{0}$ , weiter  $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Orthogonalprojektion auf  $E$  und  $D: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Drehung um die Achse  $\mathbf{e}$  um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  (Fig. 1.6.22). Wir behaupten, es gilt

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \quad D(P(\mathbf{x})) = \mathbf{e} \times \mathbf{x}. \quad (3)$$

Der Figur entnimmt man

$$|D(P(\mathbf{x}))| = |P(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}| \sin \phi = |\mathbf{x}| |\mathbf{e}| \sin \phi = |\mathbf{e} \times \mathbf{x}|,$$

und die Richtung stimmt auch. Damit ist (3) bewiesen.

Aus  $P(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y})$  und der analogen Identität  $D(\mathbf{x}' + \mathbf{y}') = D(\mathbf{x}') + D(\mathbf{y}')$ , angewandt auf  $\mathbf{x}' := P(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{y}' := P(\mathbf{y})$ , folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= D(P(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = D(P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y})) = D(P(\mathbf{x})) + D(P(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{e} \times \mathbf{x} + \mathbf{e} \times \mathbf{y}. \end{aligned} \quad \square$$

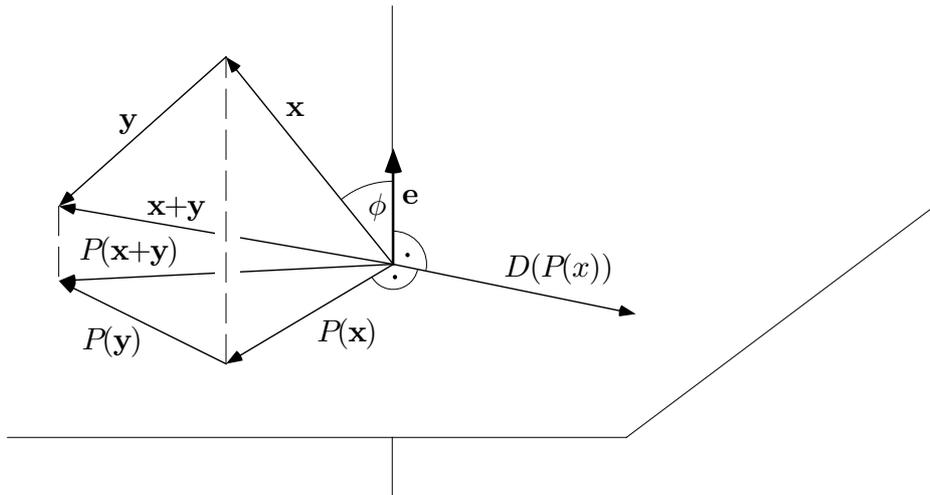


Fig. 1.6.22

Wir können nunmehr auch das Vektorprodukt “in Koordinaten” ausdrücken. Aus

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

folgt mit (1.3) und Folgerung (d):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_1b_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + a_1b_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + a_1b_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \dots \\ &= \mathbf{0} + a_1b_2 \mathbf{e}_3 - a_1b_3 \mathbf{e}_2 + \dots \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + \dots, \end{aligned}$$

wobei wir hier die Rechnung nur unvollständig wiedergegeben haben. Damit ergibt sich als “analytische Definition” des Vektorprodukts die Formel

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

(zyklische Vertauschung!). Eine praktische Merkregel fürs Kopfrechnen ist der Fig. 1.6.23 zu entnehmen.

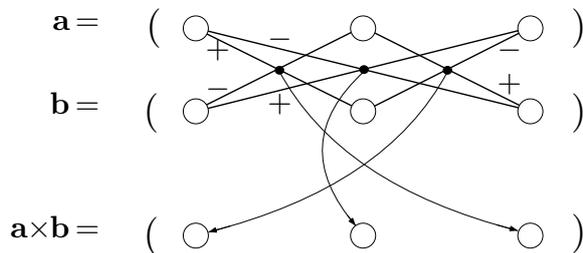


Fig. 1.6.23

$$\begin{aligned} \text{Bsp:} \quad \mathbf{a} &= (2, -3, 5) \\ \mathbf{b} &= (-1, 7, 4) \\ \hline \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (-47, -13, 11) \end{aligned}$$

⑦ Gegeben sind eine Gerade

$$g: \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{p}$$

sowie ein Punkt  $Y$  (Fig. 1.6.24). Gesucht ist eine vektorielle Formel für den Abstand  $d$  des Punktes  $Y$  von der Geraden  $g$ . Man erhält

$$d = |\mathbf{y} - \mathbf{a}| \sin \phi = \frac{1}{|\mathbf{p}|} |\mathbf{p}| |\mathbf{y} - \mathbf{a}| \sin \phi$$

und somit nach Definition des Vektorprodukts:

$$d = \frac{|\mathbf{p} \times (\mathbf{y} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{p}|} .$$

○

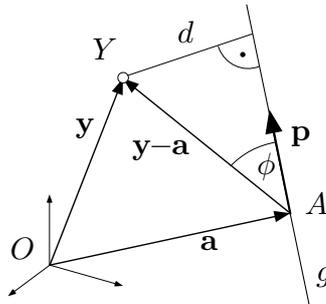


Fig. 1.6.24

⑧ Ein Körper drehe sich mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega > 0$  um die Achse  $a$  durch  $O$ . Es sei  $\mathbf{e}$  der durch die Korkzieherregel bestimmte Einheitsvektor auf  $a$  (Fig. 1.6.25). Der Vektor  $\vec{\omega} := \omega \mathbf{e}$  heißt **Winkelgeschwindigkeitsvektor** dieser Drehbewegung.

Über die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ( $= \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ) eines Masseteilchens an der Stelle  $\mathbf{x}$  läßt sich folgendes sagen:

- (a) (vgl. Beispiel ⑦)  $|\mathbf{v}| = \omega d = \omega |\mathbf{e} \times \mathbf{x}| = |\omega \mathbf{e} \times \mathbf{x}|$ ;
- (b)  $\mathbf{v} \perp \Sigma$  und somit  $\mathbf{v} \perp \omega \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{v} \perp \mathbf{x}$ ;
- (c) das Tripel  $\omega \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  ist ein Rechtssystem.

Aus (a)–(c) ergibt sich die wichtige kinematische Formel

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{x} . \tag{4}$$

○

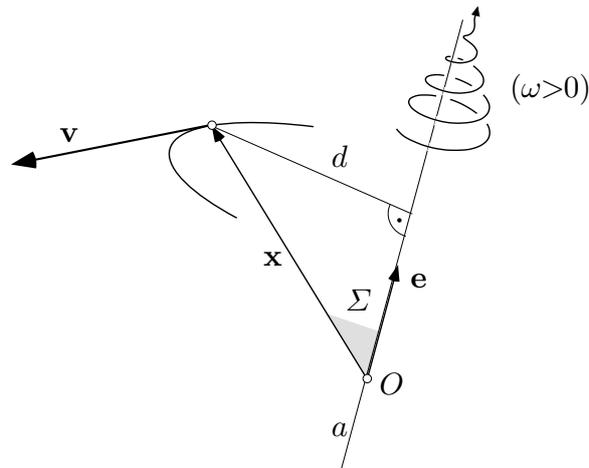


Fig. 1.6.25

### Spatprodukt und andere mehrfache Vektorprodukte

Es gibt drittens ein Produkt von drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — das sogenannte **Spatprodukt**  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ . Sind die drei Vektoren linear unabhängig, so spannen sie ein Parallelepiped oder eben einen **Spat** vom Volumen  $V > 0$  auf (Fig. 1.6.26). Wir definieren

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \begin{cases} 0 & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ linear abhängig}), \\ V & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ ein Rechtssystem}), \\ -V & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ ein Linkssystem}). \end{cases}$$

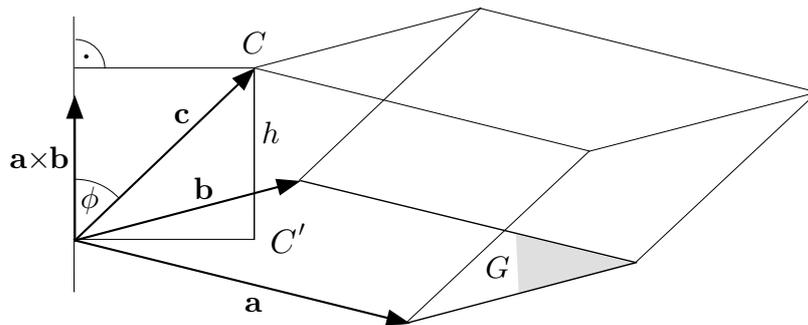


Fig. 1.6.26

Da  $V$  nicht von der Reihenfolge der drei Vektoren abhängt, gilt

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

aber

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}], \dots ;$$

denn bei der Vertauschung zweier Vektoren kehrt sich die Orientierung um. Vor allem hängt  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$  mit den früher erklärten Produkten zusammen via

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) . \quad (5)$$

□ Der Figur 1.6.26 entnimmt man

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \pm V = \pm G \cdot h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \phi \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} , \end{aligned}$$

wobei es auch mit dem Vorzeichen richtig hinkommt. □

Aus (5) folgt mit (1.2) und (1.3), daß das Spatprodukt eine trilineare Funktion von drei Vektorvariablen ist; das war ja aufgrund der Definition nicht ohne weiteres zu erwarten. In Koordinaten ist

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

⑨ Gegeben sind die beiden nicht parallelen Geraden

$$g: \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{p}, \quad h: \mathbf{y}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{q}$$

die im allgemeinen windschief zueinander liegen (Fig. 1.6.27). Gesucht ist ihr kürzester Abstand  $d$ .

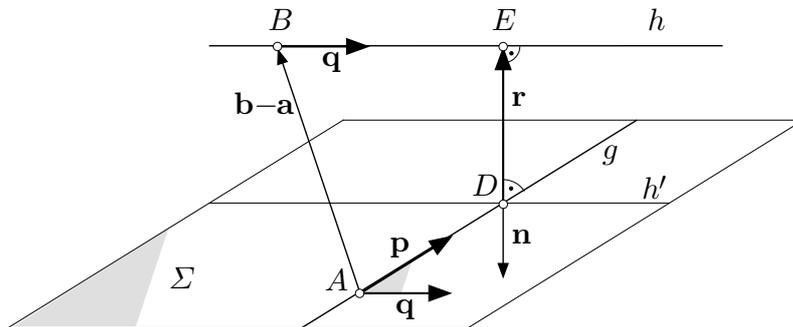


Fig. 1.6.27

Es seien  $\Sigma$  die von  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  aufgespannte Ebene durch  $A$ , dann  $h'$  die Orthogonalprojektion von  $h$  auf  $\Sigma$  und

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|}$$

der Normaleneinheitsvektor von  $\Sigma$ . Aufgrund von (2) gilt

$$\mathbf{r} := (\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\mathbf{n}} = ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

und somit

$$d = |\mathbf{r}| = |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}| = \frac{|[\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]|}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|}.$$

Die Punkte  $D$  und  $E$  sind damit allerdings noch nicht bestimmt.  $\circ$

Außer (5) gibt es noch unzählige weitere Identitäten für mehrfache Vektorprodukte. Wir beweisen zum Schluß die folgende:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \quad (6)$$

Wir wählen eine neue, ebenfalls orthonormierte und "rechtshändige" Basis  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  so, daß  $\mathbf{a}$  ein Vielfaches von  $\mathbf{e}'_1$  ist und  $\mathbf{b}$  in der von  $\mathbf{e}'_1$  und  $\mathbf{e}'_2$  aufgespannten Ebene liegt. Die drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  haben dann folgende neuen Koordinaten:

$$\mathbf{a} = (a_1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

**Orthonormiert** heißt: Für alle  $i$  und  $k$  gilt  $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$ . Die Formeln für die diversen Produkte gelten dann auch bezüglich der neuen Koordinaten. Wir haben daher

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ & \times & \\ & b_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, a_1 b_2)$$

und damit weiter

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 b_2 \\ & \times & \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = (-a_1 b_2 c_2, a_1 b_2 c_1, 0).$$

Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} &= a_1 c_1 (b_1, b_2, 0) - (b_1 c_1 + b_2 c_2) (a_1, 0, 0) \\ &= (-a_1 b_2 c_2, a_1 b_2 c_1, 0). \end{aligned} \quad \lrcorner$$

Aus (6) folgt übrigens, daß das Vektorprodukt nicht assoziativ ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} \\ &= \underline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} - \underline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

und dies ist nicht  $\equiv \mathbf{0}$ .

## Aufgaben

- Gegeben sind die drei Punkte  $A := (3, 1, -2)$ ,  $B := (-1, 4, 0)$ ,  $C := (-2, 1, -1)$ . Bestimme einen Punkt  $D$  so, daß die vier Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Wieviele Lösungen gibt es?
- Zeige: Die Seitenmitten eines räumlichen (nicht notwendigerweise ebenen) Vierecks  $ABCD$  liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.
- Ⓜ Die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  seien linear unabhängig. Zeichne die Kurve  $\gamma$  mit der Parameterdarstellung

$$\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t) := \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

sowie ihre Tangenten in ausgewählten Punkten. Um was für eine Kurve handelt es sich? (Kein Beweis verlangt.)

- In welcher gegenseitigen Lage befinden sich drei Einheitsvektoren mit Summe  $\mathbf{0}$ ?
- Bestimme die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt  $P := (2, 4, -1)$  geht und senkrecht auf der Geraden

$$g: t \mapsto \mathbf{x}(t) := (2, 1, -3) + t(-4, 8, 8) \quad (-\infty < t < \infty)$$

steht. Welchen Abstand hat diese Ebene vom Ursprung?

- Von einem Dreieck  $ABC$  im Raum sind die Seitenmittelpunkte

$$M_a := (1, 0, 3), \quad M_b := (2, 7, 8), \quad M_c := (-2, 1, -4)$$

gegeben. Bestimme  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

- Man gebe drei Einheitsvektoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  an, die auf dem Vektor  $\mathbf{c} := (2, 1, 1)$  senkrecht stehen und untereinander Winkel von  $120^\circ$  einschließen. (*Hinweis:* Man "produziere" solche Vektoren und vermeide das Auflösen von riesigen Gleichungssystemen.)
- Die drei Kanten einer dreikantigen Pyramide bilden untereinander Winkel von je  $45^\circ$ . Bestimme den Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen bzw. den Cosinus oder den Sinus dieses Winkels.
- Es seien  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  zwei feste Vektoren im dreidimensionalen Raum,  $|\mathbf{b}| < 1$ , und es sei die Vektorfolge  $(\mathbf{a}_k)_{k \geq 0}$  rekursiv definiert durch

$$\mathbf{a}_0 := \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_{k+1} := \mathbf{b} \times \mathbf{a}_k \quad (k \geq 0).$$

Berechne  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k$ . (*Hinweis:* Benutze die geometrische Definition des Vektorprodukts. Figur!)

## 1.7 Komplexe Zahlen

Der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

- (a)  $\mathbb{C}$  ist ein Körper; die Elemente  $z$  von  $\mathbb{C}$  heißen **komplexe Zahlen**.
- (b)  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$  (als Körper).
- (c) In  $\mathbb{C}$  gibt es zwei Lösungen  $i$  und  $-i$  der Gleichung  $z^2 + 1 = 0$ .
- (d) Jede komplexe Zahl  $z$  läßt sich auf genau eine Weise darstellen in der Form

$$z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Aus (a)–(c) folgt schon, daß es in  $\mathbb{C}$  Zahlen der Form  $z = x + iy$  gibt, wobei der **Realteil**  $x =: \operatorname{Re} z$  und der **Imaginärteil**  $y =: \operatorname{Im} z$  durch  $z$  eindeutig bestimmt sind. Punkt (d) besagt, daß das schon alle komplexen Zahlen sind. Aus (d) folgt, daß  $\mathbb{C}$  in bijektiver (das heißt: eineindeutiger) Weise auf die  $(x, y)$ -Ebene  $\mathbb{R}^2$  bezogen ist vermöge

$$x + iy \leftrightarrow (x, y).$$

Dabei entspricht die reelle komplexe Zahl 1 dem Punkt  $(1, 0)$  und die Zahl  $i$  dem Punkt  $(0, 1)$ . Es liegt also nahe, die komplexen Zahlen gemäß Figur 1.7.1 in der Ebene zur Darstellung zu bringen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der **komplexen** oder der **Gaußschen Zahlenebene**. Die  $x$ -Achse ist die **reelle Achse** (vgl. Eigenschaft (b)!), die  $y$ -Achse die **imaginäre Achse**.

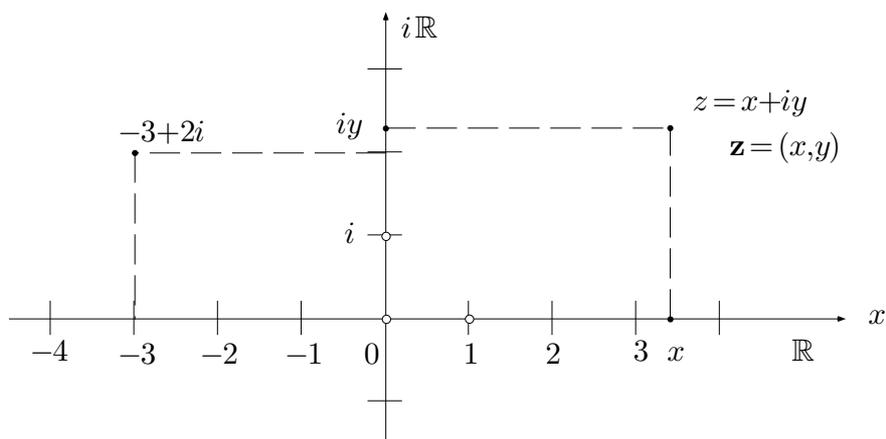


Fig. 1.7.1

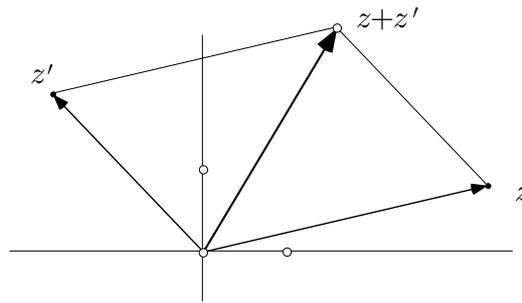


Fig. 1.7.2

## Rechenregeln

In  $\mathbb{C}$  gelten die folgenden Rechenregeln:

Für zwei beliebige Zahlen  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$  hat man

$$z + z' = x + x' + i(y + y'),$$

was geometrisch auf die vektorielle Addition der betreffenden Punkte in der Zahlenebene hinausläuft (Fig. 1.7.2). Weiter ist

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (x + iy) \cdot (x' + iy') \\ &= xx' + xiy' + iyx' + iyiy' \end{aligned}$$

und somit wegen  $i^2 = -1$ :

$$z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + yx').$$

Ist hier speziell  $z := a \in \mathbb{R}$  eine reelle komplexe Zahl, so gilt

$$az' = ax' + iay',$$

das heißt: Der Multiplikation einer Zahl  $z' \in \mathbb{C}$  mit einem  $a \in \mathbb{R}$  entspricht geometrisch die Streckung des Vektors  $z'$  mit dem Skalarfaktor  $a$ .

Ist schließlich  $z \neq 0$ , das heißt:  $(x, y) \neq \mathbf{0}$ , so besitzt  $z$  den Kehrwert

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy) \cdot (x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß wir zur Herleitung dieser Formeln einfach die in jedem Körper gültigen Rechenregeln benutzt haben.

① Die komplexe Zahl  $z := \left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4$  soll in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. — Zunächst ist

$$\frac{8-i}{5+i} = \frac{(8-i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{40 - 1 + i(-5-8)}{25+1} = \frac{1}{2}(3-i).$$

Im weiteren dürfen wir die binomische Formel natürlich auch im Komplexen anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{16}(3-i)^4 = \frac{1}{16}(3^4 - 4 \cdot 3^3 i + 6 \cdot 3^2 i^2 - 4 \cdot 3 i^3 + i^4) \\ &= \frac{1}{16}(81 - 54 + 1 + i(-108 + 12)) = \frac{1}{4}(7 - 24i). \end{aligned}$$

○

Die Gleichung  $z^2 + 1 = 0$ , die die Zahl  $i$  “definiert”, besitzt die beiden Lösungen  $i$  und  $-i$ . Das hat letzten Endes zur Folge, daß die Körperstruktur von  $\mathbb{C}$  bezüglich der “Spiegelung”  $i \mapsto -i$  symmetrisch ist. Ist  $z = x + iy$ , so heißt

$$\bar{z} := x - iy$$

die zu  $z$  **konjugiert komplexe** Zahl. Die Punkte  $z$  und  $\bar{z}$  liegen spiegelbildlich zur reellen Achse (Fig. 1.7.3).

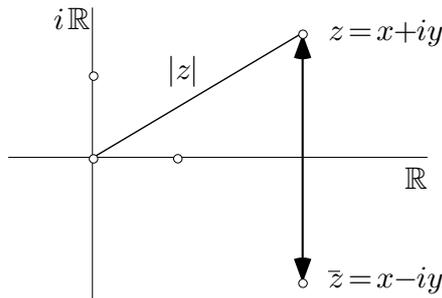


Fig. 1.7.3

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}; \quad \overline{\bar{z}} = z;$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{1/z} = 1/\bar{z}.$$

② Es sei

$$q(t) := a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (0 \leq k \leq n)$$

ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten. Wir behaupten: Ist die komplexe Zahl  $z_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q$ , so ist auch  $\bar{z}_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q$ .

┌ Für ein beliebiges komplexes Polynom

$$p(t) := c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (0 \leq k \leq n),$$

in der Unbestimmten  $t$  definieren wir das Polynom  $\bar{p}$  durch Konjugation der Koeffizienten von  $p$ :

$$\bar{p}(t) := \bar{c}_n t^n + \bar{c}_{n-1} t^{n-1} + \dots + \bar{c}_0.$$

Nach Voraussetzung über  $q$  ist  $\bar{q} = q$ ; ferner gibt es ein komplexes Polynom  $r$  mit

$$(t - z_0)^m r(t) = q(t).$$

Es folgt

$$(t - \bar{z}_0)^m \bar{r}(t) = \bar{q}(t) = q(t);$$

denn beim Ausmultiplizieren der Polynome linker Hand werden alle Koeffizienten gegenüber den entsprechenden Koeffizienten in der vorangehenden Gleichung konjugiert. Wie man sieht, enthält  $q$  auch den Faktor  $(t - \bar{z}_0)^m$ .

└  
○

Weiter ist

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Aufgrund der geometrischen Interpretation (Fig. 1.7.3) liegt es nahe, die Größe

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

als (**absoluten**) **Betrag** von  $z$  zu bezeichnen. Für den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} |z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'|, \\ z \in \mathbb{R} &\implies |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}, \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \\ |z + z'| &\leq |z| + |z'|. \end{aligned}$$

┌ Die erste Regel folgt aus

$$|z z'|^2 = z z' \cdot \overline{z z'} = z \bar{z} z' \bar{z}' = |z|^2 |z'|^2$$

durch Ziehen der Quadratwurzel. Der Rest ist klar.

└

## Polarform, Eulersche Formel

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  stehen uns neben den kartesischen Koordinaten  $x, y$  noch die Polarkoordinaten  $r, \phi$  zur Verfügung. In der komplexen Zahlenebene kommen die Polarkoordinaten folgendermaßen zum Zug:

Zunächst definieren wir für beliebiges  $z = x + iy \neq 0$ :

$$\arg z := \arg(x, y) .$$

Dann sind die Polarkoordinaten  $r, \phi$  der komplexen Zahl  $z$  gegeben durch

$$\begin{cases} r = |z| \\ \phi = \arg z \end{cases}$$

(das ist nichts Neues); umgekehrt erhält man  $z$  aus  $r$  und  $\phi$  vermöge

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi) .$$

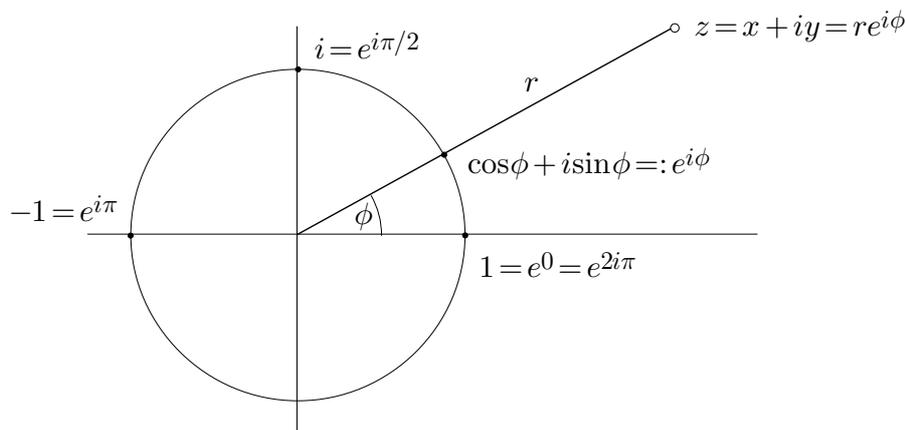


Fig. 1.7.4

Da das Binom  $\cos \phi + i \sin \phi$  noch eine große Rolle spielen wird, ist es angebracht, dafür eine Abkürzung einzuführen:

$$\cos \phi + i \sin \phi =: e^{i\phi} \quad (\text{Eulersche Formel}) .$$

Die **Polarform** einer komplexen Zahl  $z$  (Fig. 1.7.4) erhält damit die folgende Gestalt:

$$z = r e^{i\phi} .$$

Die gewählte Symbolik wird im folgenden hinreichend gerechtfertigt. Wir notieren noch die speziellen Werte

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1$$

sowie das Prinzip

$$e^{i\phi} = 1 \iff \phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vor allem genügt  $e^{i\cdot}$  der Funktionalgleichung

$$e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)} \quad (\phi, \psi \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lceil \quad e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos \phi + i \sin \phi)(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi + i(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \\ &= \cos(\phi + \psi) + i \sin(\phi + \psi) \\ &= e^{i(\phi+\psi)}. \quad \rfloor \end{aligned}$$

Hieraus folgt

**(1.4)** Für beliebige  $z, z' \in \mathbb{C}_{\neq 0}$  gilt

- (a)  $|z z'| = |z| |z'|,$   
 (b)  $\arg(z z') = \arg z + \arg z'.$

In Worten: Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen multiplizieren sich die absoluten Beträge und addieren sich die Argumente, wobei natürlich die Argumente “modulo  $2\pi$ ” zu verstehen sind.

⌈ (a) ist schon bewiesen. — (b): Aus

$$z z' = r e^{i\phi} \cdot r' e^{i\phi'} = r r' e^{i(\phi+\phi')}$$

folgt wegen  $r r' > 0$ :

$$\arg(z z') = \arg(r r' e^{i(\phi+\phi')}) = \arg(e^{i(\phi+\phi')}) = \phi + \phi' = \arg z + \arg z'. \quad \rfloor$$

Aus (1) folgt weiter

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad (e^{i\phi})^n = e^{in\phi}$$

und somit für eine beliebige Zahl  $z = r e^{i\phi}$ :

$$z^n = r^n e^{in\phi}, \quad (2)$$

das heißt: Die  $n$ -te Potenz von  $z$  hat den Betrag  $r^n$  und das Argument  $n\phi$  (Fig. 1.7.5).

③ Es sollen die Polarform sowie Real- und Imaginärteil der Zahl

$$z := \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^5}$$

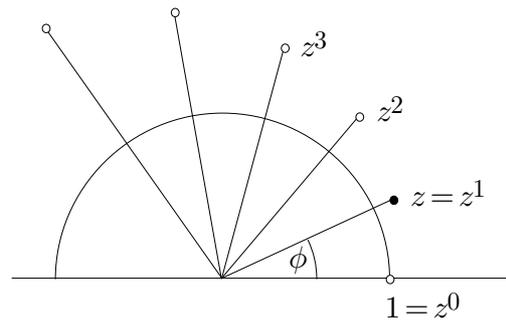


Fig. 1.7.5

bestimmt werden. — Mit  $z_1 := 1 - i$ ,  $z_2 := \sqrt{3} + i$  (Fig. 1.7.6) ergibt sich

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad |z_2| = 2, \quad \arg z_2 = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

und folglich nach (2):

$$|z| = |z_1|^6 / |z_2|^5 = (\sqrt{2})^6 / 2^5 = \frac{1}{4},$$

$$\arg z = 6 \arg z_1 - 5 \arg z_2 = 6 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 5 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{14\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Hiernach ist

$$z = \frac{1}{4} e^{-i\pi/3} = \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} - i \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

○

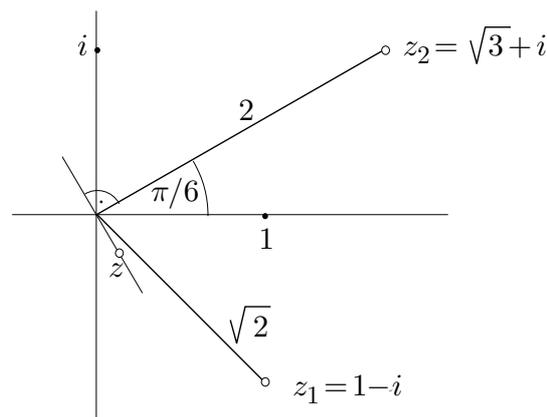


Fig. 1.7.6

## Wurzelziehen im Komplexen

Wie steht es mit dem Ziehen von  $n$ -ten Wurzeln? Den Fall  $n := 2$  (**Quadratwurzel**) wollen wir übungshalber zunächst algebraisch behandeln.

Gesucht sind also die Lösungen  $z = x + iy$  der Gleichung

$$z^2 = c;$$

dabei ist  $c = a + ib$  eine gegebene komplexe Zahl. Wegen

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

erhalten wir durch Trennung von Real- und Imaginärteil die beiden reellen Gleichungen

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b. \quad (3)$$

Ist  $b = 0$ , d.h.  $c$  eine reelle Zahl, so folgt  $x = 0$  oder  $y = 0$ . Ist dabei  $a > 0$ , so ist notwendigerweise  $x^2 = a$  und  $y = 0$ , und wir erhalten  $z = \pm\sqrt{a}$ , wie erwartet. Ist aber  $b = 0$  und  $a < 0$ , so muß  $x = 0$  und  $y^2 = -a = |a|$  sein, und es folgt  $z = \pm i\sqrt{|a|}$ .

Bsp:  $z^2 = -32 \implies z = \pm 4i\sqrt{2}$ .

Es sei jetzt  $b \neq 0$ . Wegen

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ergeben sich im Verein mit der ersten Gleichung (3) die Formeln

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \quad (4)$$

(beide Klammern sind  $> 0$ , unabhängig vom Vorzeichen von  $a$ ). Ist  $a \geq 0$ , so berechnen wir  $x$  aus der ersten Gleichung (4) und anschliessend  $y$  aus der zweiten Gleichung (3):

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}, \quad y = \frac{b}{2x}.$$

Im Fall  $a < 0$  berechnen wir erst das  $y$  aus (4) und dann das  $x$  aus (3):

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}, \quad x = \frac{b}{2y}.$$

In jedem Fall erhält man die beiden komplexen Lösungen

$$z_{\pm} = \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right)$$

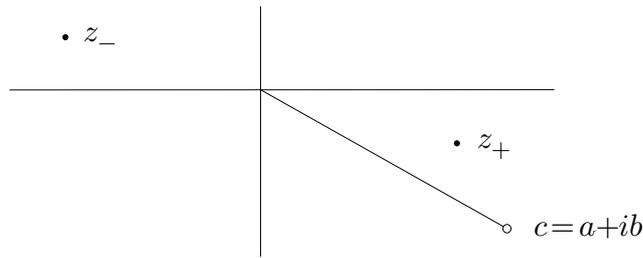


Fig. 1.7.7

der ursprünglichen Gleichung  $z^2 = c$ . Die beiden Punkte  $z_+$  und  $z_-$  liegen spiegelbildlich zum Ursprung (Fig. 1.7.7).

*Anmerkung:* Wir haben an sich nur das folgende bewiesen:

$$z^2 = c \implies z = z_+ \vee z = z_- .$$

Strenggenommen müßte man noch verifizieren, daß tatsächlich  $z_+^2 = z_-^2 = c$  ist; siehe Beispiel 1.2.①.

Die allgemeine quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C},$$

läßt sich durch quadratische Ergänzung auf den eben behandelten Fall zurückführen: Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q =: D .$$

Wir müssen also die beiden Quadratwurzeln " $\pm\sqrt{D}$ " bestimmen und haben dann wie im Reellen die beiden Lösungen

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} .$$

④ Gegeben ist die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0 .$$

Man hat nacheinander

$$p = -2(1+i), \quad q = 3 - 2i, \quad D = \frac{p^2}{4} - q = -3 + 4i$$

und somit nach den oben hergeleiteten Formeln (mit  $a := -3$ ,  $b := 4$ ):

$$\pm\sqrt{D} = \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{25} - 3)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{25} + 3)} \right) = \pm(1 + 2i) .$$

Dies liefert

$$z_{\pm} = 1 + i \pm (1 + 2i),$$

das heißt:  $z_+ = 2 + 3i$ ,  $z_- = -i$ .

○

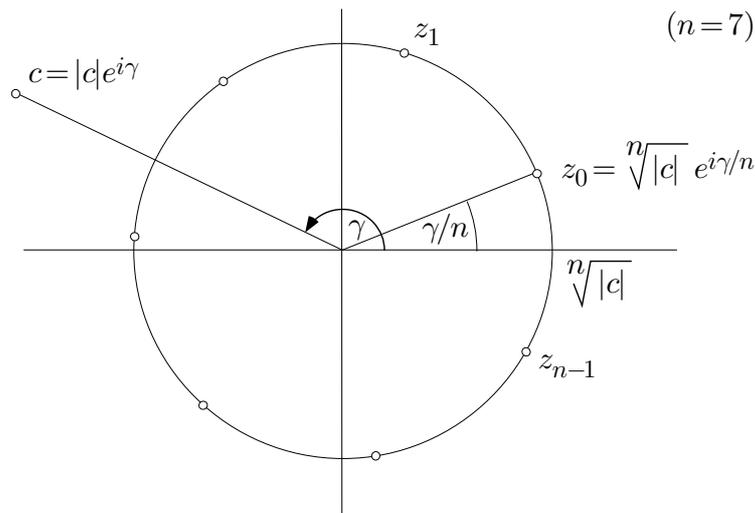


Fig. 1.7.8

Die  $n$ -ten Wurzeln,  $n \geq 1$  beliebig, einer komplexen Zahl  $c \neq 0$  finden wir am besten, indem wir “alles” in Polarform darstellen. Wir schreiben also  $c = |c|e^{i\gamma}$  und machen für die gesuchten Wurzeln  $z$  den Ansatz  $z = re^{i\phi}$ . Die definierende Gleichung  $z^n = c$  geht dann wegen (2) über in

$$r^n e^{in\phi} = |c|e^{i\gamma}.$$

Hieraus folgt erwartungsgemäß

$$r = \sqrt[n]{|c|};$$

vor allem aber müssen die Argumente  $\phi$  der gesuchten Wurzeln der Bedingung

$$e^{in\phi} = e^{i\gamma} \quad \text{bzw.} \quad e^{i(n\phi-\gamma)} = 1$$

genügen. Diese Bedingung ist nicht etwa äquivalent mit  $n\phi = \gamma$ , sondern mit dem folgenden:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \quad n\phi - \gamma = 2k\pi,$$

woraus man für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  einen zulässigen  $\phi$ -Wert

$$\phi_k := \frac{\gamma}{n} + k \frac{2\pi}{n}$$

berechnet. Zwei  $k$ -Werte, die sich um ein Vielfaches von  $n$  unterscheiden, liefern  $\phi$ -Werte, die sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, also dieselbe Zahl  $z = re^{i\phi}$ . Somit bleiben genau  $n$  “modulo  $2\pi$ ” verschiedene  $\phi$ -Werte,

nämlich die Werte  $\phi_k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ). Die zugehörigen  $n$ -ten Wurzeln von  $c$  sind die Zahlen  $z_k := r e^{i\phi_k}$ , ausgeschrieben

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} e^{i(\frac{\gamma}{n} + k\frac{2\pi}{n})} \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

Wegen

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \phi_{k+1} - \phi_k = \frac{2\pi}{n} \quad \forall k$$

bilden diese  $n$  Wurzeln ein reguläres  $n$ -Eck auf dem Kreis vom Radius  $\sqrt[n]{|c|}$  (Fig. 1.7.8).

Ist speziell  $c = 1$ , so erhält man die sogenannten  $n$ -ten **Einheitswurzeln**. Wegen  $|c| = 1$ ,  $\gamma = 0$  bilden sie ein reguläres  $n$ -Eck auf dem Einheitskreis mit einer Ecke im Punkt 1. Nach der allgemeinen Formel sind sie gegeben durch

$$z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}.$$

Setzt man zur Abkürzung  $z_1 = e^{2\pi i/n} =: \omega$  (Fig. 1.7.9), so kann man alle übrigen mit Hilfe dieses  $\omega$  darstellen:

$$z_k = \omega^k \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

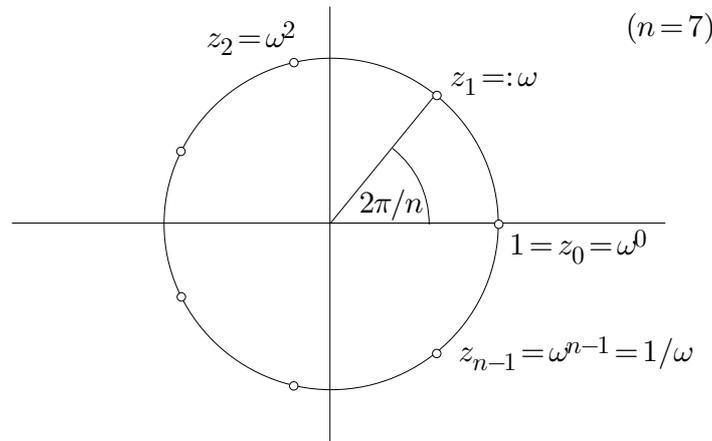


Fig. 1.7.9

Ausgangspunkt zur Einführung der komplexen Zahlen war das Bestreben, "aus negativen Zahlen die Wurzel zu ziehen". Wie wir gesehen haben, ist damit von selbst jede quadratische Gleichung, und nicht nur die spezielle Gleichung  $z^2 + 1 = 0$ , in befriedigender Weise lösbar geworden. In Wirklichkeit gilt ein viel allgemeinerer Satz, der **Fundamentalsatz der Algebra** (ohne Beweis):

**(1.5) Jedes Polynom**

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0$$

vom Grad  $n \geq 1$  mit komplexen Koeffizienten  $c_k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) besitzt wenigstens eine Nullstelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Aus (1.5) folgt weiter, daß sich jedes Polynom vom Grad  $n \geq 1$  in  $n$  Linearfaktoren zerlegen läßt und somit genau  $n$  komplexe Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt) besitzt. Für  $1 \leq n \leq 4$  gibt es klassische Lösungsformeln, wobei man aber für alle  $n > 2$  mit numerischen Methoden besser fährt. Ein respektabler Teil der numerischen Mathematik handelt nämlich gerade von dem Problem, die Nullstellen eines gegebenen Polynoms in effizienter Weise numerisch zu bestimmen.

**Aufgaben**

1. (M) Zerlege die Zahl  $\left(\frac{24-7i}{20+15i}\right)^{17}$  in Real- und Imaginärteil. (Hinweis: Lieber ohne die binomische Formel.)
2. (Fig. 1.7.10) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Punkte  $1/\bar{z}$ ,  $1/z$ ,  $z^2$ .

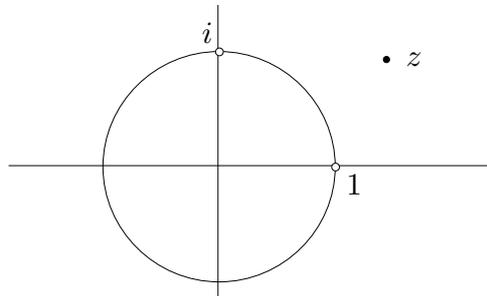


Fig. 1.7.10

3. (M) Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form  $a + ib$  dar:
  - (a)  $\frac{1}{i + \frac{1}{i + 1}}$ ,      (b)  $e^{i \arcsin x}$ ,      (c)  $e^{2i \arctan t}$ .

4. (M) Bestimme sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^4 - 8(-1 + \sqrt{3}i) = 0.$$

5. (M) Stelle  $\cos(5\phi)$ ,  $\sin(5\phi)$  als Polynome in  $\cos\phi$ ,  $\sin\phi$  dar. (*Hinweis:* Binomische Formel)
6. Es sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Man bestimme das Produkt aller  $n$ -ten Wurzeln der Zahl  $-1$ .
7. Es sei  $z := 1 + i\sqrt{3}$ . Bestimme die Daten  $a, q$  der logarithmischen Spiralen

$$\gamma: \quad r(\phi) := a e^{q\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty),$$

die durch die sämtlichen Punkte  $z^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) gehen.

8. (M) Die Gleichung

$$z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$$

besitzt die Lösung  $z_1 = 1 + i$ . Bestimme sämtliche Lösungen dieser Gleichung.

9. Durch  $z \mapsto w := 1/z$  wird die **punktierte Ebene** ( $:= \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) in die  $w$ -Ebene abgebildet. Man zeichne die Bilder
- (a) der reellen Achse,                      (b) der imaginären Achse,  
(c) eines Kreises  $|z| = r$ ,                      (d) der Geraden  $\operatorname{Re} z = 1$ .

# 2

## Funktionen

### 2.1 Erscheinungsformen

#### Begriff der Funktion

Zu Eulers Zeiten verstand man unter einer “Funktion  $f(x)$ ” das, was wir heute als **Funktionsterm** bezeichnen: einen mehr oder weniger komplizierten Ausdruck in der unabhängigen Variablen  $x$ ,

Bsp: 
$$\frac{\log(x + \sqrt{1 + x^2})}{2 + \cos x},$$

der für jede Zahl  $x$  eines geeigneten Bereichs der Zahlengeraden einen wohlbestimmten Funktionswert  $f(x)$  festlegt.

Seither ist diese Vorstellung umfassend verallgemeinert und auch präzisiert worden. Insbesondere sind wir heute gewohnt, die eigentliche Funktion, das “Rechengesetz”, mit  $f$  (gelegentlich mit  $f(\cdot)$ , s.u.) zu bezeichnen und nur dann  $f(x)$  zu schreiben, wenn tatsächlich der Funktionswert an der Stelle  $x$  gemeint ist. Diese Linie läßt sich allerdings nicht immer durchziehen; so sprechen wir etwa von der “Funktion  $e^t$ ” und meinen damit die Funktion  $\exp: t \mapsto e^t$ .

Also: Sind  $A$  und  $B$  beliebige Mengen, so versteht man unter einer **Funktion** oder **Abbildung** von  $A$  nach  $B$  eine Vorschrift  $f$ , die für jeden Punkt  $x \in A$  einen bestimmten Punkt  $y \in B$  als **Funktionswert** oder **Bildpunkt** festlegt. Wir schreiben dafür

$$f: A \rightarrow B, \quad x \mapsto y := f(x).$$

Die Menge  $A =: \text{dom}(f)$  heißt der **Definitionsbereich** (englisch: *domain*) von  $f$ , die Menge  $B$  der **Zielbereich** (englisch: *range*) von  $f$ . Die Menge

$$\text{im}(f) := \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$$

der tatsächlich angenommenen Werte ist im allgemeinen eine echte Teilmenge von  $B$  und heißt **Bildmenge** oder **Wertebereich** von  $f$ .

*Bsp:* Die Sinusfunktion läßt sich zum Beispiel als Funktion  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oder als Funktion  $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  auffassen. In beiden Fällen ist  $\text{im}(\sin) = [-1, 1]$ .

Hat eine Funktion einen Namen, der nicht gerade *functionlike* ist, etwa ‘ $p$ ’, so können wir mit der Schreibweise  $p(\cdot)$  anstelle von  $p$  deutlich machen, daß hier von einer Funktion die Rede ist. In ähnlicher Weise schreiben wir  $x(\cdot)$ , wenn die vorher freie Variable  $x$  in neuem Zusammenhang als Funktion einer anderen Variablen, etwa der “Zeit”  $t$  aufgefaßt werden soll. — Die Schreibweise

$$f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$$

drückt aus, daß  $f$  auf einer nicht näher spezifizierten, aber “vernünftigen” Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , etwa auf einem Intervall, definiert ist. In diesem Sinne lebt eine Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$  typischerweise auf einer offenen (s.u.) Teilmenge des dreidimensionalen Raums.

Zu jeder Funktion  $f: A \rightarrow B$  gehört ihr **Graph**  $\mathcal{G}(f)$ , eine wohlbestimmte Teilmenge von  $A \times B$ . Im Fall einer Funktion  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  ist das die vertraute “Kurve  $y = f(x)$ ”; allgemein ist  $\mathcal{G}(f)$  definiert durch

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A, y = f(x)\}.$$

Die Figur 2.1.1 zeigt den Graphen einer Funktion  $\text{ums}: [1..12] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

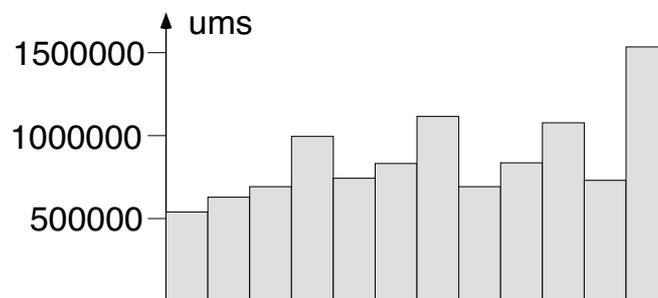


Fig. 2.1.1

## Erscheinungsformen

Die Festlegung oder die Präsentation einer Funktion kann in ganz verschiedener Weise erfolgen. Wir weisen hier auf die folgenden Möglichkeiten hin:

### ► Wertetabelle

Ist  $\text{dom}(f)$  eine beliebige endliche Menge, so läßt sich die gesamte in  $f$  enthaltene Information in einer zwispaltigen oder zweizeiligen Matrix, eben der **Wertetabelle** von  $f$ , abspeichern.

Bsp:

$x$	$f(x)$
Aadorf	8355
Aarau	5000
Aarberg	3270
⋮	
Lustmühle	9062
⋮	
Zwischenbergen	3901
Zwischenföh	3756

Ist  $\text{dom}(f)$  eine unendliche Menge, zum Beispiel das Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , so ist  $f$  durch eine Wertetabelle der Form

$x$	$a = x_0$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_{N-1}$	$x_N = b$
$f(x)$	$y_0$	$y_1$	$y_2$		$y_{N-1}$	$y_N$

natürlich überhaupt noch nicht bestimmt.

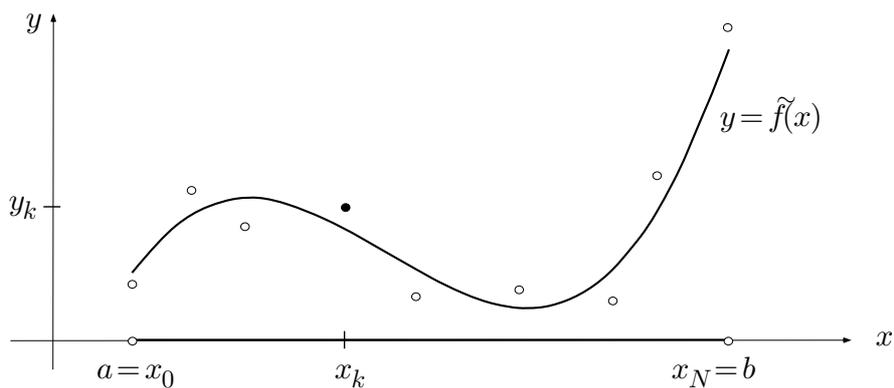


Fig. 2.1.2

Die numerische Mathematik stellt Methoden zur Verfügung, die

- ein “einfaches”  $\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  finden, das ungefähr die gegebenen Werte realisiert (Fig. 2.1.2). Das ist dann sinnvoll, wenn die gegebenen Daten  $(x_k, y_k)$  ohnehin mit Meßfehlern behaftet sind.
- oder aber die gegebenen Werte als genau ansehen und in die Teilintervalle einfache Verbindungskurven (zum Beispiel Geradenstücke oder Parabelbögen) einpassen.

*Bsp:* Lineare Interpolation in der Logarithmentafel (Fig. 2.1.3): Aus den Tabellenwerten

$x$	$\log x$	
⋮		
276	5.62040	
277	5.62402	}
278	5.62762	
⋮		

$$\Delta = 360 \cdot 10^{-5}$$

ergibt sich für  $\log 277.4$  ( $= 5.625460508 \dots$ ) der Näherungswert

$$\log 277.4 \doteq 5.62402 + 0.4 \Delta = 5.62546 .$$

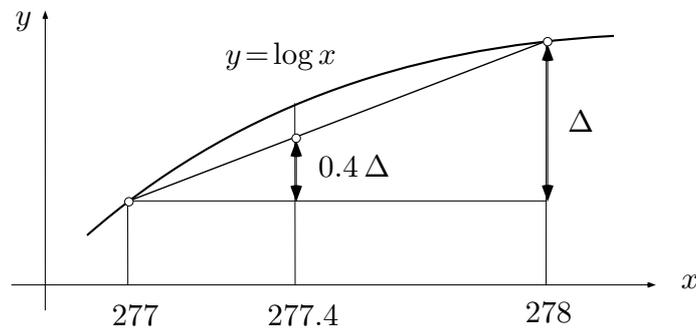


Fig. 2.1.3

► **Kurve  $y = f(x)$**

Meßwertschreiber geben eine bestimmte Funktion der Zeit, zum Beispiel die Temperatur auf dem Jungfraujoch, in der Form einer Kurve aus. Einen zugehörigen Funktionsterm gibt es nicht. Wie läßt sich aus einem derartigen Meßstreifen die mittlere Temperatur in einem bestimmten Zeitintervall ermitteln? Das arithmetische Mittel der Temperaturen zu den Zeiten 06.00, 12.00, 18.00 und 24.00 ist offenbar nicht das Richtige. Der Integralbegriff wird uns bei dieser Frage weiterhelfen.

In der Analysis benutzen wir derartige Kurvenbilder einerseits, um *bestimmte* interessante Funktionen, etwa  $\exp$  oder  $\sin$ , zu visualisieren und andererseits, um charakteristische Eigenschaften von *beliebigen* Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , etwa Konvexität oder asymptotisches Verhalten (Fig. 2.1.4), einprägsam darzustellen.

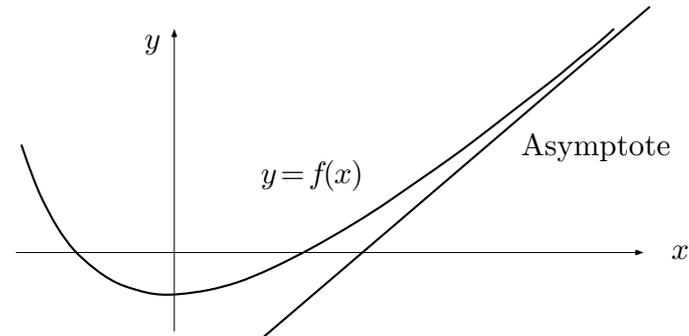


Fig. 2.1.4

### ► Funktionsterm, explizite Darstellung

Ein Funktionsausdruck,

$$\text{Bsp:} \quad \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 - 16}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},$$

ist letzten Endes eine Rechenanweisung, mit deren Hilfe der Funktionswert  $f(x)$  nach Vorgabe eines  $x$  in endlich vielen Schritten exakt oder mit jeder wünschbaren Genauigkeit ausgerechnet werden kann. Als Definitionsbereich gilt, wenn nichts anderes gesagt ist, die Menge aller Punkte  $x$  einer vereinbarten Grundmenge (zum Beispiel aller  $x \in \mathbb{R}$ ), für die sich der Ausdruck ohne Rückfragen auswerten läßt. So ist etwa

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

a priori für alle  $x \neq 0$  definiert. Im nachhinein erweist es sich als sinnvoll, zusätzlich  $f(0) := 1$  zu setzen.

Wie oben schon gesagt, sprechen wir gelegentlich von der "Funktion  $e^t$ " oder der "Funktion  $t^n$ " u.ä., wenn wir im Grunde genommen die Funktionen  $t \mapsto e^t$  bzw.  $t \mapsto t^n$  meinen. So gerade im folgenden Absatz.

Funktionen, die sich mit Hilfe der vier Grundrechenarten und Zusammensetzen aus Konstanten,  $t^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $\log t$ ,  $e^t$ ,  $\cos t$ ,  $\sin t$  sowie den Arcusfunktionen erhalten lassen, heißen **elementare Funktionen**.

$$\text{Bsp:} \quad f(t) := \frac{e^{\sqrt{1-\log^2 t}} \cos(\sin t)}{\pi + t^{1/5}}$$

Die Ableitung einer elementaren Funktion ist wieder eine elementare Funktion (dies folgt mit vollständiger Induktion aus den Ableitungsregeln); es gibt aber elementare Funktionen, deren Stammfunktionen nicht elementar sind, zum Beispiel die Funktion  $e^{-t^2/2}$ , die in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine große Rolle spielt. Der Umfang einer Ellipse ist keine elementare Funktion der Halbachsen (sonst hätten Sie die Formel schon gesehen ...).

Als explizite (“ausdrückliche”) Darstellungen von Funktionen sind auch die folgenden Beispiele anzusehen:

$$\text{abs } x := |x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases} ;$$

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad (= \text{größte ganze Zahl } \leq x) ,$$

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \quad (= \text{kleinste ganze Zahl } \geq x) .$$

Ist eine Funktion in expliziter Darstellung gegeben, so entsteht das Problem, ihre qualitativen Eigenschaften (Monotoniecharakter, Extrema, Singularitäten, asymptotisches Verhalten usw.) herauszulesen und in einer geeigneten Figur prägnant darzustellen. Die Behandlung dieses Problems ist im Fall einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die beliebte “Graphendiskussion”.

### ► Implizite Funktionen

Gelegentlich sind zwei (an sich “gleichberechtigte”) reelle Größen  $x, y$  verknüpft durch eine Gleichung

$$F(x, y) = 0 . \tag{1}$$

Bsp: 
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 , \\ x^3 + y^3 &= 3axy , \quad a > 0 \text{ fest.} \end{aligned}$$

In diesem Fall sind  $x$  und  $y$  nicht mehr unabhängig voneinander beliebig wählbar. Die “zulässigen” Paare  $(x, y)$  bilden vielmehr eine Teilmenge  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ , in aller Regel eine Kurve.

Die zwischen  $x$  und  $y$  bestehende Abhängigkeit läßt sich aber nur selten als globale Funktion

$$x \mapsto y := f(x)$$

auffassen, da zu einem gegebenen  $x$ -Wert ohne weiteres mehrere verschiedene  $y$ -Werte gehören können (siehe z.B. die Stelle  $x_1$  in Fig. 2.1.5). Trotzdem sagt man, eine Gleichung der Form (1) definiere  $y$  **implizit** als Funktion von  $x$  (oder  $x$  als Funktion von  $y$ ), und zwar auch dann, wenn es nicht gelingt, die Variable  $y$  formelmäßig durch  $x$  (oder  $x$  durch  $y$ ) auszudrücken.

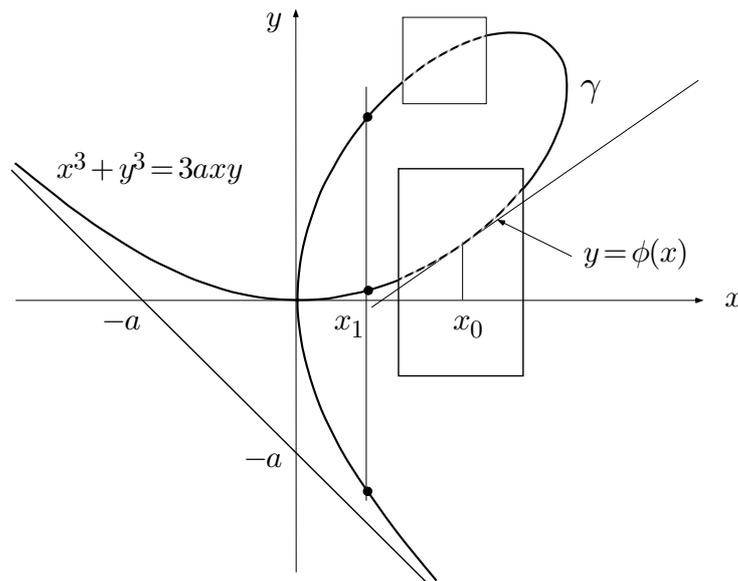


Fig. 2.1.5

Durch die Gleichung (1) werden nämlich immerhin *lokal* richtiggehende Funktionen

$$\phi: x \mapsto y := \phi(x)$$

festgelegt. Diese lokalen Funktionen sind nur innerhalb eines “Fensters” erklärt (Fig. 2.1.5). Man kann sie diskutieren und zum Beispiel die Ableitung  $\phi'(x_0)$  oder Extremalwerte ausrechnen, ohne die definierende Gleichung (1) tatsächlich für variables  $x$  nach  $y$  aufzulösen.

### ► Differentialgleichung

Bei den vorangehenden Paradigmen waren die betrachteten Funktionen immer schon mehr oder weniger vorhanden. Es kann aber durchaus sein, daß das Hauptproblem darin besteht, die interessierende(n) Funktion(en) überhaupt erst zu bestimmen. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die betreffenden Funktionen nur durch “innere Eigenschaften” charakterisiert sind.

Eine “innere Eigenschaft” einer Funktion ist insbesondere das Bestehen einer **Funktionalgleichung**, das heißt: einer Identität, die die Funktionswerte an verschiedenen, aber durch Grundoperationen miteinander verbundenen Stellen  $x, x', \dots$  miteinander verknüpft.

Bsp:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &\equiv 2 \cos^2 x - 1, \\ e^{x+y} &\equiv e^x \cdot e^y, \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &\equiv \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

Nur “spezielle” Funktionen erfüllen derartige Identitäten; gerade darum sind sie so interessant.

① Gesucht sind die (stetigen) Funktionen, die der folgenden Funktionalgleichung genügen:

$$\forall x, x' > 0 : f(x \cdot x') = f(x) \cdot f(x') .$$

Lösung: Außer  $f(x) \equiv 0$  sind dies genau die Funktionen  $f(x) := x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  fest. (Wie man darauf kommt und warum es keine andern gibt, können wir hier nicht erörtern.)  $\circ$

Am allerhäufigsten ist die “innere Eigenschaft” der gesuchten Funktionen  $t \mapsto y(t)$  in der Form eines Wachstumsgesetzes gegeben: Die momentane zeitliche Änderungsrate  $\dot{y}(t)$  (oder die Momentanbeschleunigung  $\ddot{y}(t)$ ) ist eine gegebene Funktion der Zeit  $t$  und vor allem des Istwertes  $y(t)$  (eventuell auch von  $\dot{y}(t)$ ):

$$\dot{y} = F(t, y) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} = F(t, y, \dot{y}) .$$

Eine derartige Gleichung heißt eine **Differentialgleichung**. Gesucht sind Funktionen  $y(\cdot)$ , für die gilt:

$$\forall t : \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y}(t) = F(t, y(t), \dot{y}(t)) .$$

② Ein frei fallender Körper (Fig. 2.1.6) sei der als konstant angenommenen Erdbeschleunigung  $g := 9.81 \text{ m/sec}^2$  unterworfen. Wir fragen nach seinem “Fahrplan”  $t \mapsto y(t)$ . Nach Annahme gilt  $\ddot{y}(t) = -g$  für alle  $t$ , in anderen Worten: Die gesuchte Funktion  $y(\cdot)$  genügt der Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$\ddot{y} = -g .$$

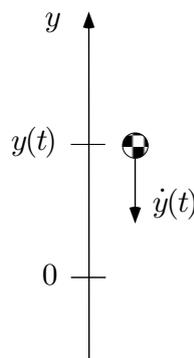


Fig. 2.1.6

Diese Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen, nämlich genau die Funktionen

$$y(t) := -\frac{g}{2}t^2 + At + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Zur Festlegung der sogenannten Integrationskonstanten  $A, B$  sind weitere Angaben, zum Beispiel über Ort und Geschwindigkeit zur Zeit  $t := 0$ , notwendig.  $\circ$

Bei gewissen geometrischen Problemen wird nach Kurven  $\sigma: y = f(x)$  gefragt, deren Tangenten bestimmte Bedingungen erfüllen. Zum Beispiel sollen die gesuchten Kurven sämtliche Kurven einer gegebenen Kurvenschar  $\Gamma$  senkrecht schneiden (Fig. 2.1.7). Ein derartiges Problem führt auf eine Differentialgleichung der Form

$$y' = F(x, y)$$

mit einer bekannten Funktion  $F(\cdot, \cdot)$ , denn für jeden von der Schar  $\Gamma$  bedeckten Punkt  $(x, y)$  läßt sich leicht ausrechnen, welche Steigung die durch diesen Punkt gehende "Orthogonaltrajektorie" dort haben muß. — Von Kurvenscharen handelt der Abschnitt 5.6.

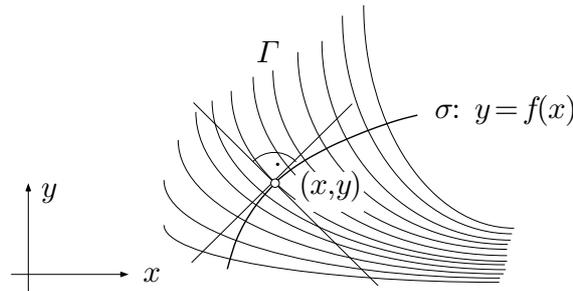


Fig. 2.1.7

## Typologie der Funktionen in diesem Buch

Als Definitions- und Zielbereiche der in der Analysis betrachteten Funktionen  $f: A \rightarrow B$  kommen in erster Linie die in Kapitel 1 behandelten Grundstrukturen  $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  oder vernünftige Teilmengen davon (zum Beispiel Intervalle, Kreisscheiben, Sphären) in Frage. Ein wesentliches Anliegen von späteren Kapiteln wird sein, die von den Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  her vertrauten Begriffe (Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral usw.) auf mehrdimensionale Situationen zu übertragen. Wir wollen aber schon jetzt auf die sich darbietenden Typen, Figuren und Interpretationen aufmerksam machen.

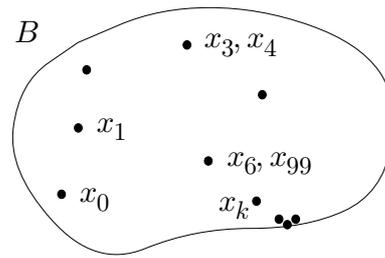


Fig. 2.1.8

$$\boxed{\mathbb{N} \rightarrow B}$$

Es sei  $B$  eine beliebige Menge (Fig. 2.1.8) und  $x$  Variable für Elemente von  $B$ . Eine Funktion

$$x: \mathbb{N} \rightarrow B, \quad k \mapsto x_k$$

von  $\mathbb{N}$  in den Zielbereich  $B$  heißt eine **Folge**. Ist  $B = \mathbb{R}$  oder  $B = \mathbb{C}$ , so spricht man von einer **Zahlfolge**. Die einzelnen Funktionswerte  $x_k$  sind die **Glieder** der Folge. Anstelle von  $x$ , schreibt man auch  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , wenn man die ganze Folge meint. — Von Folgen handelt der Abschnitt 2.4.

$$\boxed{\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}}$$

Der Funktionstyp  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  stellt das “Grundmodell” der Funktionenlehre dar. Wir wollen die betreffenden Funktionen **reelle Funktionen** nennen; von ihnen handelt ein Großteil der folgenden Abschnitte und Kapitel.

Der Definitionsbereich einer reellen Funktion ist in aller Regel ein Intervall,

Bsp:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\sin) &= \mathbb{R}, \\ f(x) &:= \sqrt{1-x^2} \implies \text{dom}(f) = [-1, 1], \\ g(x) &:= 1/\sqrt{1-x^2} \implies \text{dom}(g) = ]-1, 1[ , \end{aligned}$$

oder eine Vereinigung von Intervallen,

$$\text{Bsp:} \quad \text{dom}(\tan) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[ .$$

Die meisten der in der Praxis vorkommenden Funktionen  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  besitzen eine natürliche **Fortsetzung**  $\tilde{f}: \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$ , und oft ist erst von da her eine befriedigende Theorie der betreffenden Funktionen möglich. Wir haben das bei den Polynomen gesehen (Fundamentalsatz der Algebra); dasselbe trifft zu für die Exponentialfunktion (s.u.). — Von den Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  im

allgemeinen handelt die sogenannte **komplexe Analysis**, auch einfach **Funktionentheorie** genannt.

③ Die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert und so “schön”, wie man nur will. Für  $|x| < 1$  gilt

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

(geometrische Reihe); für  $|x| \geq 1$  ist aber die Reihe rechter Hand divergent und stellt die Funktion nicht mehr dar. Die Ursache dieses beim Betrag 1 eintretenden “Konvergenzzusammenbruchs” wird erst erkennbar, wenn wir die Fortsetzung

$$\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

betrachten (Fig. 2.1.9): Potenzreihen wie die obige konvergieren im Komplexen grundsätzlich auf Kreisscheiben, siehe Satz (2.9). Da die Funktion  $\tilde{f}$  in den Punkten  $\pm i$  eine Singularität (einen sogenannten **Pol**) besitzt, kann der Konvergenzradius der zugehörigen Reihe nicht größer als 1 sein.  $\circ$

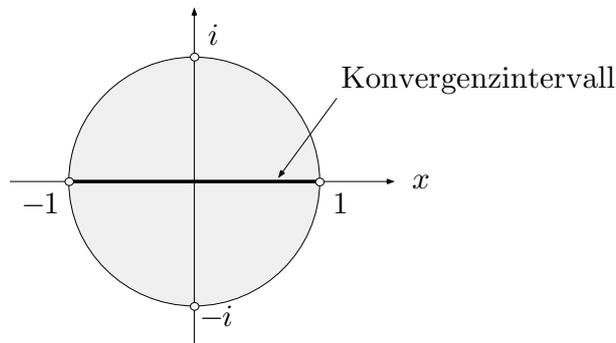


Fig. 2.1.9

$$\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

Ist der Zielbereich einer Funktion  $f$  mehrdimensional, so sprechen wir von einer **vektorwertigen Funktion**. Für vektorwertige Funktionen verwenden wir

im allgemeinen halbfette Buchstaben:  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{x}(\cdot)$ ,  $\mathbf{r}(\cdot)$ . Eine vektorwertige Funktion läßt sich festlegen durch Angabe der zugehörigen **Koordinatenfunktionen**  $f_i$ :

$$t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)), \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t));$$

es geht aber auch ohne Koordinaten:

$$\text{Bsp:} \quad \mathbf{f}: \quad t \mapsto \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(dieses  $\mathbf{f}$  produziert eine Ellipse mit konjugierten Halbmessern  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ ).

Allgemein: Ist  $I$  ein Intervall der als Zeitachse interpretierten  $t$ -Achse, so produziert eine Funktion

$$\mathbf{f}: \quad I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine Kurve  $\gamma$  in der Ebene und

$$\mathbf{f}: \quad I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

eine Kurve im dreidimensionalen Raum: Durchläuft die Variable  $t$  das Intervall  $I$ , so durchläuft der Bildpunkt  $\mathbf{f}(t)$  gerade die Kurve  $\gamma$  (Fig. 2.1.10). Die Funktion  $\mathbf{f}$  heißt eine **Parameterdarstellung** von  $\gamma$ . (Diese Namengebung ist etwas unglücklich, denn die Variable  $t$  ist gerade *kein* Parameter, sondern eine ‐laufende‐ Variable. Unter einem **Parameter** versteht man üblicherweise eine einstellbare, im weiteren aber *festgehaltene* Größe.) Wenn es darum geht, etwa die Länge, die Krümmung oder den von  $\gamma$  eingeschlossenen Flächeninhalt zu berechnen, so ist man auf eine Parameterdarstellung angewiesen; die Gleichungsform

$$\gamma := \{ (x, y) \mid F(x, y) = 0 \}$$

hilft einem da gar nichts.

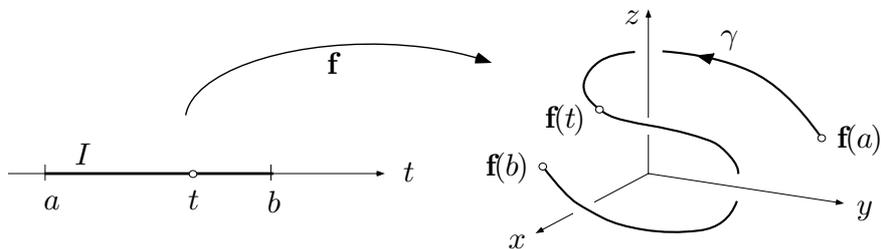


Fig. 2.1.10

Jede Parameterdarstellung beinhaltet einen ganz bestimmten “Fahrplan”, nach dem die Kurve  $\gamma$  durchlaufen werden soll. Eine und dieselbe Kurve besitzt viele verschiedene Parameterdarstellungen, entsprechend den verschiedenen denkbaren “Fahrplänen”. Wenn es sich nicht um einen bestimmten zeitlichen Bewegungsablauf handelt, sondern nur um den geometrischen Gehalt der betreffenden Kurve, so wird man wenn möglich eine längs der Kurve veränderliche geometrische Größe als “Parameter” (unabhängige Variable) wählen, zum Beispiel die  $x$ -Koordinate oder das Argument des laufenden Punktes oder dessen längs der Kurve gemessenen Abstand vom Anfangspunkt, die sogenannte **Bogenlänge**. — Wir geben einige Beispiele.

④ Eine als Graph

$$\gamma: y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

gegebene ebene Kurve läßt sich ohne weiteres auch parametrisch darstellen: Man schreibt

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

oder einfach

$$\gamma: x \mapsto (x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b),$$

denn auf den Namen der unabhängigen Variablen kommt es nicht an, und da kann man schon gleich den Namen der als Parameter gewählten geometrischen Größe, hier:  $x$ , verwenden.  $\bigcirc$

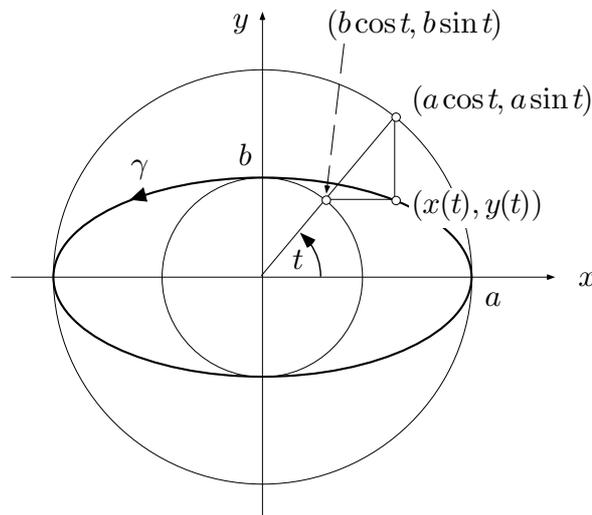


Fig. 2.1.11

⑤ Sind  $a$  und  $b$  gegebene positive Zahlen, so stellt

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

eine Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  dar (Fig. 2.1.11), denn  $\gamma$  entsteht aus dem Einheitskreis  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  durch Streckung um den Faktor  $a$  in  $x$ -Richtung und um den Faktor  $b$  in  $y$ -Richtung. Die Variable  $t$  bezeichnet nicht etwa das Argument des laufenden Ellipsenpunktes  $P := (x, y)$ , sondern das Argument eines mit  $P$  verknüpften Kreispunktes (siehe die Figur).

Man kann es auch so sehen: Es ist

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} \equiv 1;$$

folglich genügen sämtliche Punkte von  $\gamma$  der Ellipsengleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

○

⑥ Für eine Parameterdarstellung der **Schraubenlinie** (Fig. 2.1.12) mit Radius  $R$  und Ganghöhe  $h$  liegt es nahe, die geometrische Größe  $\arg(x, y)$  als Parameter zu wählen. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x(\phi) &= R \cos \phi \\ y(\phi) &= R \sin \phi \\ z(\phi) &= h \frac{\phi}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (-\infty < \phi < \infty).$$

○

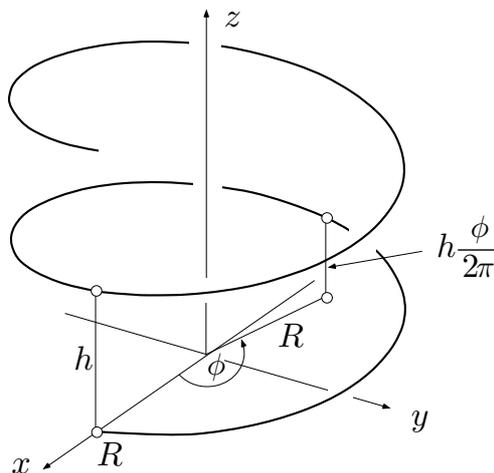


Fig. 2.1.12

$$\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$$

Funktionen  $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$  lassen sich erstens als Parameterdarstellungen  $t \mapsto z(t)$  von Kurven in der komplexen Ebene auffassen. So ist zum Beispiel

$$\partial D: \quad t \mapsto z(t) := e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

eine Parameterdarstellung des Einheitskreises (= Rand der Einheitskreisscheibe  $D$ , Fig. 2.1.13). Diese Vorstellung spielt eine entscheidende Rolle in der komplexen Analysis, wo komplexe Funktionen in bestimmter Weise längs derartigen Kurven integriert werden.

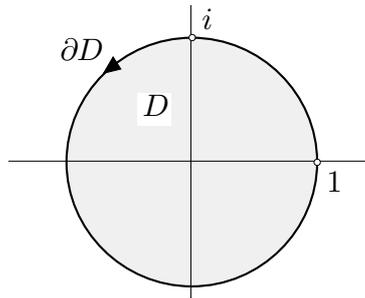


Fig. 2.1.13

Zweitens kann man eine Funktion

$$f: \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t)$$

als zahlenwertige Funktion auffassen, wobei diese Werte nicht reelle, sondern eben komplexe Zahlen sind. Wie ein derartiger komplexer Wert physikalisch interpretiert werden soll, ist im Einzelfall auszumachen. — Wir behandeln als Beispiel die komplexe Schreibweise der harmonischen Schwingungen.

## Exkurs über harmonische Schwingungen

Die reellwertige Funktion

$$x(t) := A \cos(\omega t + \alpha) \tag{2}$$

beschreibt eine **harmonische Schwingung** (Fig. 2.1.14): Man stelle sich einen Massenpunkt vor, der längs der  $x$ -Achse hin und her schwingt.  $A > 0$  ist die **Amplitude**,  $\omega > 0$  die **Kreisfrequenz** und  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  die **Phase** dieser Schwingung. Die Kreisfrequenz  $\omega$  (= pro Zeiteinheit durchlaufener “Winkel”) ist mit der **Frequenz**  $\nu$  (= Anzahl Vollschrwingungen pro Zeiteinheit) verknüpft durch

$$\nu = \omega / 2\pi$$

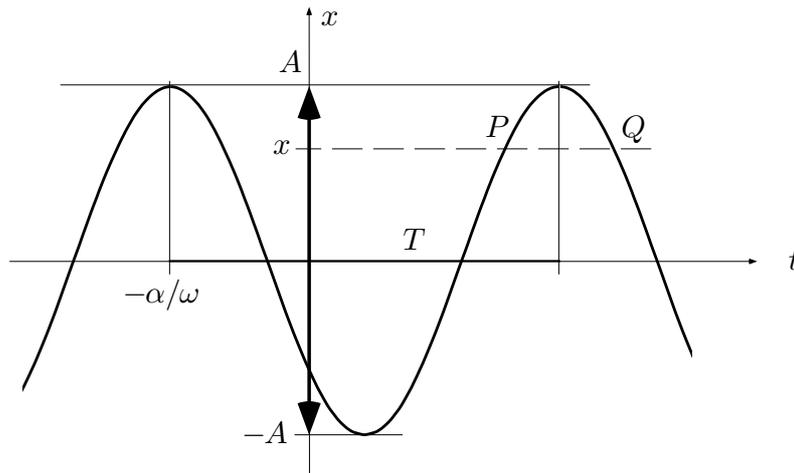


Fig. 2.1.14

und mit der **Schwingungsdauer**  $T$  (= Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima) durch

$$T = 2\pi / \omega .$$

Die Phase  $\alpha$  gibt den “Zustand” des schwingenden Systems zur Zeit  $t := 0$  an. Allgemein ist der “Zustand” zur Zeit  $t$  durch den “Winkel”  $\omega t + \alpha$  bestimmt und nicht etwa durch die Lagekoordinate  $x(t)$ . Zu einem gegebenen  $x$ -Wert gehören nämlich im allgemeinen zwei verschiedene “Zustände” (Punkte  $P$  und  $Q$  in der Figur).

Die Funktion (2) läßt sich übrigens auch in der zweiteiligen Form

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (3)$$

schreiben: Aus (2) folgt nach dem Additionstheorem für den Cosinus:

$$x(t) = A(\cos(\omega t) \cos \alpha - \sin(\omega t) \sin \alpha) ;$$

es gilt also (3) mit

$$a = A \cos \alpha , \quad b = -A \sin \alpha . \quad (4)$$

Umgekehrt läßt sich (3) in die einteilige Form (2) überführen, indem man die Gleichungen (4) nach  $A$  und  $\alpha$  auflöst. Man findet ohne weiteres

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Folglich ist dann

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} , \quad \sin \alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} ,$$

und diese Angaben bestimmen  $\alpha$  modulo  $2\pi$ . Alles in allem haben wir

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arg(a, -b) \quad (= \arctan \frac{-b}{a}, \text{ falls } a > 0).$$

Wir haben wiederholt angedeutet, daß der Momentanzustand des schwingenden Systems durch einen “Winkel” charakterisiert ist. Wir bringen diesen Winkel explizit ins Spiel, indem wir die hin- und hergehende Bewegung auf der  $x$ -Achse als “Schatten” (genau: als Realteil) einer gedachten Kreisbewegung in der komplexen Ebene auffassen (Fig. 2.1.15):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re} (Ae^{i(\omega t + \alpha)}) .$$

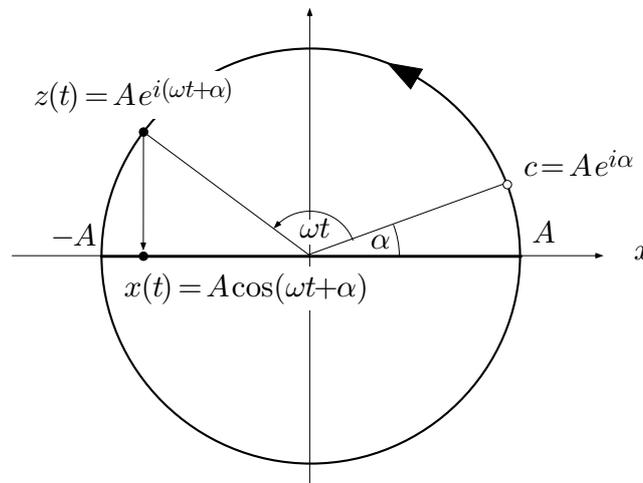


Fig. 2.1.15

Die genannte Kreisbewegung ist also gegeben durch

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \alpha)},$$

und das Argument des kreisenden Punktes ist der “Winkel”, von dem wir dauernd sprechen. Setzen wir zur Abkürzung

$$Ae^{i\alpha} =: c,$$

so erhält diese Kreisbewegung die Form

$$z(t) = ce^{i\omega t} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Die komplexe Zahl  $c$  heißt die **komplexe Amplitude** oder auch der **Zeiger** der betrachteten Schwingung. In dieser Zahl sind Amplitude und Phase gleichzeitig gespeichert, und zwar stellt  $c$  die Lage des kreisenden Punktes zur Zeit  $t := 0$  dar.

Der Erfolg dieses Ansatzes (vor allem in der Elektrotechnik) beruht letzten Endes darauf, daß für die Funktion  $\phi \mapsto e^{i\phi}$  ein besonders einfaches “Additionstheorem”, eben  $e^{i(\phi + \phi')} = e^{i\phi} \cdot e^{i\phi'}$ , gilt. Wir beweisen darüber:

**(2.1)** Sind  $x_1(\cdot)$ ,  $x_2(\cdot)$  zwei harmonische Schwingungen der gleichen Kreisfrequenz  $\omega$  mit komplexen Amplituden  $c_1$ ,  $c_2$ , so ist ihre **Superposition**

$$x(\cdot) := x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$$

die harmonische Schwingung der Kreisfrequenz  $\omega$  mit komplexer Amplitude  $c_1 + c_2$ .

┌

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \operatorname{Re}(c_1 e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(c_2 e^{i\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}((c_1 + c_2) e^{i\omega t}). \end{aligned}$$

└

⑦ Die Phasen dreier Schwingungen gleicher Kreisfrequenz und gleicher Amplitude sollen so festgelegt werden, daß die Superposition der drei Schwingungen identisch verschwindet.

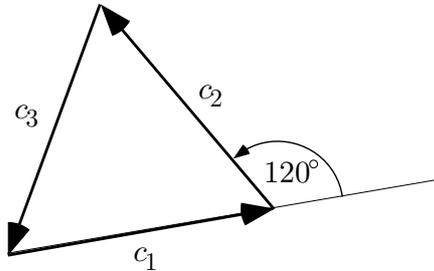


Fig. 2.1.16

Die komplexen Amplituden  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  der drei Schwingungen sind drei gleich lange Vektoren der Summe 0. Die Additionsfigur ist somit ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 2.1.16), und die gesuchten Phasendifferenzen betragen  $120^\circ$ .

○

## Funktionen von mehreren Variablen

$$\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$$

Besitzt eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

einen “echt  $n$ -dimensionalen” Definitionsbereich, so spricht man von einer **Funktion von  $n$  Variablen**. Im Fall  $n = 2$  läßt sich eine derartige Funktion

auffassen als ‐Temperaturverteilung‐ in der Ebene: F‐ur jeden Punkt  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  ist eine ‐Temperatur‐  $f(x, y)$  festgelegt. Zur Visualisierung von Temperaturverteilungen verwendet man zum Beispiel in Wetterkarten die sogenannten **Isothermen**; das sind die ‐Kurven gleicher Temperatur‐.

Allgemein: Ist  $f: A \rightarrow B$  eine beliebige Funktion, so kann man f‐ur jedes gegebene  $c \in B$  die Menge derjenigen  $x \in A$  bilden, f‐ur die  $f(x) = c$  ist. Diese Menge hei‐t das **Urbild** des Punktes  $c$  und wird mit  $f^{-1}(c)$  bezeichnet:

$$f^{-1}(c) := \{x \in A \mid f(x) = c\} .$$

Geht es um eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und ein gegebenes  $C \in \mathbb{R}$ , so hei‐t  $f^{-1}(C)$  die **Niveaulinie** von  $f$  zum Niveau  $C$  (Fig. 2.1.17) — wir schreiben daf‐ur auch  $N_C$ :

$$N_C := \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid f(x, y) = C\} .$$

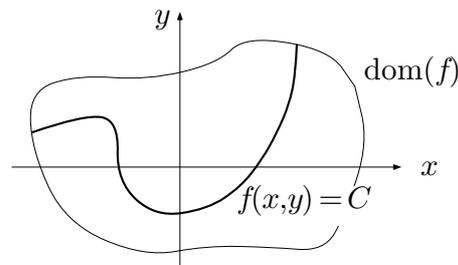


Fig. 2.1.17

$N_C$  ist in aller Regel eine Kurve oder eine Vereinigung von Kurven, eventuell mit Singularit‐ten. (Dieser Sachverhalt wird in Kapitel 5 genauer untersucht.) Zeichnet man die Niveaulinien f‐ur hinreichend viele verschiedene Werte  $C$ , so erh‐lt man ein anschauliches Bild des globalen Funktionsverlaufs.

⑧ Wir zeichnen einige Niveaulinien der Funktion

$$f(x, y) := \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

(Fig. 2.1.18). Der Funktionswert an der Stelle  $(x, y)$  ist das Produkt der Abst‐nde von  $(x, y)$  zu den beiden Punkten  $(\pm 1, 0)$ .  $N_1$  ist die sogenannte **Lemniskate**; allgemein hei‐en die hier betrachteten Niveaulinien  $N_C$  ( $C > 0$ ) **Cassinische Kurven**. ○

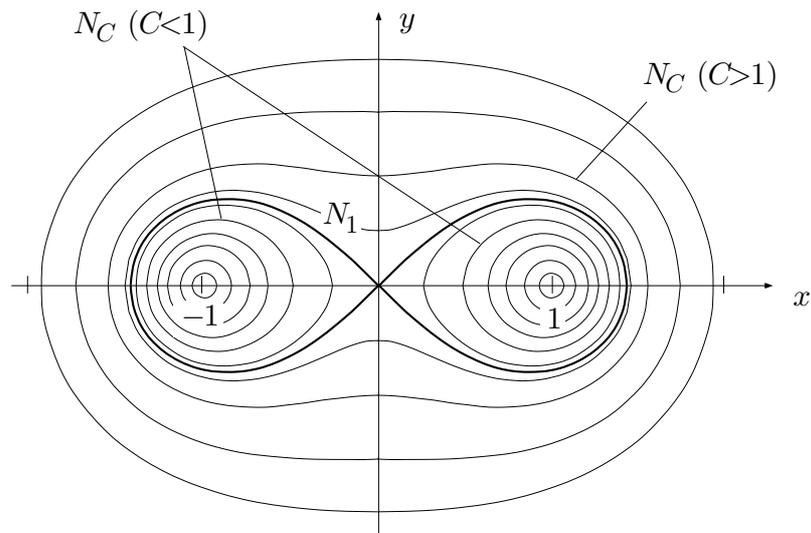


Fig. 2.1.18

Oft interessiert übrigens nicht die Funktion  $f$  als Ganzes, sondern in erster Linie eine bestimmte Kurve  $\gamma$ , die als Niveaulinie von  $f$  dargestellt werden kann:

$$\gamma: \quad f(x, y) = C .$$

Bsp: Die Ellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  läßt sich als  $N_1$  der quadratischen Funktion

$$q(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

auffassen.

Sinngemäß dasselbe ist zu sagen über Funktionen  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (“Temperaturverteilungen” im Raum). Anstelle von Niveaulinien gibt es hier **Niveauflächen**. Umgekehrt lassen sich viele interessante Flächen in der Form

$$f(x, y, z) = C$$

darstellen, das heißt: als Niveaufläche  $N_C$  einer gewissen Funktion von drei Variablen auffassen.

Bsp: Das **einschalige (Rotations-)Hyperboloid** besitzt in kartesischen Koordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

(und folglich in Zylinderkoordinaten die Gleichung  $\rho^2 - z^2 = 1$ , Fig. 2.1.19) und ist damit Niveaufläche der quadratischen Funktion

$$q(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 .$$

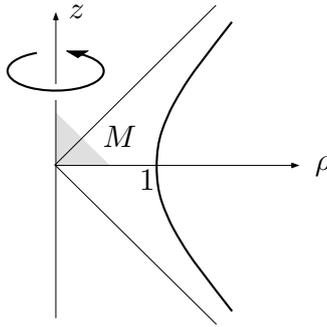


Fig. 2.1.19

Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$  lässt sich zweitens mit Hilfe ihres Graphen

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \text{dom}(f), z = f(x, y) \}$$

in einer dreidimensionalen Figur repräsentieren (Fig. 2.1.20). Der Graph ist eine Fläche, die **schlicht** über der  $(x, y)$ -Ebene liegt; das heißt: Senkrecht über (oder eventuell unter) jedem Punkt  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  liegt genau ein Punkt des Graphen. Die Niveaulinien von  $f$  sind die Höhenkurven der Graphenfläche, wenn  $\text{dom}(f)$  als topographische Karte dieser Fläche benutzt wird.

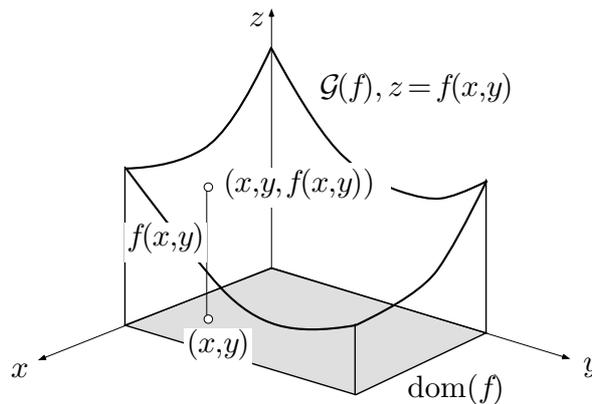


Fig. 2.1.20

⑨ Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := xy, \quad \text{dom}(f) := [-1, 1]^2.$$

Der zugehörige Graph (Fig. 2.1.21) ist von der Gestalt her eine sogenannte **Sattelfläche**. Die hier vorliegende spezielle Fläche zweiten Grades heißt **hyperbolisches Paraboloid**. ○

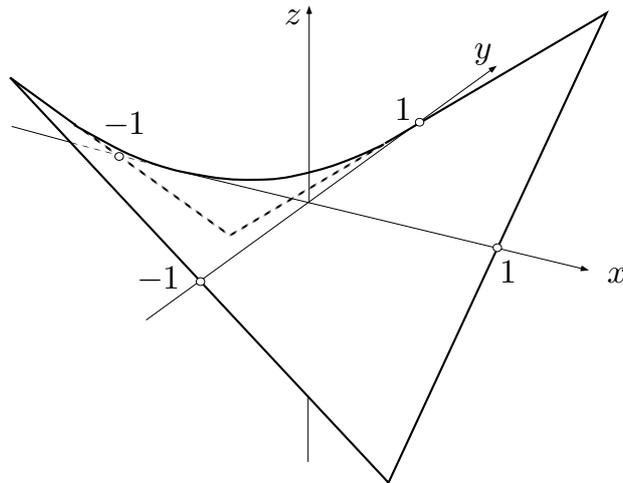


Fig. 2.1.21

$$\mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

Abbildungen  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3$  sind typischer Weise Parameterdarstellungen von krummen Flächen.

Eine Kurve  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  ist eine ‐eindimensionale Mannigfaltigkeit‐. Zu einer Parameterdarstellung von  $\gamma$  gehören als Standardmodell einer derartigen Mannigfaltigkeit ein Intervall  $I$  der  $t$ -Achse und eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t),$$

die die einzelnen Kurvenpunkte produziert.

Eine Fläche  $S \subset \mathbb{R}^3$  ist eine ‐zweidimensionale Mannigfaltigkeit‐. Zu einer Parameterdarstellung von  $S$  gehören als Standardmodell einer derartigen Mannigfaltigkeit ein Bereich  $A$  in der  $(u, v)$ -Ebene und eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

die für jeden ‐Parameterpunkt‐  $(u, v) \in A$  einen Raumpunkt  $\mathbf{f}(u, v)$  liefert, siehe die Fig. 2.1.22. Durchläuft  $(u, v)$  den **Parameterbereich**  $A$ , so durchläuft  $\mathbf{f}(u, v)$  die Fläche  $S$ .

Bei allgemeinen Betrachtungen über Flächen verwenden wir  $u, v$  als Parameter. Sobald man aber eine konkrete, geometrisch beschriebene Fläche vor sich hat, wählt man (wie bei Kurven) auf der Fläche variable geometrische Größen als Parameter und behält deren Namen bei. Die folgenden Beispiele sollen das erläutern; siehe auch die Beispiele 1.5.② (Torus) und 1.6.③ (Ebene).

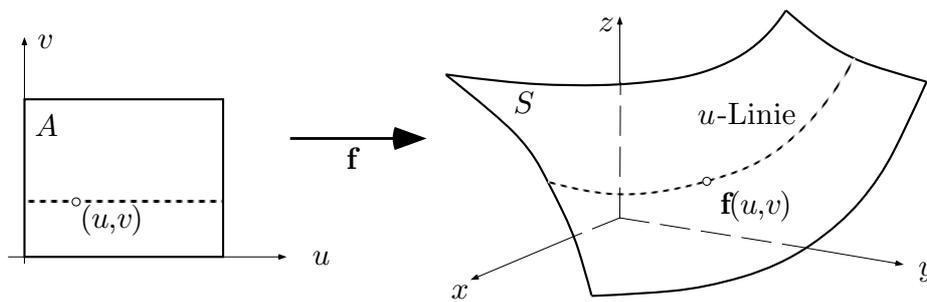


Fig. 2.1.22

⑩ Ist  $S$  zunächst als Graph einer Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben (siehe die Fig. 2.1.23):

$$S: \quad z = f(x, y) \quad ((x, y) \in A),$$

so erhält man sofort eine Parameterdarstellung von  $S$  mit dem Parameterbereich  $A$ , indem man ansetzt:

$$\mathbf{f}: \quad A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

○

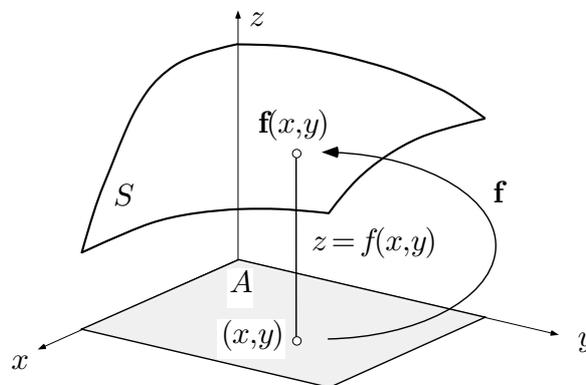


Fig. 2.1.23

⑪  $S_R^2$ , die zweidimensionale Sphäre vom Radius  $R$ , besitzt die Parameterdarstellung

$$\mathbf{f}: \quad (\phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x(\phi, \theta) = R \cos \theta \cos \phi \\ y(\phi, \theta) = R \cos \theta \sin \phi \\ z(\phi, \theta) = R \sin \theta \end{cases}$$

(Fig. 2.1.24). Parameterbereich ist das Rechteck  $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  in der  $(\phi, \vartheta)$ -Ebene. Längs den Kanten  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  ist diese Darstellung nicht "regulär", da diese Kanten auf je einen Punkt ( $N$  und  $S$ ) abgebildet werden. ○

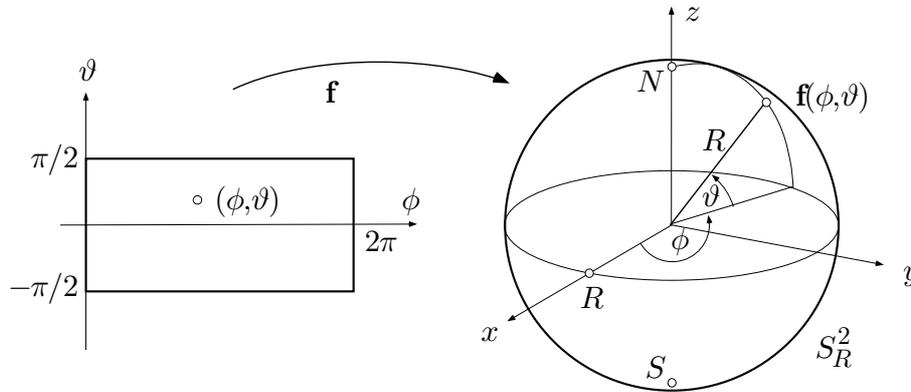


Fig. 2.1.24

$$\mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

Eine Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$$

läßt sich erstens als Parameterdarstellung eines Bereichs  $B$  im  $(x, y, z)$ -Raum auffassen. Das ist dann von Interesse (und spielt eine wichtige Rolle in der "mehrdimensionalen Integralrechnung"), wenn sich ein gegebener Bereich  $B$  in kartesischen Koordinaten nur sehr umständlich beschreiben läßt.

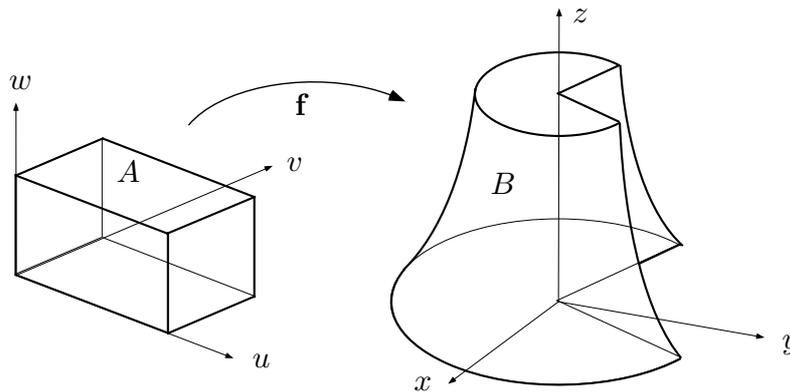


Fig. 2.1.25

Man ersetzt dann diese Beschreibung durch eine Parameterdarstellung mit einem Parameterbereich  $A$  im  $(u, v, w)$ -Raum, der wenn irgend möglich ein achsenparalleler Quader ist (Fig. 2.1.25). Gelegentlich wird dann der Bereich  $A$  gar nicht gezeichnet, sondern man faßt  $u, v, w$  als "neue Koordinaten" im  $(x, y, z)$ -Raum auf und bringt sie in geeigneter Weise in der  $(x, y, z)$ -Figur zur Darstellung. Siehe dazu etwa die Figur 1.5.11.

⑫ Es sei  $B$  der von den drei linear unabhängigen Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  aufgespannte Spat und  $I := [0, 1]^3$  der Einheitswürfel im  $(u, v, w)$ -Raum. Dann ist

$$\mathbf{f}: I \rightarrow B, \quad (u, v, w) \mapsto u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$$

eine Parameterdarstellung von  $B$  (Fig. 2.1.26). ○

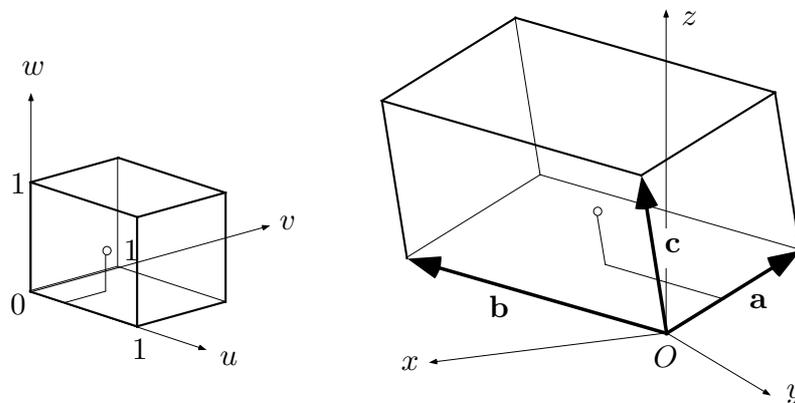


Fig. 2.1.26

⑬ Die Kugelkoordinaten liefern eine Parameterdarstellung der Kugel

$$B_R := \{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R \};$$

Parameterbereich ist ein Quader im  $(r, \phi, \theta)$ -Raum:

$$\mathbf{f}: [0, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow B_R$$

$$(r, \phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \cos \theta \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases} .$$

Dabei wird die ganze Seitenfläche  $r = 0$  des Quaders auf den einzigen Punkt  $O$  abgebildet. Da aber diese Seitenfläche kein Volumen besitzt und der Punkt  $O$  auch nicht, spielt das zum Beispiel für die Zwecke der Integration keine Rolle. ○

Eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{K}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright T\mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

läßt sich noch zu einem ganz anderen Zweck verwenden, nämlich zur Produktion eines Vektorfelds. Das sechste Kapitel dieses Texts, “Vektoranalysis”, ist ganz den Vektorfeldern gewidmet und bildet die mathematische Grundlage der Elektrodynamik.

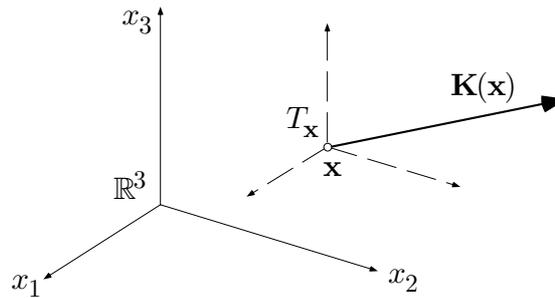


Fig. 2.1.27

Der Funktionswert an der Stelle  $\mathbf{x}$  ist hier ein Vektor  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ , der im Punkt  $\mathbf{x}$  “anzuheften” ist und zum Beispiel das elektrische Feld oder die Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit in diesem Punkt darstellen kann (siehe die Fig. 2.1.27). Dieses “Anheften” ist folgendermaßen zu verstehen: Der Punkt  $\mathbf{x}$  wird als Ursprung eines neuen Raumes  $T_{\mathbf{x}}$ , des **Tangentialraumes** von  $\mathbf{x}$ , angesehen (darauf bezieht sich das ‘ $T$ ’ in der Formel (5)), und  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  ist ein Vektor in diesem Tangentialraum oder eben ein **Tangentialvektor** im Punkt  $\mathbf{x}$ . Ist in dieser Weise für jeden Punkt  $\mathbf{x}$  eines Raumteils  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Tangentialvektor  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  erklärt, so nennt man  $\mathbf{K}(\cdot)$  ein **Vektorfeld** auf  $\Omega$  und zeichnet eine Figur in der Art von Fig. 2.1.28.

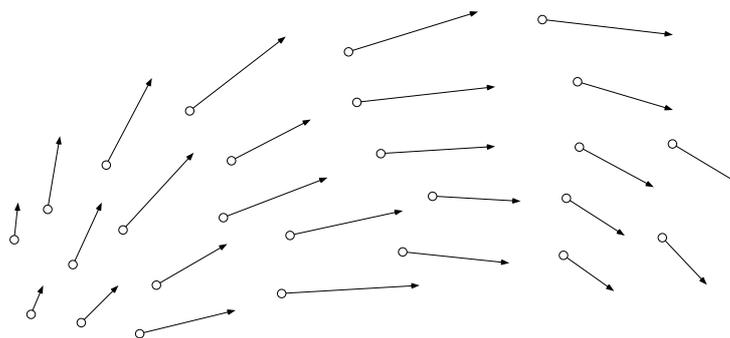


Fig. 2.1.28

⑭ Im Ursprung befinde sich eine Punktladung  $q > 0$ . Diese Punktladung erzeugt ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}(\cdot)$ , genannt **Coulombfeld**. Das Feld  $\mathbf{E}(\cdot)$  ist proportional zu  $q$ , radial nach außen gerichtet, und sein Betrag nimmt mit dem Quadrat des Abstandes von  $\mathbf{0}$  ab. Da die Situation kugelsymmetrisch ist, brauchen wir in Fig. 2.1.29 nur die wesentliche Koordinate  $r$  darzustellen. Es gilt also für eine geeignete, vom Maßsystem abhängige Konstante  $c > 0$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{cq}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r},$$

wobei  $\mathbf{x}/r$  einen radial nach außen gerichteten Einheitsvektor an der Stelle  $\mathbf{x}$  darstellt. In Koordinaten ausgeschrieben sieht das Feld  $\mathbf{E}(\cdot)$  folgendermaßen aus:

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{cq}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \left( \frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r} \right).$$

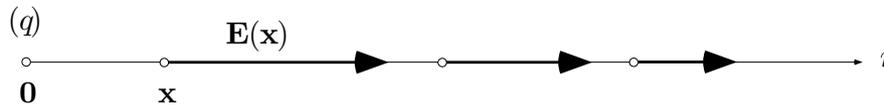


Fig. 2.1.29

## Aufgaben

1. Produziere

- (a) die Polardarstellung,
- (b) eine Parameterdarstellung

einer Kurve, welche ungefähr so aussieht wie die Kurve in Figur 2.1.30. Zeichne Deinen Vorschlag mit Hilfe von ①. (*Hinweis*: Verwende eine Funktion der Form

$$r(\phi) := \frac{1}{1 - \varepsilon \cos(c\phi)} .)$$

2. ① Zeichne das Niveaulinienportrait der Funktion

$$f(x, y) := \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} .$$

Beschreibe den geometrischen Gehalt dieser Aufgabe und ihrer Lösung in Worten.

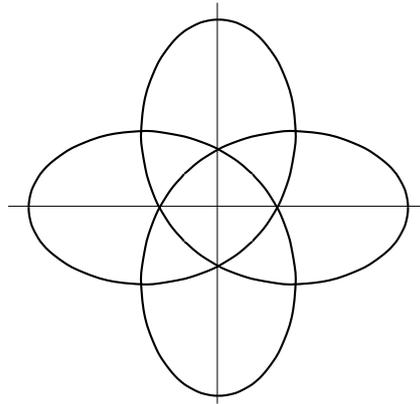


Fig. 2.1.30

3. Eine gegebene harmonische Schwingung der Amplitude  $A$  wird von einer zweiten Schwingung derselben Kreisfrequenz überlagert, wobei die Amplitude dieser Störung höchstens  $A/2$  beträgt. Um welchen Betrag können sich dabei Amplitude und Phase der ursprünglichen Schwingung höchstens verändern? (*Hinweis*: Geometrisch argumentieren!)
4. Zwischen drei harmonischen Schwingungen gleicher Kreisfrequenz bestehen folgende Phasendifferenzen:  $60^\circ$  zwischen der ersten und der zweiten,  $150^\circ$  zwischen der zweiten und der dritten,  $150^\circ$  zwischen der dritten und der ersten. Die Summe der drei Schwingungen verschwindet identisch. Wie verhalten sich die Amplituden?
5. Betrachte den Halbkreisbogen  $\gamma := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$  sowie die in der ganzen  $(x, y)$ -Ebene definierte Funktion

$$f(x, y) := \text{“Distanz von } (x, y) \text{ zum nächstgelegenen Punkt von } \gamma \text{”} .$$

Gewünscht ist eine formelmäßige Darstellung von  $f(x, y)$  mit möglichst wenig Verzweigungen. (*Hinweis*: Die Lösung ergibt sich im wesentlichen durch Inspektion der Figur; wenn nötig die Betragsfunktion verwenden.)

## 2.2 Eigenschaften von Funktionen

### Surjektiv, injektiv, bijektiv

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Definitionen für Funktionen (Abbildungen)  $f: A \rightarrow B$  im allgemeinen;  $A$  und  $B$  sind irgendwelche Mengen. Angegeben ist  $\text{dom}(f) = A$ . Gilt auch  $\text{im}(f) = B$ , in Worten: Tritt jeder Punkt  $y$  des angebotenen Zielbereichs  $B$  tatsächlich als Funktionswert auf, so heißt  $f$  **surjektiv**, altmodisch: eine Abbildung von  $A$  **auf**  $B$ .

*Bsp:* Die reelle Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := x^3 - 2x$$

(Fig. 2.2.1) ist surjektiv, die Funktion  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hingegen nicht wegen  $\text{im}(\sin) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$ .

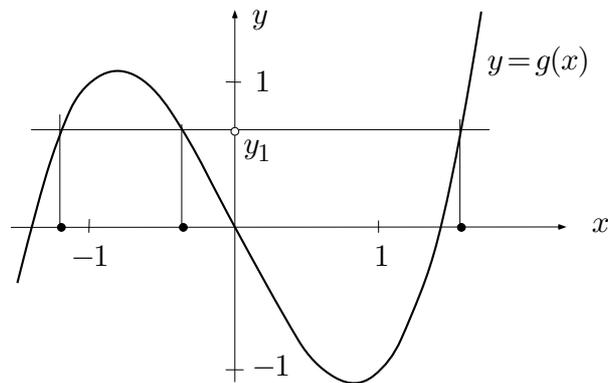


Fig. 2.2.1

Die Funktion (Abbildung)  $f$  heißt **injektiv**, altmodisch: **eindeutig**, wenn sie in verschiedenen Punkten verschiedene Werte annimmt, in anderen Worten: wenn aus  $f(x_1) = f(x_2)$  folgt:  $x_1 = x_2$ .

*Bsp:* Die eben betrachtete Funktion  $g$  ist nicht injektiv; so wird etwa der Wert  $y_1$  an drei verschiedenen Stellen angenommen. Die eingeschränkte Funktion

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

ist injektiv, da  $\sin$  in dem angegebenen Intervall streng monoton wächst. Parameterdarstellungen von Kurven, Flächen oder räumlichen Bereichen sind "im wesentlichen" injektiv.

Ist  $f: A \rightarrow B$  surjektiv und injektiv, so heißt  $f$  **bijektiv**. Eine bijektive Abbildung verheiratet die Elemente von  $A$  monogam mit denjenigen von  $B$ , so daß am Schluß von keiner Sorte eines überzählig ist (Fig. 2.2.2). Ist  $f: A \rightarrow B$  injektiv, so ist  $f: A \rightarrow \text{im}(f)$  bijektiv, da nunmehr die Punkte  $y \in B$ , die nicht als Funktionswert vorkommen, außer Betracht fallen.

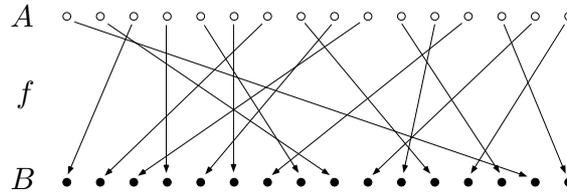


Fig. 2.2.2

Bsp: Die Funktionen  $\tan: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  (s.u.) sind bijektiv.

## Exkurs über unendliche Mengen

Wenn wir sagen, eine gewisse Menge  $A$  besitze  $n$  Elemente, so meinen wir im Grunde genommen das folgende: Es gibt eine bijektive Abbildung der Menge  $[1..n]$  auf  $A$ . Diese Vorstellung läßt sich auf unendliche Mengen ausdehnen. Es stellt sich dabei heraus, daß unendlich nicht einfach unendlich ist. Darüber soll hier kurz berichtet werden.

Eine Menge  $A$  heißt **abzählbar unendlich** oder einfach **abzählbar**, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  (oder umgekehrt) gibt. Beispiele von abzählbaren Mengen sind  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , die Menge der geraden Zahlen, die Menge der Primzahlen. Wie Cantor als erster bemerkt hat, ist auch  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  und damit  $\mathbb{Q}$  (als Menge von Paaren  $(p, q)$ ) abzählbar. Zum Beweis genügt es, eine injektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  anzugeben. Hier ist sie:

$$f(p, q) := 2^p \cdot 3^q .$$

Da die von  $f$  produzierten Zahlen eine echte Teilmenge von  $\mathbb{N}$  bilden, besitzt  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  "eher weniger" Elemente als  $\mathbb{N}$  (in Wirklichkeit sind es natürlich gleich viele).

Eine Menge  $A$  ist **überabzählbar**, wenn es keine surjektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt. Die einfachste überabzählbare Menge ist die Menge aller unendlichen 0-1-Folgen  $\beta. = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$ . Daß diese Menge ( $=: \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ ) überabzählbar ist, läßt sich folgendermaßen einsehen:

┌ Wäre  $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$  abzählbar, so könnte man sich einen Computer vorstellen, der die *sämtlichen* Binärfolgen in unendlich langen Zeilen nacheinander ausdruckt:

```

01011010100110011110 ...
00010011100101010110 ...
10101000110001100001 ...
00000110000011001010 ...
11011110110001101011 ...
1000110111111001100 ...
01011001101110001 ...
⋮

```

Während der Computer an der Arbeit ist, betrachten wir die Hauptdiagonale der entstehenden Matrix  $[\beta_{jk}]$  und bilden eine besondere Folge  $\beta_k^*$  gemäß der Vorschrift

$$\beta_k^* := \begin{cases} 1 & (\beta_{k.k} = 0) \\ 0 & (\beta_{k.k} = 1) \end{cases},$$

in dem obigen Beispiel also die Folge

$$\beta_k^* := (1101001 \dots).$$

Diese Folge wird vom Computer nicht produziert, denn sie unterscheidet sich von jeder ausgedruckten Folge an wenigstens einer Stelle. ┘

Faßt man die Binärfolgen als unendliche Dualbrüche  $\beta_0.\beta_1\beta_2\dots$  auf, so erhält man gerade die sämtlichen reellen Zahlen im Intervall  $[0, 2]$ , die allermeisten genau ein Mal. Damit ist auch  $\mathbb{R}$  überabzählbar.

## Umkehrfunktion

Eine bijektive Funktion (Abbildung)

$$f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{im}(f), \quad x \mapsto y := f(x)$$

besitzt eine wohlbestimmte und ebenfalls bijektive **Umkehrfunktion**, auch **inverse Abbildung** genannt, und zwar ist

$$f^{-1}: \text{im}(f) \rightarrow \text{dom}(f)$$

(Fig. 2.2.3) definiert durch

$$f^{-1}(y) := \text{“das } x \in \text{dom}(f) \text{ mit } f(x) = y \text{”}.$$

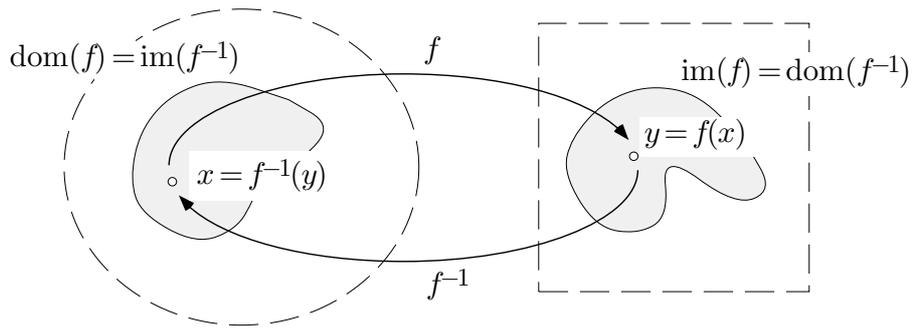


Fig. 2.2.3

Liegt  $f$  als Funktionsterm vor, so erhält man den Funktionsterm für  $f^{-1}$ , wenn es gelingt, die Gleichung  $f(x) = y$  für unbestimmtes  $y$  formelmäßig nach  $x$  aufzulösen.

② Es sei

$$f(x) := \frac{3x + 7}{5x - 2},$$

wobei wir uns um den genauen Definitionsbereich im Augenblick nicht kümmern. Die folgende Kette von Gleichungen liefert den Funktionsterm für  $f^{-1}$ :

$$y = \frac{3x + 7}{5x - 2} \Rightarrow (5x - 2)y = 3x + 7 \Rightarrow x(5y - 3) = 2y + 7 \Rightarrow x = \frac{2y + 7}{5y - 3} \Rightarrow \underline{f^{-1}(y) = \frac{2y + 7}{5y - 3}}.$$

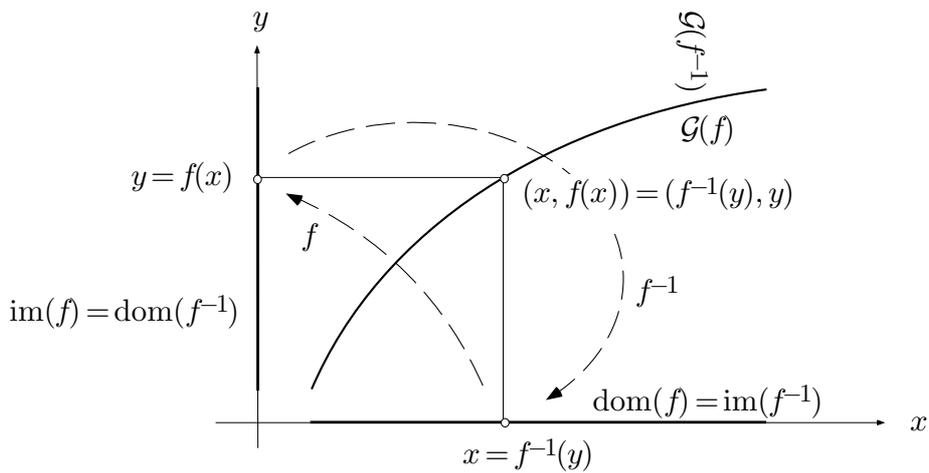


Fig. 2.2.4

Fig. 2.2.4 zeigt  $f$  und  $f^{-1}$  im Graphenbild. Der Graph von  $f$  kann also auch als Graph von  $f^{-1}$  dienen; dabei muß man nur den Kopf so halten, wie Fig. 2.2.5 zeigt.

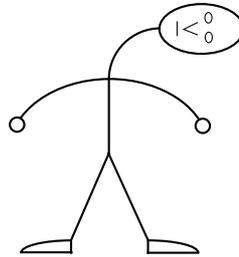


Fig. 2.2.5

*Anmerkung:* Werden  $f$  und  $f^{-1}$  gleichzeitig betrachtet, so behält man mit Vorteil  $x$  als Variable in  $\text{dom}(f) = \text{im}(f^{-1})$  und  $y$  als Variable in  $\text{im}(f) = \text{dom}(f^{-1})$  bei; insbesondere ist dann  $y$  die unabhängige Variable von  $f^{-1}$ . Interessiert das  $f$  nicht mehr, so kann man den Graphen von  $f^{-1}$  in die übliche Position bringen, d.h.  $f^{-1}$  als Funktion einer neuen, horizontal skalierten Variablen  $x$  darstellen.

Die Umkehrfunktion “existiert” unter den angeführten Umständen, auch wenn es nicht möglich ist, sie formelmäßig mit Hilfe von “schon vorhandenen” Funktionen darzustellen. Viele wichtige Funktionen, zum Beispiel die Arcus-Funktionen und letzten Endes auch  $\arg$ , sind ausdrücklich als Umkehrfunktionen von anderen Funktionen definiert und zunächst nicht anderweitig darstellbar.

③ Es sei  $n \geq 1$ . Die Potenzfunktion

$$\text{pot}_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto y := x^n$$

ist injektiv: Aus  $0 \leq x' < x$  folgt

$$x^n - x'^n = (x^{n-1} + x^{n-2}x' + \dots + x'^{n-1})(x - x') > 0,$$

insbesondere  $x^n \neq x'^n$ . Ferner ist  $\text{pot}_n$  auch surjektiv (wird später bewiesen). Es gibt daher eine Umkehrfunktion, genannt  **$n$ -te Wurzel**:

$$\text{wrz}_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad y \mapsto x := \text{wrz}_n(y).$$

Anstelle von  $\text{wrz}_n(y)$  schreibt natürlich jedermann  $\sqrt[n]{y}$ . ○

Viele wichtige Funktionen, zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen, sind leider nicht injektiv. Um die Existenz einer Umkehrfunktion wenigstens für einen “Teil” von  $f$  auch in diesem Fall zu erzwingen, kann man den Definitionsbereich so weit verkleinern, daß  $f$  auf dem verkleinerten Bereich injektiv wird. Man wählt also eine geeignete Teilmenge  $A \subset \text{dom}(f)$  und “vergißt” die Funktion außerhalb  $A$ . Diese **Einschränkung** von  $f$  auf  $A$  wird, wenn wirklich nötig, mit  $f \upharpoonright A$  bezeichnet. Wir behandeln als Anwendung dieser Idee die Arcus-Funktionen.

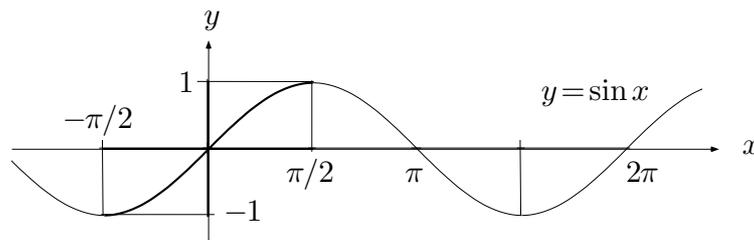


Fig. 2.2.6a

④ Die Einschränkung  $\sin \upharpoonright [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  bijektiv auf  $[-1, 1]$  ab (Fig. 2.2.6a). Es gibt daher die Umkehrfunktion

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

genannt **Arcussinus** (Fig. 2.2.6b).

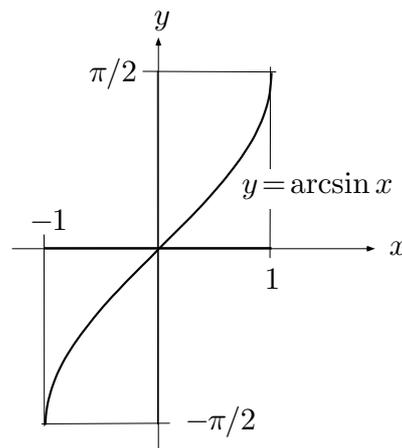


Fig. 2.2.6b

Die Einschränkung  $\cos \upharpoonright [0, \pi]$  ist streng monoton fallend und bildet das Intervall  $[0, \pi]$  bijektiv und gegenseitig auf das Intervall  $[-1, 1]$  ab (Fig. 2.2.7). Es gibt daher die Umkehrfunktion **Arcuscosinus**:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

die monoton von  $\pi$  nach 0 fällt.

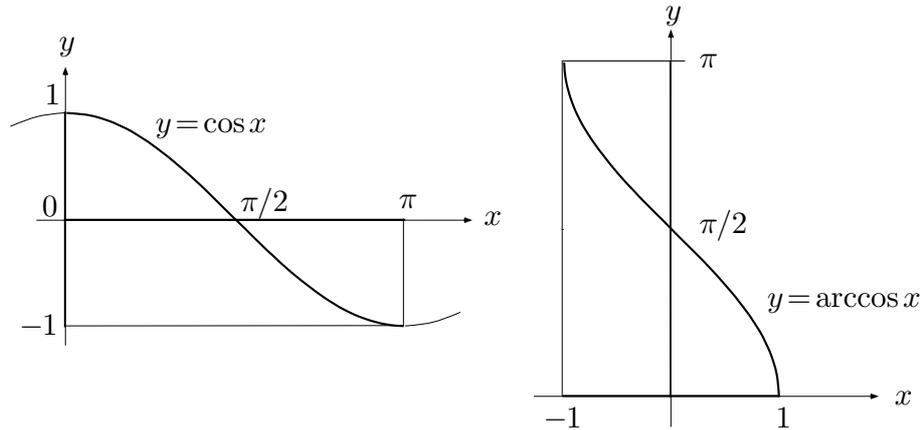


Fig. 2.2.7

Die Einschränkung  $\tan \upharpoonright ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  bijektiv auf  $\mathbb{R}$  ab (Fig. 2.2.8). Es gibt daher die Umkehrfunktion **Arcustangens**:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

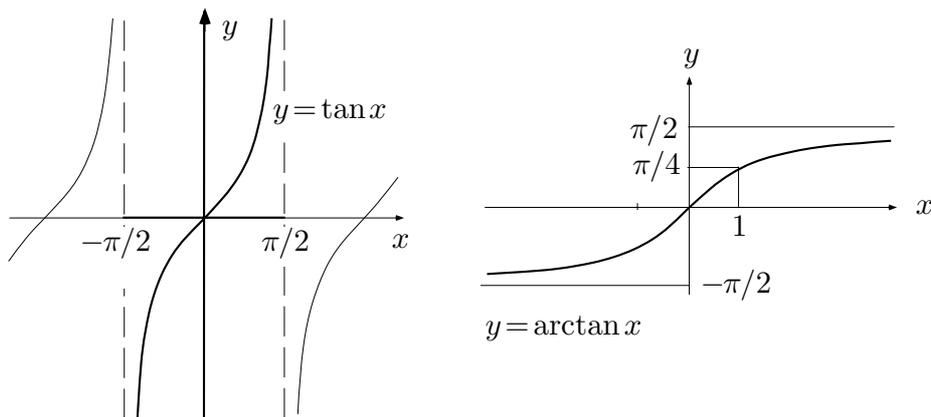


Fig. 2.2.8

## Verknüpfungen von Funktionen

Sind  $f$  und  $g$  Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich (eine beliebige Menge) und Werten in der gleichen Grundstruktur, zum Beispiel in  $\mathbb{C}$ , so lassen sich  $f$  und  $g$  ebenfalls den in  $\mathbb{C}$  vorhandenen Operationen und Verknüpfungen unterwerfen. Damit sind in natürlicher Weise die Funktionen

$$\bar{f}, |f|, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, f + g, \lambda f, f \cdot g, f/g$$

mit demselben Definitionsbereich erklärt —  $f/g$  natürlich nur in den Punkten  $x$ , wo  $g(x) \neq 0$  ist.

Funktionen (Abbildungen) lassen sich aber noch auf eine weitere Art miteinander verknüpfen: Sind  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  zwei Funktionen, so ist für jedes  $x \in A$  zunächst durch  $f$  der Punkt  $f(x) \in B$  festgelegt und zu diesem dann durch  $g$  der Punkt  $g(f(x)) \in C$  (Fig. 2.2.9). Damit entsteht von selbst die **zusammengesetzte Abbildung**

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

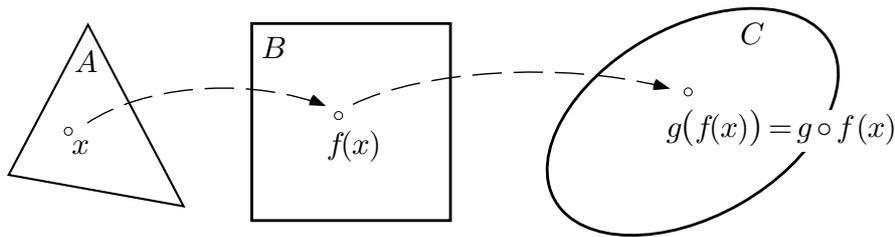


Fig. 2.2.9

### ⑤ Die beiden Funktionen

$$f(x) := e^x, \quad g(x) := \cos x$$

lassen sich als Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  auffassen und somit auf zweierlei Arten zusammensetzen. Die beiden Zusammensetzungen

$$g \circ f: x \mapsto \cos(e^x), \quad f \circ g: x \mapsto e^{\cos x}$$

sind offensichtlich voneinander verschieden:  $g \circ f$  nimmt Werte im Intervall  $[-1, 1]$  an,  $f \circ g$  im Intervall  $[\frac{1}{e}, e]$ . ○

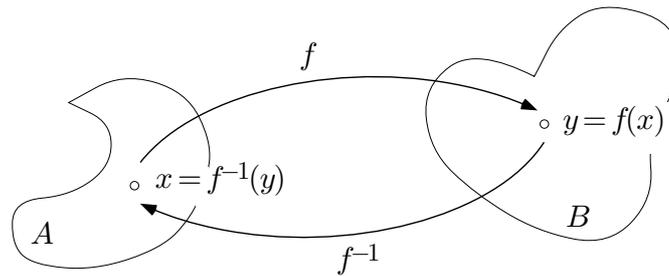


Fig. 2.2.10

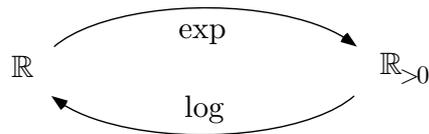


Fig. 2.2.11

⑥ Ist  $f: A \rightarrow B$  bijektiv, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

(Fig. 2.2.10); dabei bezeichnet

$$\text{id}_A: A \rightarrow A, \quad x \mapsto x$$

die **identische Abbildung** von  $A$ .

Bsp: Logarithmus und Exponentialfunktion (Fig. 2.2.11). Man hat

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \log(e^t) = t;$$

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0}: \quad e^{\log r} = r.$$

○

⑦ Es seien

$$\gamma: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

die Parameterdarstellung einer Raumkurve (als “Flugplan” zu interpretieren) und

$$u: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$$

eine Temperaturverteilung im Raum. Dann stellt die Zusammensetzung

$$f(t) := u(\mathbf{x}(t))$$

den vom mitfliegenden Beobachter aufgezeichneten zeitlichen Temperaturverlauf dar.

○

## Stetigkeit

Theoretisch betrachten wir die Punkte (Zahlen, Vektoren) unserer Grundstrukturen als ideale Objekte, die mit “unendlicher Genauigkeit” erfaßt und manipuliert werden können. In einem Computer sind aber nur die allerwenigsten Zahlen, zum Beispiel die Zahlen

$$\pm p/q \quad (p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}; p, q \leq 2^{48})$$

exakt darstellbar, alle anderen können nur mit ziemlicher Genauigkeit approximiert werden. Wenn wir unter diesen Umständen sinnvoll mit Funktionen arbeiten wollen (Fig. 2.2.12), sind wir darauf angewiesen, daß die Eingabe eines Näherungswerts  $x$  anstelle des richtigen Werts  $x_0$  (man denke an  $x_0 := \pi$ ) zu einem Funktionswert  $f(x)$  führt, der in der Nähe des richtigen Funktionswerts  $f(x_0)$  liegt. Es soll also gelten:

$$x \doteq x_0 \implies f(x) \doteq f(x_0) .$$

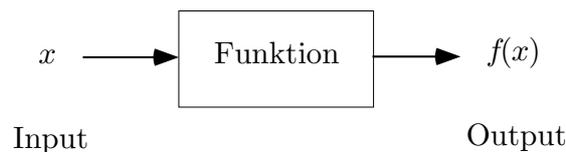


Fig. 2.2.12

Die hier angesprochene Eigenschaft von Funktionen ist die sogenannte *Stetigkeit*. Wie wir noch sehen werden, handelt sich da um einen fundamentalen Begriff der Analysis. In der beschriebenen Situation wäre man wohl zufrieden, wenn folgendes sichergestellt wäre:

$$\forall x : |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| ,$$

das heißt, wenn der Fehler im Output höchstens so groß ist wie der Fehler im Input. Ja, es würde auch genügen, wenn für eine geeignete Konstante  $C > 0$  (zum Beispiel  $C := 20$ ) die Fehlerabschätzung

$$\forall x : |f(x) - f(x_0)| \leq C |x - x_0| \tag{1}$$

gilt. Läßt sich der Fehler im Funktionswert durch eine derartige **Lipschitz-Bedingung** begrenzen, so heißt  $f$  **lipstetig** (sic!) an der Stelle  $x_0$ . Leider läßt sich die Stetigkeit mit diesem einfachen Ansatz nicht ganz in den Griff bekommen, wie das folgende Beispiel zeigt.

## ⑧ Die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

ist zweifellos stetig, und zwar auch im Ursprung: Je näher  $x$  bei 0 ist, desto näher ist auch  $\sqrt{x}$  bei  $\sqrt{0} = 0$ . Wegen

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{0}|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 0+)$$

gibt es aber kein  $C > 0$ , so daß für alle  $x \geq 0$  die Fehlerbegrenzung

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq C|x - 0|$$

garantiert ist.

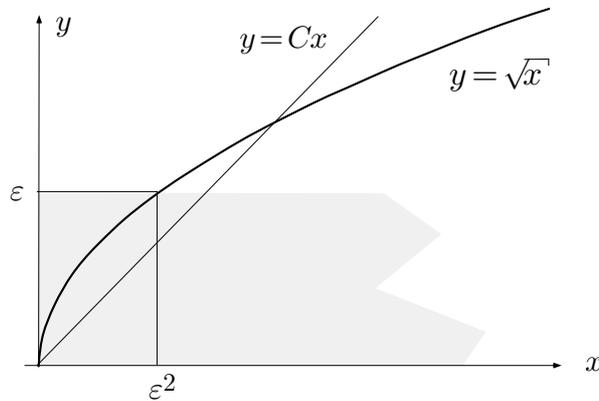


Fig. 2.2.13

Folgendes trifft hingegen zu (Fig. 2.2.13): Ist eine (beliebig kleine) Toleranz  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so läßt sich  $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$  erzwingen, indem man  $x$  hinreichend nahe bei 0 wählt: Es genügt, daß  $|x - 0| < \varepsilon^2$  ist.  $\bigcirc$

Diese eigentümlich verschachtelte Bedingung liegt der allgemeinen Definition der Stetigkeit zugrunde: Die Funktion  $f$  ist **an der Stelle**  $x_0$  **stetig**, wenn sich zu noch so kleiner Toleranz  $\varepsilon > 0$  ein “Schlupf”  $\delta > 0$  angeben läßt, so daß für alle  $x \in \text{dom}(f)$  gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Der Schlupf  $\delta$  wird in aller Regel von  $\varepsilon$  abhängen: Je kleiner die Fehlertoleranz beim Funktionswert ist, desto weniger Schlupf darf die unabhängige

Variable aufweisen. — Eine Funktion  $f$  heißt ganz einfach **stetig**, wenn sie an jeder Stelle  $x_0 \in \text{dom}(f)$  stetig ist.

Erfreulicherweise benötigen wir diese allgemeine Definition kaum; denn in den allermeisten Fällen ist eine Lipschitz-Bedingung (1) erfüllt, und das reicht für die Stetigkeit aus: Gilt (1) für ein gewisses  $C$  und ist eine Toleranz  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so ist  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  garantiert, sobald  $|x - x_0| < \varepsilon/C$  ist. Folglich ist  $\delta := \varepsilon/C$  ein zulässiger Schlupf.

Alles, was hier gesagt wird, gilt nicht nur für Funktionen  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ , sondern für Funktionen, die in einer beliebigen Grundstruktur

$$\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{C}\}$$

definiert sind und in einer derartigen Struktur  $\mathbb{X}'$  Werte annehmen. In allen diesen Strukturen ist eine natürliche Abstandsmessung

$$d(x, a) := |x - a|$$

vorhanden, und etwas anderes haben wir bei der Definition der Stetigkeit nicht gebraucht. Anstelle dieses **euklidischen Abstandes** verwendet man gelegentlich auch die Abstandsfunktion

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - a_k| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n).$$

Die “Einheitskugel” ist dann ein achsenparalleler Würfel der Kantenlänge 2. Wie man sich leicht überlegt, gilt

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|.$$

Die beiden Abstandsmessungen unterscheiden sich also höchstens um den Faktor  $\sqrt{n}$ . Für Konvergenz- und Stetigkeitsbetrachtungen spielt es daher keine Rolle, ob man mit dem euklidischen Betrag  $|\mathbf{x}|$  oder mit der “**Würfelnorm**”  $\|\mathbf{x}\|$  arbeitet.

Wir notieren die folgenden Grundprinzipien:

- (2.2) (a) *Konstante Funktionen sind stetig.*  
 (b) *Die identische Abbildung  $x \mapsto x$  ist stetig.*  
 (c) *Die Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist stetig.*  
 (d) *Die Umkehrfunktion einer injektiven stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  ist stetig.*

□ Wir beweisen nur (c), wobei wir die folgenden vereinfachenden Annahmen zugrundelegen: Die Funktion  $f: x \mapsto y$  sei lipstetig an der Stelle  $x_0$ :

$$\forall x: |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|,$$

und die Funktion  $g: y \mapsto z$  sei lipstetig an der Stelle  $y_0 := f(x_0)$ :

$$\forall y: |g(y) - g(y_0)| \leq C'|y - y_0|.$$

Hieraus folgt: Für alle  $x$  gilt

$$\begin{aligned} |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| &= |g(f(x)) - g(f(x_0))| \\ &\leq C'|f(x) - f(x_0)| \\ &\leq C' C|x - x_0|; \end{aligned}$$

somit genügt  $g \circ f$  an der Stelle  $x_0$  einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten  $C' C$ . (Das ist die "Kettenregel" für Lipstetigkeit!)  $\square$

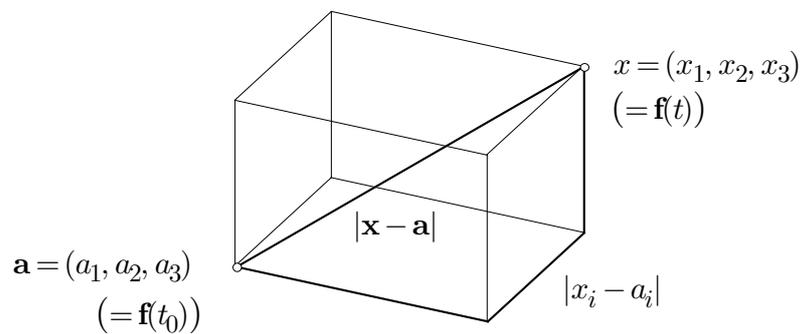


Fig. 2.2.14

Für zwei beliebige Punkte  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  und  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  im  $\mathbb{R}^3$  gelten die Ungleichungen

$$|x_i - a_i| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| + |x_3 - a_3| \quad (2)$$

(Fig. 2.2.14). Aus diesen Ungleichungen, bzw. den analogen Ungleichungen in den anderen Grundstrukturen, folgt:

**(2.3)** (a) *Die Projektionen*

$$\text{pr}_i: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto x_i$$

auf die Koordinatenachsen, insbesondere auch  $\text{Re}$  und  $\text{Im}$ , sind stetig.

(b) *Eine  $\mathbb{X}$ -wertige Funktion*

$$t \mapsto \mathbf{f}(t) \quad \left( = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \text{ z.B.} \right)$$

ist genau dann stetig, wenn die einzelnen Koordinatenfunktionen  $f_i$  stetig sind.

□ (a) Die linke Ungleichung (2) besagt, daß  $\text{pr}_i$  lipstetig ist mit Lipschitz-Konstante 1. — (b) Ist  $\mathbf{f}$  stetig, so ist nach **(2.2)**(c) auch jedes  $f_i = \text{pr}_i \circ \mathbf{f}$  stetig. Für die Hauptaussage von (b), daß nämlich die Stetigkeit der  $f_i$  die Stetigkeit des “Gesamtobjekts”  $\mathbf{f}$  nach sich zieht, verwenden wir die rechte Ungleichung (2) mit  $\mathbf{x} := \mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{a} := \mathbf{f}(t_0)$ . Wenn wir für die  $f_i$  vereinfachend (1) annehmen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| &\leq \sum_{i=1}^3 |f_i(t) - f_i(t_0)| \leq \sum_{i=1}^3 C_i |t - t_0| \\ &= (C_1 + C_2 + C_3) |t - t_0|. \end{aligned}$$

Somit ist  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $t_0$  ebenfalls lipstetig, wobei  $C := C_1 + C_2 + C_3$  als Lipschitz-Konstante dienen kann. □

## Stetigkeit der Rechenoperationen

Für die analytische Praxis ist nun das folgende entscheidend:

**(2.4)** Die in den Grundstrukturen  $\mathbb{X}$  vorhandenen Operationen sind stetig.

□ Wir behandeln nur das Produkt von reellen Zahlen, das wir als eine Funktion  $p(\cdot)$  der Vektorvariablen  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  betrachten:

$$p(\mathbf{x}) := x_1 \cdot x_2.$$

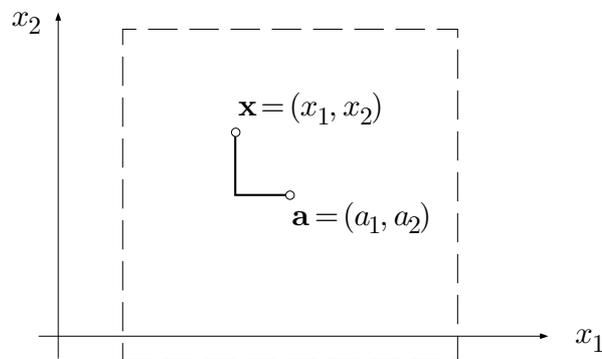


Fig. 2.2.15

Es genügt, die Stetigkeit von  $p(\cdot)$  an einer fest gewählten Stelle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$  zu beweisen. Da wir dabei nur Produkte  $x_1 \cdot x_2$  von Zahlen  $x_1 \doteq a_1$  und  $x_2 \doteq a_2$  betrachten müssen, dürfen wir von vorneherein

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq 1$$

annehmen (Fig. 2.2.15). Wir erhalten dann folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
 |p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{a})| &= |x_1x_2 - a_1a_2| \\
 &= |(x_1 - a_1)a_2 + a_1(x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)| \\
 &\leq |a_2| |x_1 - a_1| + |a_1| |x_2 - a_2| + |x_1 - a_1| |x_2 - a_2| \\
 &\leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \\
 &\leq (2\|\mathbf{a}\| + 1) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| ;
 \end{aligned}$$

somit ist  $p(\cdot)$  lipstetig an der Stelle  $\mathbf{a}$ . ┘

Aus den Sätzen (2.2)–(2.4) folgt insbesondere

**(2.5)** *Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, stetig.*

┐ Wir können zum Beispiel das Produkt  $g := f_1 \cdot f_2$  von zwei stetigen Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}$  als Zusammensetzung  $g = p \circ \mathbf{f}$  von stetigen Funktionen interpretieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{f} & & p \\
 \mathbb{X} \curvearrowright & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\
 t \mapsto & (f_1(t), f_2(t)) & \mapsto f_1(t) \cdot f_2(t) \quad .
 \end{array}$$

Die erste Funktion ist stetig gemäß Prinzip (2.3)(b), die zweite nach Satz (2.4), die Zusammensetzung nach (2.2)(c). ┘

Wenn wir die Stetigkeit der Funktionen  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  einmal voraussetzen, ergibt sich hieraus weiter mit Satz (2.2)(d): Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

⑨ Die Potenzfunktionen  $\text{pot}_n: x \mapsto x^n$  sind als endliche Produkte von stetigen Funktionen  $x \mapsto x$  stetig. Nach (2.2)(d) sind also auch die Wurzelfunktionen  $\sqrt[n]{\cdot}$  stetig. — Die Funktion

$$f(x) := \frac{e^{1-\log^2 x} \arccos \frac{1}{1+x^2}}{\log \sin(1+e^x)}$$

ist, soweit definiert, stetig. ○

## Zwischenwertsatz

Die Stetigkeit garantiert nicht nur, daß mit den betreffenden Funktionen in vernünftiger Weise numerisch gearbeitet werden kann, sondern sie bildet auch die Grundvoraussetzung für fundamentale Sätze der Analysis, so für den folgenden **Zwischenwertsatz**. Es leuchtet ein, daß ein derartiger Satz für Funktionen, die Sprünge machen, nicht gilt.

(2.6) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und

$$f(a) < 0 < f(b) .$$

Dann besitzt  $f$  im Intervall  $[a, b]$  wenigstens eine Nullstelle  $\xi$ .

□ Wir konstruieren durch fortgesetztes Halbieren des Intervalls  $[a, b]$  rekursiv eine Folge von Intervallen  $[a_k, b_k]$ :

$$a_0 := a, \quad b_0 := b;$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} \left[ a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right], & \text{falls } f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) > 0, \\ \left[ \frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right], & \text{falls } f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist die Folge  $a_k$  monoton wachsend (Fig. 2.2.16), die Folge  $b_k$  monoton fallend, und es gilt für alle  $k$ :

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a), \quad f(a_k) \leq 0 < f(b_k) .$$

Hieraus folgt mit Satz (1.1): Die beiden Folgen besitzen einen gemeinsamen Grenzwert  $\xi$ ; wir behaupten natürlich: Es ist  $f(\xi) = 0$ .

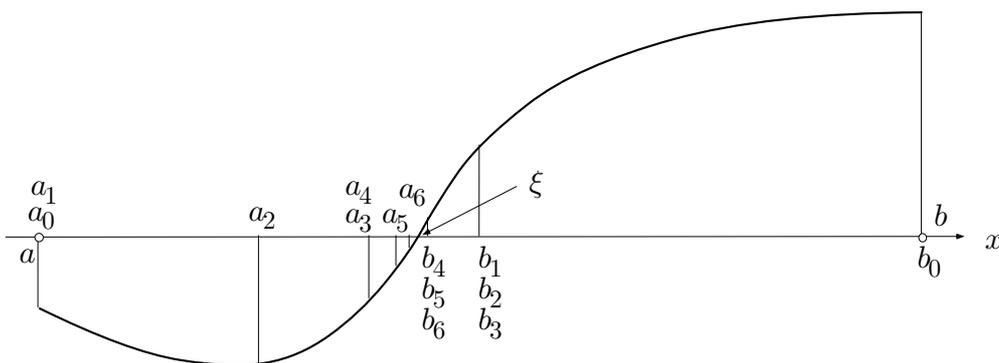


Fig. 2.2.16

Wir beweisen das indirekt und nehmen an, es sei etwa  $f(\xi) =: 2\varepsilon > 0$ . Da  $f$  an der Stelle  $\xi$  stetig ist, gibt es zu diesem  $\varepsilon$  einen Schlupf  $\delta > 0$  mit

$$|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon .$$

Insbesondere ist dann  $f(x) > \varepsilon > 0$  für alle  $x \in ]\xi - \delta, \xi]$ . Da die  $a_k$  von unten gegen  $\xi$  konvergieren, gibt es bestimmt ein  $a_k$  in diesem Intervall (siehe die Fig. 2.2.17), und man hätte  $f(a_k) > 0$  — ein Widerspruch.  $\square$

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes läßt sich zum Beispiel leicht beweisen, daß die Potenzfunktionen  $\text{pot}_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  surjektiv sind.

Die im Beweis von **(2.6)** angegebene Konstruktion einer Nullstelle  $\xi$  heißt **binäre Suche** und wird auch in der numerischen Praxis häufig verwendet. Wir behandeln dazu ein numerisches Beispiel.

⑩ Gegeben ist das Polynom dritten Grades

$$f(x) := x^3 - x - 1 .$$

Es ist  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . Wir legen dann die folgende Tabelle an:

$a_k$	$b_k$	$\frac{a_k + b_k}{2}$	$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)$
0	2	1	-1
1		1.5	0.875
	1.5	1.25	-0.2969
1.25		1.375	0.2246
	1.375	1.3125	-0.0515
1.3125		1.34375	0.0826
	1.34375	1.328125	0.014576
	1.328125	1.320313	-0.018711
1.320313		1.324219	-0.002128
1.324219		1.326172	0.006209
	1.326172	1.325195	0.002037
	1.325195	1.324707	-0.000047

Folglich besitzt  $f$  die Nullstelle  $\xi \doteq 1.3247$ .  $\circ$

⑪ Ist  $B \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte konvexe Menge mit glattem Rand  $\partial B$ , so gibt es einen geradlinigen Schnitt, der sowohl den Flächeninhalt wie den Umfang von  $B$  halbiert.

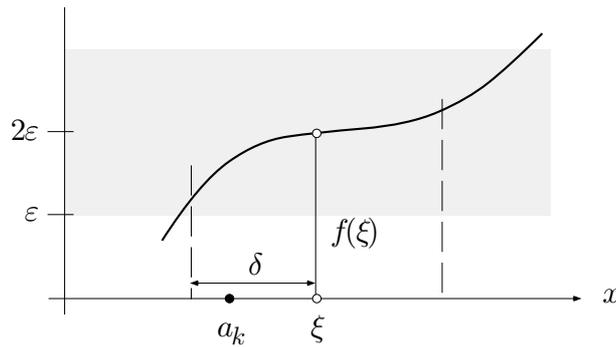


Fig. 2.2.17

□ Es bezeichne  $A$  den Flächeninhalt und  $L$  den Umfang von  $B$ . Wähle für  $\partial B$  eine Parameterdarstellung

$$\partial B : s \mapsto \mathbf{z}(s) \quad (0 \leq s \leq L)$$

mit der Bogenlänge als Parameter. Jeder geradlinige Schnitt durch zwei Punkte

$$\mathbf{z}(s), \quad \mathbf{z}(s + \frac{L}{2}) \quad (0 \leq s \leq \frac{L}{2})$$

halbiert den Umfang. Es bezeichne  $a(s)$  den Flächeninhalt zur Rechten eines derartigen Schnittes. Ist zum Beispiel  $a(0) < \frac{A}{2}$ , so ist  $a(\frac{L}{2}) = A - a(0) > \frac{A}{2}$ . Es gibt daher ein  $s_0 \in [0, \frac{L}{2}]$  mit  $a(s_0) = \frac{A}{2}$ .

□  
○

## Aufgaben

1. Die Funktion

$$f : x \mapsto \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

wird als reellwertige Funktion der reellen Variablen  $x$  betrachtet.

- Bestimme den Definitionsbereich  $\text{dom}(f) =: D$  sowie den Wertebereich  $\text{im}(f) =: W$ .
- Überlege:  $f$  ist Zusammensetzung von streng monotonen Funktionen und damit injektiv.
- Ⓜ Bestimme den analytischen Ausdruck der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W \rightarrow D.$$

- Ⓜ Zeichne die Graphen von  $f$  und von  $f^{-1}$ .

2. Produziere ein anregendes Beispiel von drei reellen Funktionen  $f, g, h$ , so daß für ein geeignetes Intervall  $I$  gilt:

$$h \circ g \circ f = \text{id}_I .$$

3. Es sei  $\#A = 5, \#B = 8$ . Bestimme
- die Anzahl der injektiven Abbildungen  $f : A \rightarrow B$ ,
  - die Anzahl der surjektiven Abbildungen  $g : B \rightarrow A$ .
- (Hinweis: Für (b) gibt es keine einfache Formel.)

4. (M) Es sei  $f(x) := x^2 + 2x + 2$ . Man bestimme, soweit möglich, die Umkehrfunktionen der Einschränkungen

$$(a) f \upharpoonright_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \quad (b) f \upharpoonright_{[-2, 0]}, \quad (c) f \upharpoonright_{\mathbb{R}_{\leq -2}} .$$

5. Zwei reelle Größen  $x$  und  $y$  sind durch die Beziehung

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2$$

aneinander gekoppelt. Ist diese Beziehung monoton? Welche Intervalle der  $x$ - und der  $y$ -Achse werden dadurch aufeinander abgebildet? Figur!

6. Erfinde eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ , die in jedem noch so kurzen Intervall jeden Wert  $k \in \mathbb{N}$  annimmt.

7. Erfinde eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  auf  $\mathbb{R}_{> 0}$ .

8. (M) Die vier Teilflächen in der Figur 2.2.18 sind gleich groß. Bestimme den Winkel  $\alpha$  mit Hilfe eines Taschenrechners und binärer Suche (eine Tabelle anlegen!). Wieviel Schritte wären nötig, um  $\alpha$  auf  $10^{-6}$  Grad genau zu berechnen?

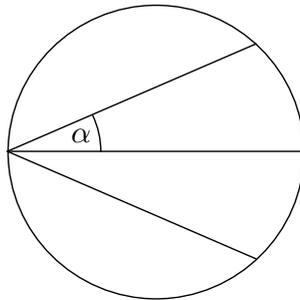


Fig. 2.2.18

9. (M) Man bestimme die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sowie  $f(-1), f(1)$  derart, daß die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & (x < -1) \\ (\alpha + \beta)x & (-1 < x < 1) \\ x^2 + \alpha x - \beta & (x > 1) \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird, und zeichne den resultierenden Graphen von  $f$ . (*Hinweis:* Diese Aufgabe kann von A bis Z mit  $\textcircled{M}$  gelöst werden.)

10. Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **unimodal**, wenn sie bis zu einer bestimmten Stelle  $\xi \in I$  streng monoton wächst und anschließend streng monoton fällt.

(a) Erfinde einen Suchalgorithmus für  $\xi$  ( $I = [a, b]$  vorausgesetzt).

(b) Wende diesen Algorithmus an auf das Beispiel

$$f(t) := \sqrt{t} - e^t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

11. Zeige: Ist  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf der Peripherie des Einheitskreises, so gibt es zwei Diametralpunkte auf  $S^1$ , in denen  $f$  denselben Wert annimmt.

12. Verifiziere die folgenden Identitäten:

(a)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq 1),$

(b)  $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

## 2.3 Grenzwerte

Ist eine gegebene Funktion als stetig erwiesen, so ist man sicher, daß sie sich auf ihrem ganzen Definitionsbereich vernünftig verhält. Wenn wir aber das Verhalten einer Funktion in den Randzonen von  $\text{dom}(f)$  oder in der Nähe von isolierten Ausnahmepunkten (Beispiel:  $\sin x/x$  bei  $x := 0$ ) beschreiben wollen, so benötigen wir den Begriff des *Grenzwerts*.

### Einige Begriffe aus der allgemeinen Topologie

Bevor wir damit beginnen, erläutern wir einige Begriffe aus der sogenannten allgemeinen Topologie, dem Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Stetigkeit "an sich", mit der Konvergenz in unendlichdimensionalen Räumen und mit Ähnlichem befaßt.

Es sei  $A$  eine beliebige Teilmenge des Grundraums  $\mathbb{X}$ , z.B. von  $\mathbb{C}$ . Ein Punkt  $a \in A$  ist ein **innerer Punkt** von  $A$ , wenn es eine (u.U. kleine) Vollkugel mit Zentrum  $a$  gibt, die noch ganz zu  $A$  gehört (Fig. 2.3.1). Man kann dann von  $a$  aus in jeder Richtung noch ein Stück weit gehen, ohne  $A$  zu verlassen. Eine Menge  $A$ , die nur aus inneren Punkten besteht, heißt **offen**. Als Faustregel kann das folgende dienen: Eine durch endlich viele strenge Ungleichungen definierte Menge ist offen.

Bsp: Das offene Intervall  $]0, 1[$  ist offen in  $\mathbb{R}$ , die Kreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  ist offen in  $\mathbb{C}$ , und  $\{(x, y, z) \mid 0 < z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$  ist ein offener Kreiskegel im  $\mathbb{R}^3$ .

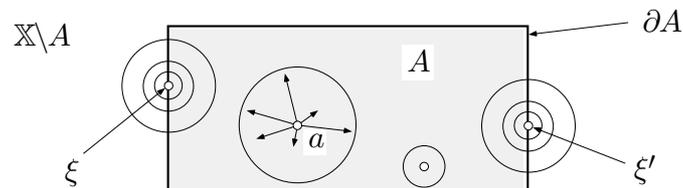


Fig. 2.3.1

Ein Punkt  $\xi \in \mathbb{X}$ , ob er nun zu  $A$  gehört oder nicht (Fig. 2.3.1), ist ein **Randpunkt** von  $A$ , wenn jede (noch so kleine) Vollkugel mit Mittelpunkt  $\xi$  sowohl die Menge  $A$  wie deren **Komplement**  $\mathbb{X} \setminus A$  schneidet. Die Menge der Randpunkte von  $A$  wird mit  $\partial A$  bezeichnet. Die betrachtete Menge  $A$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $\partial A \subset A$  gilt, das heißt: wenn der Rand vollständig zu  $A$  dazugehört. Als Faustregel kann das folgende dienen: Eine durch Gleichungen und  $\leq$ -Ungleichungen definierte Menge  $A \subset \mathbb{X}$  ist abgeschlossen.

Bsp:  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $[a, b]$  sind abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die Ellipse  $\{(x, y) \mid 2x^2 + 5y^2 \leq 7\}$  ist eine abgeschlossene Menge in der Ebene, und die  $x$ -Achse  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 0\}$  ist eine abgeschlossene Menge im  $\mathbb{R}^3$ .

## Begriff des Grenzwerts

Wir betrachten also eine Funktion  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$  und konzentrieren unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Punkt  $\xi \in \mathbb{X}$ , typischer Weise einen Randpunkt von  $\text{dom}(f)$ . Da wir das Verhalten von  $f$  studieren wollen, wenn “ $x$  nach  $\xi$  strebt”, nehmen wir von vorneherein an, daß es in beliebiger Nähe von  $\xi$  tatsächlich Punkte  $x \in \text{dom}(f)$  gibt. Die Frage nach dem Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \xi$  führt auf die Frage: Könnte man den Wert  $f(\xi)$  so definieren bzw. undefinieren, daß die durch  $f(\xi) := \eta$  erweiterte bzw. abgeänderte Funktion  $f$  an der Stelle  $\xi$  stetig wird? Damit kommen wir auf die folgende Definition:

Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $\xi$  den **Grenzwert**  $\eta$ , in Zeichen:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow \eta \quad (x \rightarrow \xi),$$

wenn sich für beliebig kleine Toleranz  $\varepsilon > 0$  ein Schlupf  $\delta > 0$  angeben läßt, so daß für alle  $x \in \text{dom}(f)$  gilt (Fig. 2.3.2):

$$|x - \xi| < \delta, \quad x \neq \xi \quad \implies \quad |f(x) - \eta| < \varepsilon.$$

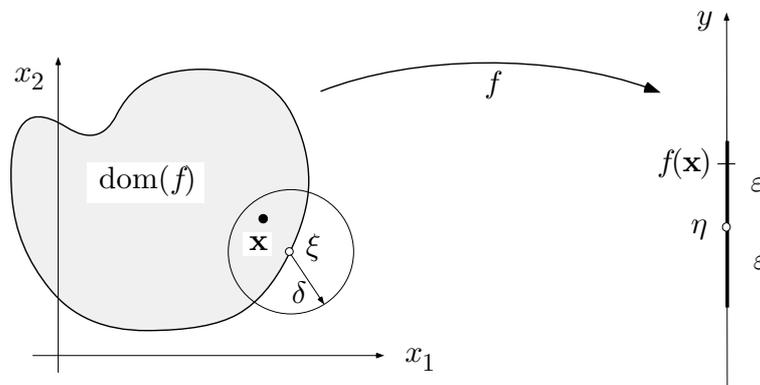


Fig. 2.3.2

Fig. 2.3.3 stellt diesen Sachverhalt im Graphenbild dar. Für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  muß der Graph von  $f$  innerhalb des schraffierten “ $\varepsilon$ -Schlauches” verlaufen, sobald  $x$  nahe genug bei  $\xi$  liegt (aber  $\neq \xi$  ist).

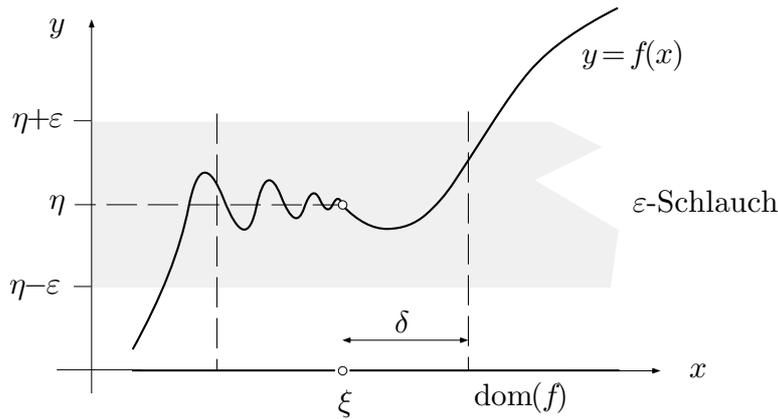


Fig. 2.3.3

Erfreulicherweise benötigen wir die allgemeine Definition des Grenzwerts nur selten. Zur tatsächlichen Berechnung von Grenzwerten bedienen wir uns in erster Linie eines Vorrats an “Standardgrenzwerten”,

$$\text{Bsp:} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

sowie einer Sammlung von Rechenregeln und Tricks, zum Beispiel der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital (s.u.).

Beachte, daß ein an der Stelle  $\xi$  eventuell schon vorhandener Funktionswert  $f(\xi)$  beim Grenzübergang  $x \rightarrow \xi$  nicht angeschaut wird. Ist tatsächlich  $\xi \in \text{dom}(f)$ , so kann man aber folgendes sagen:

$$f \text{ stetig an der Stelle } \xi \iff \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

① Die Funktion

$$f(t) := \frac{t^3 - 3t^2 - 3t + 10}{t^2 - 5t + 6}$$

ist an der Stelle  $t := 2$  nicht definiert, da der Funktionsausdruck dort die Form  $0/0$  annimmt. Nun gilt aber für alle  $t \notin \{2, 3\}$ :

$$f(t) = \frac{(t-2)(t^2 - t - 5)}{(t-2)(t-3)} = \frac{t^2 - t - 5}{t-3} =: g(t),$$

wobei nun die Funktion  $g$  an der Stelle 2 stetig ist. Somit folgt

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = g(2) = 3.$$

○

## Uneigentliche Grenzlagen und Grenzwerte

Bevor wir auf die angekündigten Rechenregeln kommen, ergänzen wir die Grunddefinition durch einige Zusätze.

Die reelle Achse  $\mathbb{R}$  läßt sich durch die beiden **uneigentlichen Randpunkte**  $-\infty$  und  $\infty$  auf natürliche Weise “abschließen”. Diese beiden Punkte sind keine reellen Zahlen, mit denen man rechnen, sondern “bloß gedachte Objekte”, die man aber auf kohärente Weise in Grenzwertüberlegungen einbeziehen kann. Ist  $f$  eine Funktion, deren Definitionsbereich beliebig große reelle Zahlen enthält,

Bsp:  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C},$

so hat es einen Sinn, nach dem Verhalten von  $f(x)$  zu fragen, wenn “ $x$  nach  $\infty$  strebt”. Hierzu müssen wir den Sachverhalt “ $x$  hinreichend nahe bei  $\infty$ ” beschreiben, und dazu können wir offensichtlich keinen “Schlupf  $\delta > 0$ ” brauchen. An seine Stelle tritt ein “Pflock”  $M$  wie folgt: Der Sachverhalt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow \eta \quad (x \rightarrow \infty)$$

liegt vor, wenn sich für jede noch so kleine Toleranz  $\varepsilon > 0$  ein Pflock  $M$  so setzen läßt, daß gilt:

$$x > M \quad \implies \quad |f(x) - \eta| < \varepsilon.$$

In anderen Worten: Für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  muß der Graph von  $f$  innerhalb des “ $\varepsilon$ -Schlauches” um den Wert  $\eta$  verlaufen, sobald  $x$  jenseits eines geeigneten Pflocks  $M$  liegt (Fig. 2.3.4). Je kleiner die vorgegebene Toleranz ist, desto weiter rechts wird man den Pflock einschlagen müssen.

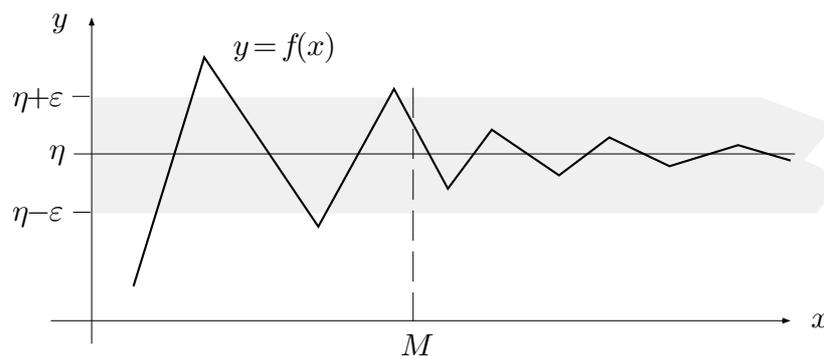


Fig. 2.3.4

② Ein “Standardgrenzwert” ist natürlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Wir wollen das richtiggehend beweisen: Ist eine Toleranz  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so setzen wir den Pflock  $M := 1/\varepsilon$  (Fig. 2.3.5). Für beliebiges  $x > M$  gilt dann

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \varepsilon ;$$

wir haben daher, wie verlangt:

$$x > M \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon .$$

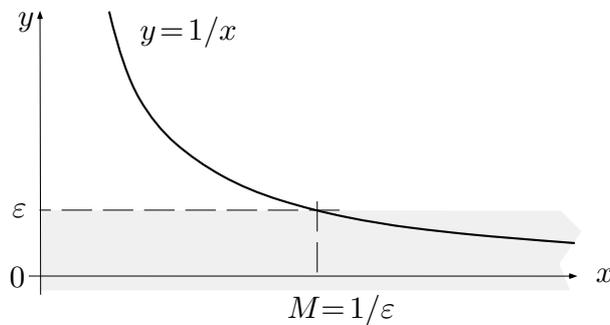


Fig. 2.3.5

Der  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  existiert nicht, wie man ohne weiteres einer Figur entnimmt. Hingegen ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0 ,$$

denn es gilt (Fig. 2.3.6)

$$\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} < \varepsilon ,$$

sobald  $x > M := 1/\varepsilon$  ist.

Schon schwieriger ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0 .$$

Wir zeigen zunächst: Für alle  $x \geq 0$  gilt

$$2^x > x . \tag{1}$$

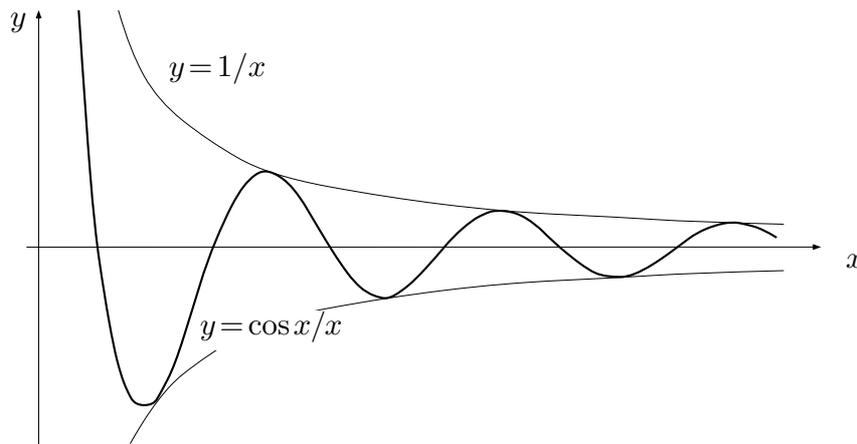


Fig. 2.3.6

□ Die Menge  $[1..2^n]$  enthält insbesondere die  $n+1$  Zahlen  $1, 2, 4, \dots, 2^n$ , und hieraus folgt schon  $2^n \geq n+1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setze jetzt  $\lfloor x \rfloor =: n$ ; dann folgt

$$2^x \geq 2^n \geq n+1 > x,$$

wobei wir stillschweigend vorausgesetzt haben, daß die Funktion  $x \mapsto 2^x$  monoton wächst. □

Hiernach gilt bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$ :

$$0 < \frac{1}{2^x} < \frac{1}{x} < \varepsilon,$$

sobald  $x > M := 1/\varepsilon$ . ○

Wir haben hier den Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$  für die unabhängige Variable  $x$  betrachtet. Es ist aber auch möglich, wertseitig dem Sachverhalt

$$f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \xi)$$

einen Sinn zu erteilen. Es sei also  $f: \mathbb{X} \curvearrowright \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und  $\xi$  ein eigentlicher oder uneigentlicher Randpunkt von  $\text{dom}(f)$ . Wir sagen,  $f$  besitze an der Stelle  $\xi$  den **uneigentlichen Grenzwert**  $\infty$ , in Zeichen:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \xi),$$

wenn sich für jede noch so große Schranke  $C$  ein Schlupf  $\delta > 0$  (bzw. ein Pflock  $M$ ) finden läßt, so daß für alle  $x \in \text{dom}(f)$  gilt:

$$|x - \xi| < \delta, \quad x \neq \xi \quad (\text{bzw. } x > M) \quad \implies \quad f(x) > C.$$

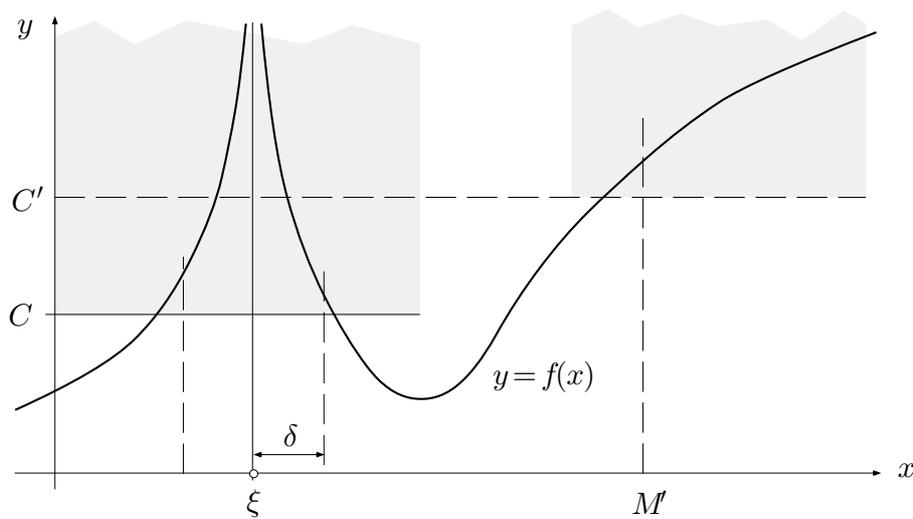


Fig. 2.3.7

Der Graph von  $f$  muß also für jedes noch so große  $C$  oberhalb des Niveaus  $C$  verlaufen, sobald  $x$  hinreichend nahe bei  $\xi$  (bzw. hinreichend weit rechts) liegt (Fig 2.3.7).

③ Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty .$$

Ist nämlich ein  $C > 0$  vorgegeben und

$$0 < |x - 0| < \delta := \frac{1}{\sqrt{C}} ,$$

so folgt

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = C .$$

Wie erwartet, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty .$$

Ist nämlich eine Schranke  $C$  vorgegeben, so folgt für alle  $x > C$  ( $=: M$ ) wegen (1) die Abschätzung

$$2^x > x > C .$$

○

Wir treffen hier die folgende Vereinbarung: Ist irgendwo  $\infty$  oder  $-\infty$  als Grenzwert zugelassen, so wird das an der betreffenden Stelle ausdrücklich gesagt. Ohne diesbezüglichen Hinweis wird unter “Konvergenz” immer Konvergenz gegen einen endlichen Wert  $\eta$  verstanden. Sinngemäß dasselbe gilt für Zahlfolgen (s.u.).

## Einseitige Grenzwerte

Wir betrachten weiter für eine Funktion  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$  und einen festen Punkt  $\xi \in \mathbb{R}$  den Grenzübergang  $x \rightarrow \xi$ , wobei aber nur die Funktionswerte  $f(x)$  in Punkten  $x > \xi$  berücksichtigt und die Funktionswerte links von  $\xi$  nicht dem Toleranztest unterzogen werden sollen (Fig. 2.3.8). Man schreibt dafür  $x \rightarrow \xi+$  und nennt

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) =: f(\xi+)$$

den **rechtsseitigen Grenzwert** von  $f$  an der Stelle  $\xi$ . Analog wird der **linksseitige Grenzwert**  $f(\xi-)$  erklärt.

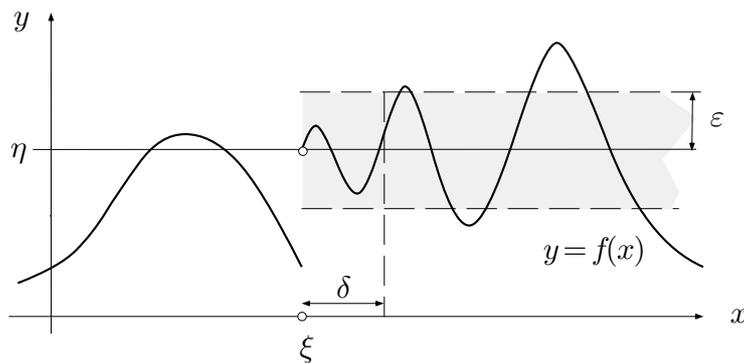


Fig. 2.3.8

Gilt  $f(\xi+) = f(\xi)$ , so ist  $f$  **rechtsseitig stetig** an der Stelle  $\xi$ . Gilt  $f(\xi-) = f(\xi) = f(\xi+)$ , so ist  $f$  an der Stelle  $\xi$  stetig, und umgekehrt. Existieren die einseitigen Grenzwerte  $f(\xi+)$ ,  $f(\xi-)$  und sind sie voneinander verschieden, so besitzt  $f$  an der Stelle  $\xi$  eine **Sprungstelle**. Eine bis auf isolierte Sprungstellen stetige Funktion heißt **stückweise stetig**.

④ Trivial ist

$$\operatorname{sgn}(0+) = 1, \quad \operatorname{sgn}(0-) = -1.$$

Ist  $n \in \mathbb{Z}$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n \quad (= [n]), \quad \lim_{x \rightarrow n-} [x] = n - 1 \quad (\neq [n]),$$

und für alle  $\xi \in \mathbb{Z}$  ist

$$\lim_{x \rightarrow \xi} [x] = [\xi] .$$

Die Funktion  $x \mapsto [x]$  ist hiernach in den ganzzahligen Punkten nur rechtsseitig stetig, in allen übrigen Punkten stetig.

Weiter haben wir die “Standardgrenzwerte”

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

□ Es sei  $C > 0$  eine beliebig große vorgegebene Schranke (Fig. 2.3.9) und  $\delta := 1/C$ . Dann gilt

$$0 < x < \delta \quad \implies \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = C ,$$

wie verlangt. Ist zweitens  $-\delta < x < 0$ , so gilt  $0 < -x < \delta$  und somit

$$\frac{1}{-x} > \frac{1}{\delta} = C .$$

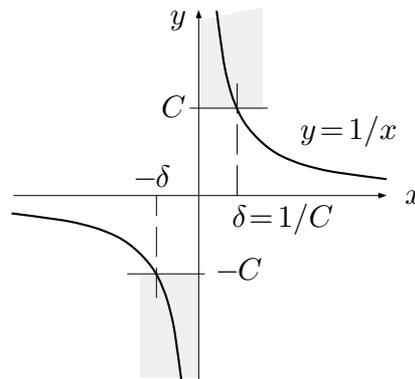


Fig. 2.3.9

In summa ergibt sich die erforderliche Implikation

$$-\delta < x < 0 \quad \implies \quad \frac{1}{x} < -C .$$

□

Wir zeigen noch:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0 .$$

Wir haben es hier mit “ineinandergeschachtelten Grenzwerten” zu tun, wofür es eigentlich eine allgemeine Rechenregel gibt (s.u.). Die Idee ist: Strebt  $x$

gegen  $0+$ , so strebt  $y := 1/x$  gegen  $\infty$  und folglich  $2^{1/x} = 2^y$  auch gegen  $\infty$ . Der exakte Beweis verläuft folgendermaßen:

□ Es sei eine Schranke  $C > 0$  vorgegeben. Wegen  $\lim_{y \rightarrow \infty} 2^y = \infty$  gibt es ein  $M$  mit

$$y > M \quad \implies \quad 2^y > C . \quad (2)$$

Wegen  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$  gibt es weiter ein  $\delta > 0$  mit

$$0 < x < \delta \quad \implies \quad \frac{1}{x} > M . \quad (3)$$

Nehmen wir (2) und (3) zusammen, so folgt

$$0 < x < \delta \quad \implies \quad 2^{1/x} > C ,$$

wie verlangt. — Ähnlich schließt man im zweiten Fall. ┘

○

## Substitutionsregel für zusammengesetzte Grenzwerte

Die eben verwendete Schlußweise läßt sich verallgemeinern zum Beweis des nachstehenden Satzes über zusammengesetzte (“ineinandergeschachtelte”) Grenzwerte. Man beachte die Analogie zum Satz **(2.2)**(c) über die Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen. Der Satz handelt vom Konvergieren “an sich”; die darin auftretenden Punkte  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  dürfen daher auch uneigentlich sein.

**(2.7)** *Existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta , \quad \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) \quad (=:\zeta)$$

(und ist  $g$  stetig im Punkt  $\eta$ , falls  $f$  diesen Wert überhaupt annimmt), so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) .$$

In anderen Worten: Unter den angegebenen Voraussetzungen darf man in dem verschachtelten Ausdruck  $\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x))$  die innere Funktion durch eine neue Variable  $y$  substituieren und  $y$  gegen den Grenzwert  $\eta$  der inneren Funktion streben lassen.

*Anmerkung:* Die in Klammern gesetzte Bedingung ist in den typischen Anwendungsfällen offensichtlich erfüllt, und wir verzichten darauf, sie jedesmal

zu überprüfen. Es geht aber nicht ohne, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei

$$f(x) := 1, \quad g(y) := \begin{cases} 2 & (y = 1) \\ 3 & (y \neq 1) \end{cases}.$$

Dann ist  $g(f(x)) \equiv 2$  und folglich  $\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2$ . Hier strebt die innere Funktion mit  $x \rightarrow 0$  gegen 1, was  $\alpha = \lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 3$  suggeriert.

⑤ Es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2^{1/t} = \lim_{y \rightarrow 0+} 2^y = 2^0 = 1;$$

dabei haben wir stillschweigend benutzt, daß  $y \mapsto 2^y$  stetig ist. — Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(x \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y} \cos y\right) = 0,$$

und hieraus folgt weiter

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{4 + x \cos \frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{4 + t} = 2,$$

denn  $\sqrt{\cdot}$  ist stetig. ○

## Weitere Rechenregeln

**(2.8)** Es sei  $\mathbf{f} := (f_1, f_2, \dots, f_n)$  ein  $n$ -Tupel von Funktionen, die in der Umgebung des (eigentlichen oder uneigentlichen) Punktes  $\xi$  definiert sind und für  $x \rightarrow \xi$  Grenzwerte besitzen:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f_i(x) = a_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dann gilt:

(a) 
$$\lim_{x \rightarrow \xi} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}.$$

(b) Ist  $R(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  ein rationaler Ausdruck in den  $f_i$  und ist der Wert  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$  definiert, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} R(f_1(x), \dots, f_n(x)) = R(a_1, \dots, a_n).$$

Die Behauptung (b) besagt, daß man an jeder Stelle des Ausdrucks den betreffenden Grenzwert einsetzen darf. Ist  $R(a_1, \dots, a_n)$  nicht definiert, etwa

von der Form  $1/0$  oder  $0/0$ , so muß man weitere Überlegungen anstellen. Unter (b) lassen sich natürlich unzählige einfachere Grenzwertregeln subsumieren (die man sonst einzeln beweisen müßte).

Bsp:  $\lim_{x \rightarrow \xi} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = a_1 \cdot a_2$  .

□ (a) Aus der Ungleichung 2.2(2) folgt

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x) - a_i| .$$

Es sei eine Toleranz  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Ist  $x$  hinreichend nahe bei  $\xi$ , so ist jeder Summand rechter Hand  $< \varepsilon/n$ , also ist dann  $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}| < \varepsilon$ .

(b) Nach Satz (2.5) ist die Funktion  $\mathbf{y} \mapsto R(\mathbf{y})$  an der Stelle  $\mathbf{a}$  stetig. Mit (a) und (2.7) folgt daher

$$\lim_{x \rightarrow \xi} R(\mathbf{f}(x)) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{a}} R(\mathbf{y}) = R(\mathbf{a}) . \quad \square$$

Handlich ist das folgende **Vergleichskriterium**, womit wir unsere Regelkollektion abschließen:

(2.9) Gilt für eine geeignete Konstante  $C > 0$  in der Umgebung des Punktes  $\xi$  die Abschätzung

$$|f(x)| \leq C \cdot g(x)$$

und ist  $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$ , so ist auch  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ .

□ Es sei ein  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Nach Voraussetzung über  $g$  gilt  $g(x) < \varepsilon/C$  für alle hinreichend nahe bei  $\xi$  gelegenen  $x$ . Für diese  $x$  ist dann  $|f(x) - 0| < \varepsilon$ , wie verlangt. □

⑥ Zu berechnen ist die Größe

$$Q := \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{9 + 500 \cdot 2^{1/(x-1)} \cos \frac{1}{x-1}} + \frac{1}{\arcsin x} + e^x}{\frac{x^5 - 1}{x - 1} - \log(x^3 + x)} .$$

Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{1/(x-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} 2^{1/y} = 0 ,$$

ferner gilt:

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rightarrow 5 \quad (x \rightarrow 1) ,$$

da das Polynom rechter Hand an der Stelle 1 stetig ist. Wir erhalten daher mit Hilfe von (2.8)(b) und (2.9):

$$Q = \frac{3 + \frac{2}{\pi} + e}{5 - \log 2} = 1.4755 . \quad \bigcirc$$

① (Forts.) Die Ausgangsfunktion  $f$  besitzt an der Stelle  $t := 2$  eine hebbare Unstetigkeit und ist für alle praktischen Zwecke identisch mit der Funktion

$$g(t) := \frac{t^2 - t - 5}{t - 3} = t + 2 + \frac{1}{t - 3} ,$$

wobei wir den Ausdruck rechter Hand durch Ausführung der Division (mit Rest) erhalten haben. Es ist  $\text{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ . Um einen globalen Überblick über das Verhalten der Funktion  $g$  zu gewinnen, berechnen wir die Schnittpunkte des Graphen von  $g$  mit den Koordinatenachsen sowie die Grenzwerte in den Endpunkten der Definitionsintervalle (Fig. 2.3.10). Es ist

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{5}{3} ; \\ g(t) = 0 &\iff t^2 - t - 5 = 0 \iff t \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\} ; \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} g(t) &= -\infty , & \lim_{t \rightarrow 3^+} g(t) &= \infty ; \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) &= -\infty , & \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= \infty , \end{aligned}$$

und zwar ist die Gerade  $y = t + 2$  Asymptote (s.u.) des Graphen sowohl für  $t \rightarrow -\infty$  wie für  $t \rightarrow \infty$ . (Der Graph ist eine Hyperbel.)  $\bigcirc$

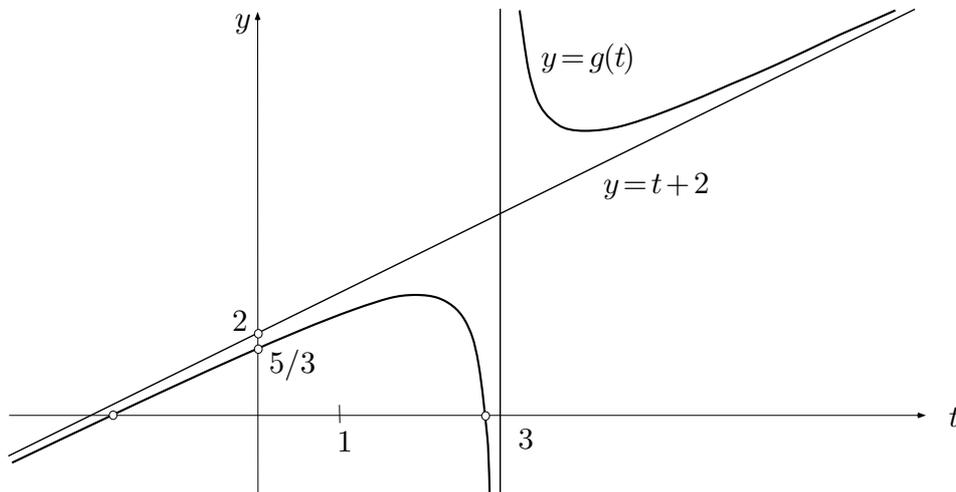


Fig. 2.3.10

## Asymptoten

Die  $\mathbb{X}$ -wertige Funktion  $f$  sei für alle  $t > a$  definiert. Die Gerade

$$y = pt + q, \quad p, q \in \mathbb{X} \text{ fest,}$$

heißt **Asymptote** von  $\mathcal{G}(f)$  (Fig. 2.3.11) für  $t \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) - (pt + q)) = 0$$

ist. Die Parameter  $p$  und  $q$  berechnen sich nach den Formeln

$$p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}, \quad q = \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) - pt).$$

Nicht jedes  $f: \mathbb{R}_{>a} \rightarrow \mathbb{X}$  besitzt eine Asymptote! Für  $f(t) := t + \sqrt{t}$  strebt  $\frac{f(t)}{t}$  zwar gegen 1, aber  $f(t) - t$  gegen  $\infty$ .

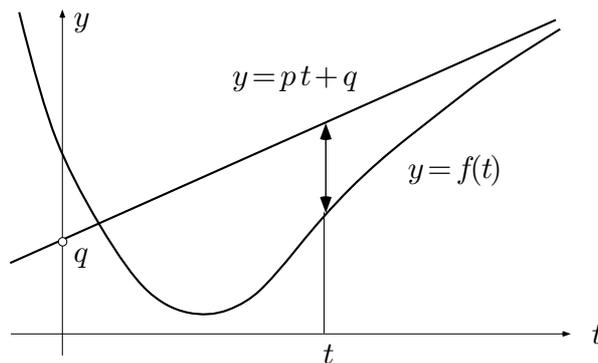


Fig. 2.3.11

## Aufgaben

1. (M) Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls vorhanden:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^4 - 81},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \quad (p, q \in \mathbb{N}^*),$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{x}),$

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3}\right),$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|},$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|},$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x(x+a)} - x \right), \quad (h) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10\,000)},$$

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad (j) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{a}{n}} \right) \right).$$

2. (a) (M) Bestimme die Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  so, daß die Differenz

$$\sqrt{t^4 - 2t^2 + 7t + 1} - (at^2 + \beta t + \gamma)$$

mit  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. (*Hinweis:* Mit der Summe der beiden erweitern.)

(b) (M) Stelle eine instruktive Figur der resultierenden Situation her.

3. Bei den folgenden Funktionen bestimme man, soweit vorhanden, die zu  $t \rightarrow \infty$  gehörigen Asymptoten:

$$(a) \quad f(t) := \frac{t}{t + \sqrt{t}}, \quad (b) \quad g(t) := t \left( 2 - \sin \frac{1}{t} \right).$$

## 2.4 Folgen und Reihen

### Folgen als mathematisches Konstruktionswerkzeug

Im Grunde genommen können wir bis dahin nur *rationale* Zahlen und *rationale* Funktionen in rechtsgenügender Weise erfassen und manipulieren bzw. evaluieren. Quadratwurzeln, allgemein:  $n$ -te Wurzeln, sind zwar in  $\mathbb{R}$  vorhanden, und die Wurzelfunktionen sind auch stetig, aber wir haben kein systematisches Verfahren, das den Wurzelexponenten  $n$  und ein beliebiges  $c \geq 0$  als Input akzeptiert und  $\sqrt[n]{c}$  mit vorgeschriebener Genauigkeit ausgibt. Oder: Wie rechnet ein Taschenrechner  $\sin 23.5^\circ$  aus?

Wir benötigen ein allgemeines Konstruktionswerkzeug für “analytische Objekte”, Zahlen oder Funktionen, und zwar in zweierlei Hinsicht:

- Erstens geht es darum, neuartige Objekte begrifflich zu konzipieren und formelmäßig darzustellen.

$$\text{Bsp: } e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} .$$

- Zweitens sollte man instandgesetzt werden, diese Objekte in endlich vielen Schritten mit jeder wünschbaren Genauigkeit (numerisch) zu berechnen.

Ein derartiges Konstruktionswerkzeug ist der Folgenbegriff und im Anschluß daran die Idee der “Reihe”.

Man kann den Definitionsbereich  $\mathbb{N}$  einer Folge

$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{X}, \quad k \mapsto x_k \tag{1}$$

als eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  mit dem uneigentlichen Randpunkt  $\infty$  betrachten oder als einen Grundbereich *sui generis* — jedenfalls heißt die Folge (1) **konvergent** gegen den **Grenzwert**  $\xi \in \mathbb{X}$ , in Zeichen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi \quad \text{bzw.} \quad x_k \rightarrow \xi \quad (k \rightarrow \infty),$$

wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Pflock  $k_0$  gibt mit

$$k > k_0 \quad \implies \quad |x_k - \xi| < \varepsilon .$$

Existiert kein derartiges  $\xi \in \mathbb{X}$ , so heißt die Folge (1) **divergent**. Hierunter fallen insbesondere die **uneigentlich konvergenten** Folgen, die sinngemäß erklärt sind.

Die Rechenregeln (2.8), (2.9) gelten natürlich auch für Folgenrengwerte. So hat man zum Beispiel

$$\forall k : |x_k| \leq C \cdot r_k \quad \wedge \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 . \tag{2}$$

Satz (2.7) über zusammengesetzte Grenzwerte liefert umgekehrt das folgende wichtige Prinzip (Fig. 2.4.1):

**(2.10)** Ist  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$  (bzw.: Ist  $f$  stetig an der Stelle  $\xi$ ), so gilt für jede gegen  $\xi$  konvergente Punktfolge  $x$  in  $\text{dom}(f)$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \eta \quad (\text{bzw. } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\xi)) .$$

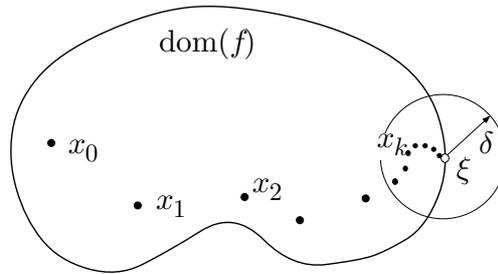


Fig. 2.4.1

①

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 ;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3k-1)(k^2+5)}{(2k+7)^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3-\frac{1}{k})(1+\frac{5}{k^2})}{(2+\frac{7}{k})^3} = \frac{3}{8} .$$

Betrachte weiter ein festes  $q \in \mathbb{C}$ . Wir behaupten: Ist  $0 < |q| < 1$ , so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0 .$$

┌ Nach Voraussetzung ist  $\frac{1}{|q|} > 1$ , also  $\frac{1}{|q|} = 1 + \delta$  für ein  $\delta > 0$ . Es folgt

$$\frac{1}{|q|^k} = (1 + \delta)^k = 1 + k\delta + \dots > k\delta$$

(binomischer Lehrsatz) und somit

$$|q^k| = |q|^k < \frac{1}{k\delta} .$$

Da hier die rechte Seite mit  $k \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt, folgt die Behauptung mit Hilfe des Vergleichskriteriums (2). ┌

○

In der Praxis tritt folgende Situation immer wieder auf: Gesucht ist der Grenzwert  $\xi$  einer Folge  $x_k$ , die in bestimmter Weise rekursiv definiert ist:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &:= a \\ x_{k+1} &:= x_k + \Delta x_k \end{aligned} \right\} \quad (k \geq 0) \quad ; \quad (3)$$

dabei ist es in der Regel so, daß das **Inkrement**  $\Delta x_k$  ohne großen Rechenaufwand berechnet werden kann. Die Rechnung wird abgebrochen, sobald die Inkremente vernachlässigbar klein werden, und man betrachtet das letzte berechnete  $x_k$  als Näherungswert für den gesuchten Grenzwert  $\xi$ .

Diese Situation liegt zum Beispiel vor beim Newtonschen Verfahren (s.u.) zur numerischen Berechnung von Nullstellen von Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Rekursionsformel hat hier folgende Gestalt:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k \geq 0).$$

## Unendliche Reihen

Den Begriff der Reihe können wir unter demselben Aspekt betrachten. Ist  $a_k$  eine beliebige Folge in einer Grundstruktur  $\mathbb{X}$ , so kann man versuchen, der "unendlichen Summe"

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (4)$$

einen Sinn zu erteilen. Hierzu betrachtet man die Folge  $s_n$  der endlichen **Partialsommen**

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Die Folge  $s_n$  ist eine Folge der in (3) betrachteten Art: Offensichtlich gilt

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad (n \geq 0),$$

es ist also  $\Delta s_n = a_{n+1}$ .

Man nennt (4) eine (**unendliche**) **Reihe**. Die Reihe ist **konvergent**, wenn die Folge  $s_n$  der Partialsommen einen endlichen Grenzwert besitzt. Der Ausdruck (4) bezeichnet dann auch diesen Grenzwert oder eben die **Summe** der Reihe.

② Es sei  $q \in \mathbb{C}$  fest,  $|q| < 1$ . Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

(**geometrische Reihe**).

□ Aus

$$s_n(1-q) = (1+q+q^2+\dots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$$

(alles andere hebt sich heraus) folgt

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

und somit wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$  die Behauptung. □

Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ist divergent, obwohl die Summanden mit  $k \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergieren. Es gilt nämlich

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Wegen  $s_{2^0} = s_1 = 1$  folgt hieraus

$$s_{2^r} \geq 1 + \frac{r}{2}$$

und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ .

Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist hingegen konvergent und besitzt die Summe  $\log 2$  (s.u.). ○

Ist  $c$  eine Folge von positiven Zahlen, die monoton fallend gegen 0 konvergiert, so heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$$

eine **alternierende Reihe**. Hierüber gilt der folgende Satz:

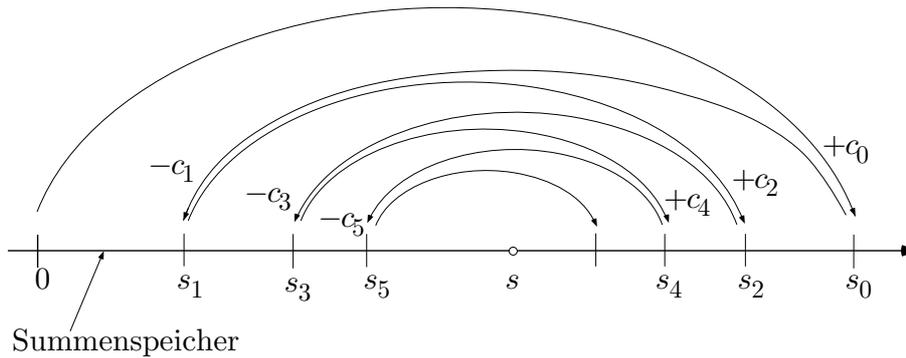


Fig. 2.4.2

**(2.11)** *Alternierende Reihen sind konvergent. Ist  $s$  die Summe einer derartigen Reihe, so gilt für jedes  $n$  eine Fehlerabschätzung der Form*

$$s - s_n = (-1)^{n+1} \Theta c_{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1. \quad (5)$$

*In Worten: Der Abbrechfehler ist ein echter Bruchteil des ersten vernachlässigten Gliedes.*

□ Da die  $c_k$  monoton abnehmen, bilden die “ungeraden” Partialsummen eine monoton wachsende und die “geraden” Partialsummen eine monoton fallende Folge (Fig. 2.4.2). Diese zwei Folgen sind nach Satz (1.1) konvergent, und wegen  $c_k \rightarrow 0$  müssen die beiden Grenzwerte übereinstimmen. Die Abschätzung (5) entnimmt man ebenfalls der Fig. 2.4.2. ┘

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert nur, weil sich die positiven und die negativen Glieder ungefähr die Waage halten. Um damit  $\log 2$  auf drei Stellen genau zu berechnen, müßte man 2000 Glieder berücksichtigen:

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0.692897, \quad \log 2 = 0.693147.$$

## Absolut konvergente Reihen

In der “praktischen Analysis” ist die Konvergenz einer Reihe (4) erst dann brauchbar, wenn die  $a_k$  betragsmäßig so rasch abnehmen, daß die zu (4) gehörige Betragsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

konvergiert. (Der Summenwert der Betragsreihe interessiert an sich nicht; es geht nur darum, daß er endlich ist.) Die Ausgangsreihe heißt in diesem Fall

**absolut konvergent.** Absolut konvergente Reihen sind tatsächlich konvergent (ohne Beweis) und dürfen mehr oder weniger wie endliche Summen behandelt werden. Insbesondere darf man zwei derartige Reihen distributiv miteinander multiplizieren und die entstehenden “ $\infty^2$ ” Glieder (allenfalls zu “Paketen” zusammengefaßt) in irgendeiner Reihenfolge aufsummieren. Das heißt: Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{(i,k) \in \mathbb{N}^2} a_i b_k .$$

Wir geben nun zwei Kriterien für absolute Konvergenz:

(2.12) Gibt es ein  $C > 0$ , ein  $q < 1$  und ein  $k_0$  mit

$$|a_k| \leq C q^k \quad \forall k > k_0 , \quad (6)$$

so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

□ Nach allfälliger Vergrößerung von  $C$  dürfen wir annehmen, daß (6) für alle  $k$  gilt. Die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$$

der zu  $\sum a_k$  gehörigen Betragsreihe bilden eine monoton wachsende und wegen

$$s_n \leq \sum_{k=0}^n C q^k \leq \frac{C}{1-q}$$

beschränkte Folge. ┘

③ Betrachte für ein festes  $\phi \in \mathbb{R}$  die Reihe

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{2^k} . \quad (7)$$

Diese Reihe ist wegen

$$\left| \frac{\cos(k\phi)}{2^k} \right| \leq \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

absolut konvergent. Ihre Summe läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{2^k} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{e^{i\phi}}{2} \right)^k = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - e^{i\phi}/2} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - e^{-i\phi}/2}{(1 - e^{i\phi}/2)(1 - e^{-i\phi}/2)} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cos \phi}{1 - \cos \phi + \frac{1}{4}} = \frac{4 - 2 \cos \phi}{5 - 4 \cos \phi} . \end{aligned}$$

Sehen wir nachträglich  $\phi$  als variabel an, so können wir dieses Ergebnis folgendermaßen interpretieren: Die Reihe (7) stellt die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$f(\phi) := \frac{4 - 2 \cos \phi}{5 - 4 \cos \phi}$$

(Fig. 2.4.3) als Summe von reinen Cosinus-Schwingungen ganzzahliger Kreisfrequenzen  $k$  dar. (7) ist die sogenannte *Fourier-Reihe* von  $f$ .  $\circ$

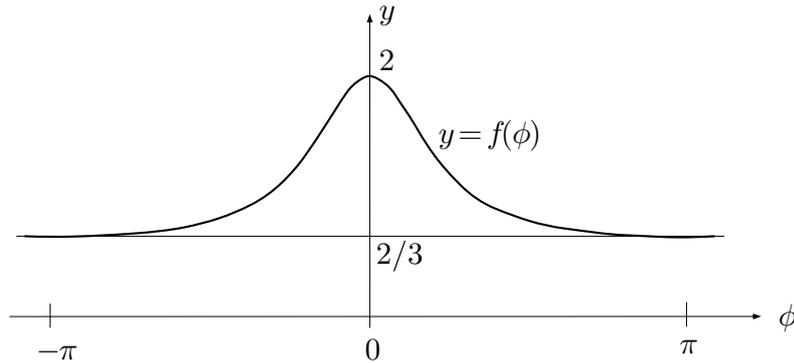


Fig. 2.4.3

Die von Satz (2.12) erfaßten Reihen konvergieren so gut wie die geometrische Reihe, also “linear”. Das heißt konkret: Mit jedem zusätzlich berücksichtigten Term wird der Abbrechfehler, er ist von der Größenordnung

$$\frac{C}{1-q} q^{n+1},$$

um denselben Faktor  $q$  verkleinert. Bei den Reihen, die nach dem folgenden Satz konvergieren, ist die Konvergenz viel langsamer.

(2.13) *Gibt es ein  $C > 0$ , ein  $\delta > 0$  und ein  $k_0$  mit*

$$|a_k| \leq C \frac{1}{k^{1+\delta}} \quad \forall k > k_0,$$

*so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.*

□ Es genügt offenbar zu zeigen, daß die Reihe  $\sum 1/k^{1+\delta}$  konvergiert, und hierfür wiederum genügt es, daß die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

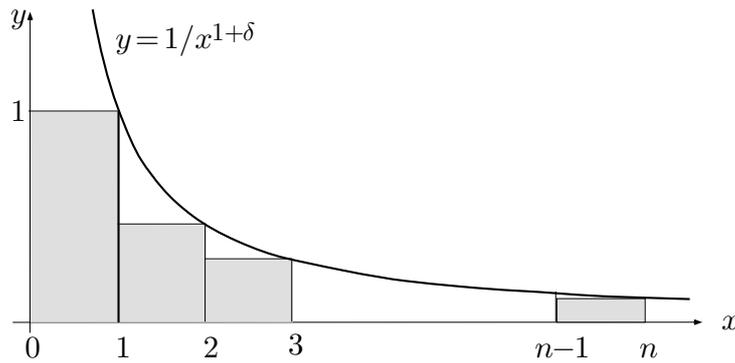


Fig. 2.4.4

beschränkt sind. Wie man der Figur 2.4.4 entnimmt, gilt für alle  $n$ :

$$s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^{1+\delta}} dx = 1 + \frac{1}{-\delta} (n^{-\delta} - 1) < 1 + \frac{1}{\delta}. \quad \square$$

Die im Beweis von Satz (2.13) verwendeten Vergleichsreihen konstituieren die sogenannte **Zetafunktion**

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (s > 1),$$

die in der Zahlentheorie eine große Rolle spielt. Wie Euler als erster bewiesen hat, ist

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

④ Wir betrachten für ein festes  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}[$  die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tan \frac{\phi}{k}.$$

Der Figur 2.4.5 entnimmt man die Abschätzung

$$\tan \frac{\phi}{k} \leq \frac{1}{k} \tan \phi;$$

somit ist

$$\left| \frac{1}{k} \tan \frac{\phi}{k} \right| \leq \tan \phi \cdot \frac{1}{k^2},$$

und die betrachtete Reihe ist konvergent. ○

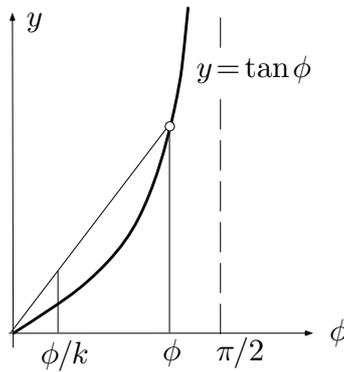


Fig. 2.4.5

## Funktionenreihen

Soviel zu den Reihen mit konstanten Gliedern. Viel interessanter sind natürlich Reihen von Funktionen, denn damit haben wir zum ersten Mal ein Mittel in der Hand, das uns aus dem Bereich der Polynome und der **rationalen Funktionen**

$$f(t) := \frac{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0}{b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_0}, \quad b_m \neq 0,$$

herausführt und neue interessante Funktionen erschließt.

Ist  $f$  eine Folge von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich  $A$ :

$$f_k: A \rightarrow \mathbb{X}, \quad x \mapsto f_k(x) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

so wird durch

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tag{8}$$

eine Funktion  $s(\cdot)$  definiert. Definitionsbereich von  $s(\cdot)$  ist im allgemeinen nicht die ganze Menge  $A$ , sondern nur die Menge derjenigen  $x \in A$ , für die die Reihe (8) konvergiert, also der **Konvergenzbereich** der Reihe.

⑤ Mit  $f_k(x) := \frac{x^k}{k!}$  erhält man die **Exponentialreihe**

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Legt man zum Beispiel  $\text{dom}(f_k) = \mathbb{R}$  zugrunde, so ist auch  $\text{dom}(\exp) = \mathbb{R}$  (dies wird weiter unten gezeigt).

Mit  $f_k(x) := x^k$  erhält man die geometrische Reihe

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k . \quad (8)$$

Hier ist  $\text{dom}(f_k) = \mathbb{R}$ , aber  $\text{dom}(s) = ]-1, 1[$ . Es ist allerdings wahr, daß  $s$  eine natürliche Fortsetzung  $\tilde{s}$  auf ganz  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  besitzt, nämlich die Funktion

$$\tilde{s}(x) := \frac{1}{1-x} .$$

Wer nur die Konvergenz verstanden hat, aber nicht dividieren kann, hat schon mit (8) eine hochinteressante neue Funktion produziert.

Die Reihe

$$\vartheta(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi x}$$

konvergiert im Intervall  $\mathbb{R}_{>0}$ . ○

## Potenzreihen

Von den Funktionenreihen sind die Potenzreihen am verbreitetsten und am leichtesten zu handhaben, theoretisch und rechnerisch. Das folgende Prinzip stammt von Newton: *“Jede vernünftige Funktion  $f$  läßt sich an jeder Stelle im Inneren ihres Definitionsbereichs in eine Potenzreihe entwickeln oder als Potenzreihe ansetzen.”* Die Theorie der Potenzreihen wird am besten verständlich, wenn man sie im Komplexen betrachtet, siehe dazu das Beispiel 2.1.③. Wir werden also wahlweise die reelle Variable  $x$  oder die komplexe Variable  $z$  benutzen.

Es sei  $a$ . eine ganz beliebige Folge von reellen oder komplexen Zahlen. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (9)$$

eine **Potenzreihe** (an der Stelle 0), und die  $a_k$  sind die **Koeffizienten** dieser Reihe. Allgemein ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

eine **Potenzreihe an der Stelle  $x_0$** . Der Konvergenzbereich hängt ab von den Koeffizienten  $a_k$ : Streben zum Beispiel die Beträge  $|a_k|$  mit  $k \rightarrow \infty$  schnell gegen 0, so darf  $|z|$  ziemlich groß sein, und die Reihe (9) konvergiert immer noch. Wenn die Beträge  $|a_k|$  im Gegenteil mit  $k \rightarrow \infty$  “exponentiell” anwachsen, so wird die Reihe nur für sehr kleine  $|z|$  konvergieren. Im einzelnen gilt der folgende Satz:

**(2.14)** Für jede Potenzreihe (9) gibt es eine wohlbestimmte Zahl  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq \infty$ , so daß die Reihe für  $|z| < \rho$  absolut konvergiert und für  $|z| > \rho$  divergiert. Es gilt

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad (\leq \infty),$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Der Konvergenzbereich ist also im wesentlichen die Kreisscheibe

$$D_\rho := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \};$$

die Zahl  $\rho$  heißt daher **Konvergenzradius** der Reihe. Über das Konvergenzverhalten auf dem Randkreis  $\partial D_\rho$  sagt der Satz nichts. Dies ist, wenn nötig, im Einzelfall abzuklären.

□ Wir betrachten nur den im Zusatz erwähnten Fall, wo sich die Koeffizienten besonders anständig verhalten. Es sei also

$$0 < |z| < \rho := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Dann ist  $|z| = q^2 \rho < q\rho < \rho$  für ein  $q < 1$  (Fig. 2.4.6). Nach Definition des Grenzwertes gibt es daher ein  $k_0$  mit

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| > q\rho \quad \forall k > k_0;$$

somit gilt für diese  $k$  die Beziehung

$$\frac{|a_k z^k|}{|a_{k+1} z^{k+1}|} > \frac{q\rho}{|z|} = \frac{1}{q},$$

und das heißt

$$|a_{k+1} z^{k+1}| < q \cdot |a_k z^k| \quad (k > k_0).$$

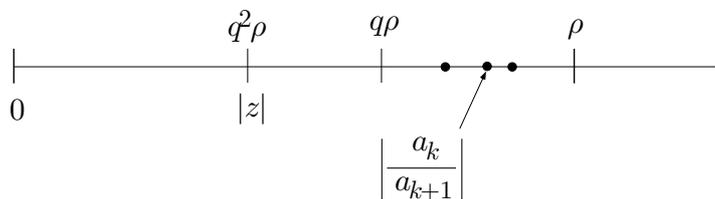


Fig. 2.4.6

Von der Nummer  $k_0$  an werden also die Glieder unserer Potenzreihe von einem zum nächsten betragsmäßig um wenigstens den Faktor  $q < 1$  verkleinert. Hieraus folgt mit vollständiger Induktion: Es gilt

$$|a_k z^k| \leq C q^k \quad (k > k_0)$$

für eine geeignete Konstante  $C$ . Nach (2.12) ist somit die Reihe (9) für das betrachtete  $z$  absolut konvergent. — Ähnlich zeigt man, daß die Reihe (9) für ein  $z$  mit  $|z| > \rho$  divergiert, da die  $|a_k z^k|$  in diesem Fall sogar nach  $\infty$  streben. ┘

⑤ (Forts.) Die Exponentialreihe

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

besitzt die Koeffizienten  $a_k := 1/k!$ , und es folgt

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Der Konvergenzradius ist also  $\infty$ , und das heißt: Die Exponentialreihe ist für jedes  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergent.

Bei der geometrischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  haben wir  $a_k = 1$  für alle  $k$ ; somit ist

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1,$$

wie erwartet. Aber auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots$$

besitzt den Konvergenzradius 1 (obwohl die  $a_k$  gegen  $\infty$  streben):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{k})^2} = 1.$$

Bei der Reihe

$$1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + \dots \quad (10)$$

sind alle  $a_k = 0$  ( $k$  ungerade); der nützliche Grenzwert existiert also nicht. Es liegt nahe,  $x^2 =: u$  zu setzen; die Reihe (10) geht dann über in die Reihe

$$1 + 2u + 4u^2 + 8u^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} b_j u^j$$

mit  $b_j = 2^j$ . Für diese Reihe ist

$$\left| \frac{b_j}{b_{j+1}} \right| = \frac{2^j}{2^{j+1}} = \frac{1}{2} \quad (j \geq 0),$$

sie konvergiert daher im Bereich  $|u| < \frac{1}{2}$ . Der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe (10) ist somit  $1/\sqrt{2}$ .  $\circ$

Die folgenden Tatsachen sind für das Arbeiten mit Potenzreihen fundamental und seien hier ohne Beweis angeführt:

**(2.15)** (a) *Jede Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzbereichs eine stetige, ja sogar beliebig oft differenzierbare Funktion dar.*

(b) *Im Innern des Konvergenzbereichs darf man eine Potenzreihe gliedweise (das heißt: wie ein Polynom) differenzieren und integrieren.*

(c) *Zwei konvergente Potenzreihen darf man “distributiv” miteinander multiplizieren, wobei nach Zusammenfassung gleichartiger Terme die Potenzreihe der Produktfunktion entsteht.*

## Rechnen mit Anfangsstücken von Potenzreihen

Es gibt auch eine Art, mit Anfangsstücken (= Partialsummen) von konvergenten Potenzreihen zu rechnen wie mit endlichen Dezimalbrüchen. Damit man weiß, welche Koeffizienten im Endergebnis noch als sicher gelten können, empfiehlt es sich, den mit einer bestimmten Zahl von “signifikanten Stellen” angeschriebenen Ausgangsreihen einen koeffizientenlosen, aber geeignet markierten Zusatzterm anzuhängen. Das sieht bei drei “signifikanten Stellen” zum Beispiel so aus:

$$f(x) = 2 - \frac{x}{2} + 3x^2 + ?x^3 ,$$

und allgemein folgendermaßen:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + ?x^r .$$

Dabei vertritt das Fragezeichen letzten Endes eine ganze Potenzreihe, denn in Wirklichkeit ist ja

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \dots \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + (a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \dots) x^r . \end{aligned}$$

Nur von dem Fragezeichen “unverschmutzte” Koeffizienten des Endergebnisses sind sicher. Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Rechnung im einzelnen vor sich geht. — Das Computersystem Mathematica bezeichnet in derartigen Rechnungen den Restterm  $?x^r$  mit  $0[x]^r$ .

⑥ Für  $\cos$  und  $\sin$  hat man die Entwicklungen

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ?x^6, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ?x^7 = x \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + ?x^6 \right)\end{aligned}$$

(wird im nächsten Abschnitt bewiesen). Hieraus folgt

$$\tan x = x \frac{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + ?x^6}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + ?x^6}.$$

Wir führen nun die Division tatsächlich aus und erhalten:

$$\begin{aligned}(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + ?x^6) : (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + ?x^6) &= 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + ?x^6 \\ -1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + ?x^6 & \\ + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 + ?x^6 & \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{72}x^6 & \\ + \frac{2}{15}x^4 + ?x^6 & \\ -\frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{15}x^6 & \\ + ?x^6 &\end{aligned}$$

Die Potenzreihenentwicklung des Tangens an der Stelle 0 besitzt daher folgendes Anfangsstück:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + ?x^7.$$

○

⑦ Gesucht ist die Lösung  $t \mapsto y(t)$  des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = t + y + y^2, \quad y(0) = 1.$$

(Diese Differentialgleichung läßt sich nicht “formelmäßig” lösen!) Wir machen den Ansatz

$$y(t) := 1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + ?t^4 \tag{11}$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann ist

$$\dot{y}(t) = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + ?t^3, \tag{12}$$

so daß wir im weiteren nur noch “auf  $t^2$  genau” rechnen können. Wir benötigen noch

$$\begin{aligned}y^2(t) &= (1 + \alpha t + \beta t^2 + ?t^3)(1 + \alpha t + \beta t^2 + ?t^3) \\ &= 1 + 2\alpha t + (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + ?t^3.\end{aligned} \tag{13}$$

Setzen wir nun (11)–(13) in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + ?t^3 = t + 1 + \alpha t + \beta t^2 + 1 + 2\alpha t + (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + ?t^3 .$$

Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$\alpha = 2, \quad 2\beta = 1 + 3\alpha \quad 3\gamma = \beta + \alpha^2 + 2\beta ,$$

aus denen sich  $\alpha, \beta, \gamma$  nacheinander berechnen zu

$$\alpha = 2, \quad \beta = \frac{7}{2}, \quad \gamma = \frac{29}{6} .$$

Damit können wir die gesuchte Funktion  $y(\cdot)$  in der Form

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{7}{2}t^2 + \frac{29}{6}t^3 + ?t^4 \\ ( =: p(t) + ?t^4 )$$

schreiben. Wir dürfen nun das Polynom  $p(\cdot)$  in der Umgebung von  $t := 0$  als Näherungsfunktion für die “wahre Lösung”  $y(\cdot)$  betrachten, und zwar ist der Fehler für  $t \rightarrow 0$  von der Größenordnung  $C \cdot t^4$  oder, wie man üblicherweise schreibt:

$$|y(t) - p(t)| = O(t^4) \quad (t \rightarrow 0) .$$

○

## Die Binomialreihe

Als weiteres Beispiel zu den Potenzreihen betrachten wir die Binomialreihe und definieren zunächst für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ja sogar  $\alpha \in \mathbb{C}$ ) und  $k \in \mathbb{N}$  den **Binomialkoeffizienten**  $\binom{\alpha}{k}$  durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \quad (k \geq 1) .$$

Ist  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so stimmt das mit der früheren Definition überein, und es ist  $\binom{\alpha}{k} = 0$  für  $k > \alpha$ . Ist  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , so sind alle Binomialkoeffizienten  $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ . Wir notieren noch die Identität

$$\binom{\alpha}{k+1} (k+1) = \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) . \quad (14)$$

Wir wählen nun ein festes  $\alpha$  und bilden mit Hilfe der  $\binom{\alpha}{k}$  die **Binomialreihe**

$$b_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots .$$

Ist  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so ist  $b_\alpha$  in Wirklichkeit ein Polynom, und es gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$\forall x \in \mathbb{R} : b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha .$$

Im weiteren sei daher  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ; dann sind alle  $a_k := \binom{\alpha}{k} \neq 0$ , und wir erhalten mit (14):

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \left| \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = \left| \frac{1+1/k}{\alpha/k-1} \right| \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) .$$

Die Binomialreihe besitzt somit den Konvergenzradius 1. Wir zeigen nun:

**(2.16)** *Im Intervall  $-1 < x < 1$  gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha .$$

□ Die Behauptung legt nahe, die Hilfsfunktion

$$f(x) := b_\alpha(x) (1+x)^{-\alpha}$$

einzuführen. Wir müssen zeigen, daß  $f(x) \equiv 1$  ist. Zunächst ist  $f(0) = 1$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= b'_\alpha(x) (1+x)^{-\alpha} + b_\alpha(x) (-\alpha) (1+x)^{-\alpha-1} \\ &= (1+x)^{-\alpha-1} ((1+x)b'_\alpha(x) - \alpha b_\alpha(x)) . \end{aligned}$$

Im Inneren des Konvergenzintervalls dürfen wir die Binomialreihe gliedweise differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} b'_\alpha(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1} = \sum_{k'=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k'+1} (k'+1) x^{k'} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) x^k , \end{aligned}$$

wobei wir (14) benutzt und am Schluß wieder  $k$  anstelle von  $k'$  geschrieben haben. Die beiden Darstellungen von  $b'_\alpha(x)$  werden nun verwendet für die Berechnung von

$$(1+x)b'_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha b_\alpha(x) .$$

Somit ist  $f'(x) \equiv 0$ . Es folgt  $f(x) \equiv 1$  und damit die Behauptung. □

⑧ Wir betrachten den Wert  $\alpha := -\frac{1}{2}$  und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= (1+(-t))^{-1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} (-t)^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^3 + \dots \quad (-1 < t < 1). \end{aligned}$$

Wir machen zur Übung noch die Probe: Aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + ?t^3$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} &= (1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + ?t^3)(1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + ?t^3) \\ &= 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})t + (\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8})t^2 + ?t^3 \\ &= 1 + t + t^2 + ?t^3, \end{aligned}$$

wie erwartet. ○

## Aufgaben

1. Für gegebene reelle Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  wird die Folge  $x_n$  rekursiv definiert durch

$$x_0 := \alpha, \quad x_1 := \beta, \quad x_n := \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}} \quad (n \geq 2).$$

- Bestimme die Häufungspunkte dieser Folge. (*Hinweis:* Mit speziellen Werten von  $\alpha$  und  $\beta$  experimentieren, bis eine Gesetzmäßigkeit zum Vorschein kommt.)
- Bestimme die Menge derjenigen Paare  $(\alpha, \beta)$ , die als Anfangsdaten ausgeschlossen werden müssen. Figur!

2. (a) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\cosh(k\alpha)} \quad (=: f(x)),$$

dabei ist  $\alpha > 0$  eine vorgegebene Zahl und  $\cosh t := (e^t + e^{-t})/2$ .

- (b) Zeige: Die Funktion  $f$  genügt der Funktionalgleichung

$$f(e^\alpha x) + f(e^{-\alpha} x) \equiv \frac{2}{1-x}.$$

3. (M) Der Umfang  $U$  einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  ist gegeben durch

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt, \quad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Um einen für kleine Exzentrizität  $\varepsilon$  brauchbaren Näherungswert für  $U$  zu erhalten, kann man  $U$  nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickeln:

$$U = c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^3 + c_4 \varepsilon^4 + \dots$$

Bestimme die Koeffizienten  $c_0$  bis und mit  $c_4$ . Dabei kommen die folgenden Formeln zu Hilfe:

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + ?u^3, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.$$

4. Es bezeichne  $a_n$  die Anzahl Arten,  $n$  Leute im Verhältnis 1:2 in zwei Gruppen einzuteilen. Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + 3z^3 + \dots$$

5. Mit Hilfe der **Fibonacci-Folge**

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad a_k := a_{k-1} + a_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

wird folgende Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + \dots \quad (*)$$

Hierüber ist nacheinander folgendes zu beweisen:

- (a) Die Reihe (\*) konvergiert mindestens für  $|z| < 1/2$  und stellt dort eine Funktion  $f(z)$  dar.
- (b) Es ist  $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$ . (Hinweis: Zeige  $(1-z-z^2)f(z) \equiv z$ .)
- (c) Die Funktion  $f$  besitzt eine Zerlegung der Form

$$f(z) = \frac{A}{1-\lambda z} + \frac{B}{1-\mu z}$$

und läßt sich daher als Summe von zwei geometrischen Reihen schreiben. Dies liefert eine zweite Darstellung von  $f$  als Potenzreihe und damit einen geschlossenen Ausdruck für die  $k$ -te Fibonacci-Zahl  $a_k$ .

6. (a) (M) Die Funktion  $f$  sei in einer Umgebung von  $x = 0$  definiert und genüge der Funktionalgleichung

$$f(f(x)) \equiv \frac{x}{1-x};$$

endlich sei  $f(0) = 0$ . Bestimme die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  in der Entwicklung

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + ?x^4.$$

- (b) In Wirklichkeit ist  $f$  eine Funktion der einfachen Form  $x \mapsto \frac{x}{cx+d}$ . Bestimme  $c$  und  $d$ .

7. Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0} := (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots)$  entsteht mit Hilfe der Rekursionsformel  $a_n := a_{n-1} + 2a_{n-2}$ . Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . (Hinweis: Die Quotienten  $a_n/a_{n+1}$  besitzen einen Grenzwert  $\rho$ . Dies ist nicht zu beweisen; es genügt,  $\rho$  zu bestimmen.)
8. Stelle ein Rekursionsschema auf, das reelle Zahlen  $x$  als Input akzeptiert und eine gegen  $2^x$  konvergente Folge produziert. Dabei dürfen nur die vier Grundrechenarten, also weder Logarithmen noch Fakultäten, benützt werden. Schreibe ein Computerprogramm, das den vorgeschlagenen Algorithmus realisiert.

Hinweis: 
$$2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

9. Durch die Rekursionsvorschrift

$$z_0 := 1, \quad z_{n+1} := \frac{1}{2}z_n + \frac{i}{z_n} \quad (n \geq 0)$$

wird eine Folge von komplexen Zahlen  $z_n = x_n + iy_n$  definiert.

- (a) Berechne  $z_0, z_1, z_2$ .
- (b) Zeige mit vollständiger Induktion: Für alle  $n \geq 0$  gilt  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ .
- (c) Die  $z_n$  konvergieren mit  $n \rightarrow \infty$  gegen eine gewisse komplexe Zahl  $\zeta$  (ist nicht zu beweisen). Berechne  $\zeta$ .

## 2.5 Die Exponentialfunktion

### Die Funktionalgleichung

Die Exponentialfunktion

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  definiert. Den meisten Eigenschaften dieser Funktion liegt das folgende "Additionstheorem" zugrunde:

(2.17) Für beliebige  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w .$$

┌ Wir multiplizieren die beiden absolut konvergenten Reihen

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \exp w := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

miteinander und erhalten

$$\exp z \cdot \exp w = \sum_{j, k} \frac{1}{j! k!} z^j w^k .$$

Fassen wir in der Doppelsumme für jedes  $r \geq 0$  die Glieder mit  $k + j = r$  zu einem Paket zusammen und summieren anschließend über  $r$ , so ergibt sich:

$$\dots = \sum_{r=0}^{\infty} \left( \sum_{k+j=r} \frac{1}{j! k!} z^j w^k \right)$$

und nach Erweiterung mit  $r!$ :

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( \sum_{k=0}^r \frac{r!}{(r-k)! k!} z^{r-k} w^k \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (z + w)^r = \exp(z + w) , \end{aligned}$$

wie behauptet. ┐

Setzt man zur Abkürzung

$$\exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots =: e \quad (\doteq 2.718),$$

so folgt aus **(2.17)** für jedes  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\exp n = \exp(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n) = (\exp 1)^n = e^n,$$

und durch ähnliche Überlegungen ergibt sich weiter:

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \quad \exp \frac{p}{q} = \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q},$$

was den Namen “Exponentialfunktion” hinreichend begründet. Es liegt nunmehr nahe, für beliebige  $z \in \mathbb{C}$  zu definieren:

$$e^z := \exp z.$$

Wir verwenden in freier Weise abwechselnd beide Schreibweisen, je nach typographischer Zweckmässigkeit.

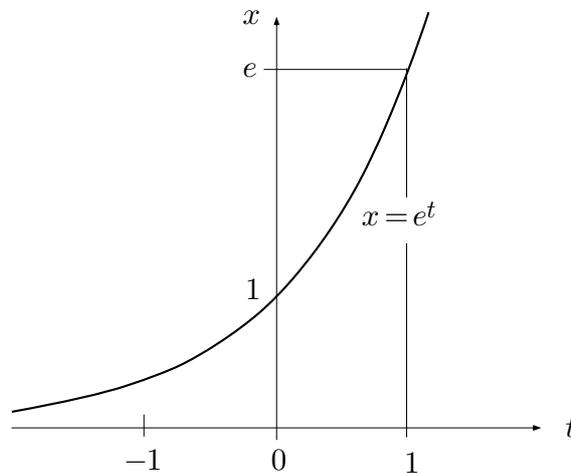


Fig. 2.5.1

Betrachten wir die Exponentialfunktion vorerst für reelle  $t$ , so können wir notieren (Fig. 2.5.1):

**(2.18)** (a) Die Exponentialfunktion ist auf  $\mathbb{R}$  positiv und streng monoton wachsend.

(b) Für jedes feste  $q \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t^q} = \infty; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

Die Exponentialfunktion wächst also mit  $t \rightarrow \infty$  schneller als jede feste Potenz von  $t$ .

□ (a) Wegen  $e^t \cdot (e^{-t/2})^2 \equiv 1$  gilt  $e^t > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Für positives  $h$  ist  $e^h = 1 + h + \dots > 1$  und somit

$$e^{t+h} - e^t = (e^h - 1)e^t > 0.$$

(b) Für jedes einzelne  $q \in \mathbb{N}$  gilt

$$e^t > \frac{t^{q+1}}{(q+1)!} \quad (t > 0),$$

und hieraus folgt

$$\frac{e^t}{t^q} > \frac{t}{(q+1)!} \quad (t > 0).$$

Der betrachtete Quotient strebt daher mit  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ . ┘

## Die Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion bildet hiernach die reelle Achse bijektiv auf die positive reelle Achse  $\mathbb{R}_{>0}$  ab, und es existiert die Umkehrfunktion

$$(\exp)^{-1} =: \log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R},$$

genannt **natürlicher Logarithmus** (Fig. 2.5.2). Damit gelten automatisch die Identitäten

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \log(e^t) = t, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0} : \quad e^{\log x} = x \quad (1)$$

(siehe Beispiel 2.2.⑥); ferner hat man die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty.$$

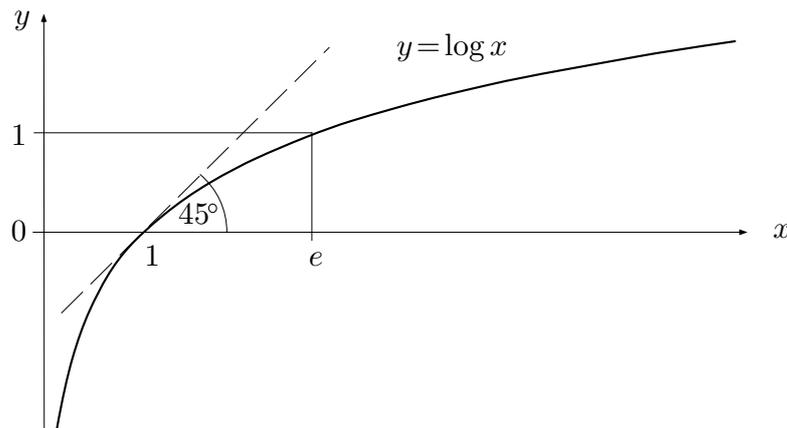


Fig. 2.5.2

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz (2.17)) folgt diejenige des Logarithmus:

$$(2.18) \quad \log(u \cdot v) = \log u + \log v \quad (u, v \in \mathbb{R}_{>0}),$$

die bekanntlich dem Funktionieren des Rechenschiebers und der seinerzeitigen Bedeutung der (Zehner-)Logarithmen fürs numerische Rechnen zugrundeliegt: Sie verwandelt die Multiplikation in die (numerisch einfachere) Addition.

□ Mithilfe von (1) ergibt sich nacheinander

$$\log(u \cdot v) = \log(e^{\log u} \cdot e^{\log v}) = \log(e^{\log u + \log v}) = \log u + \log v. \quad \square$$

Betrachte ein festes  $a > 0$ . Ähnlich wie vorher  $\exp(p/q) = e^{p/q}$  beweist man nun mithilfe von (2.18):

$$\log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \log a \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*),$$

und mit (1) folgt:

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \quad a^{p/q} = e^{\frac{p}{q} \log a}.$$

Dies legt nahe, für beliebiges reelles  $x$  die **allgemeine Potenz**  $a^x$  folgendermaßen zu definieren:

$$a^x := e^{x \log a} \quad (a > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Es gelten dann die üblichen Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\log(a^x) &= x \log a, \\ a^{x+y} &= a^x \cdot a^y, \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \\ (a^x)^y &= a^{xy}.\end{aligned}$$

Während die Exponentialfunktion in ihrem Wachstumsverhalten stärker ist als jede noch so hohe Potenz  $t \mapsto t^q$ , ist die Logarithmusfunktion schwächer als jede noch so kleine Potenz  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ):

(2.19) Für jedes feste  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \log x) = 0.$$

□ Man hat nacheinander

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{e^{\alpha \log x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0;$$

ähnlich schließt man bei der zweiten Behauptung. □

## Zwei Standardgrenzwerte

Für spätere Zwecke und zur allgemeinen Bildung berechnen wir noch zwei Grenzwerte:

$$(2.20)(a) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$$

insbesondere gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

□ (a) Aus

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ergibt sich für beliebiges  $z \neq 0$ :

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots =: g(z).$$

Hier ist  $g$  eine (für alle  $z$  konvergente) Potenzreihe, mithin eine stetige Funktion, und es folgt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0) = 1 .$$

(b) Wir betrachten den Logarithmus des zu untersuchenden Ausdrucks und haben

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{x/n} .$$

Mit  $\frac{x}{n} =: h_n$  ergibt sich daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + h_n) - \log 1}{h_n} = x \log'(1) = x ,$$

wobei wir zuletzt von der Ableitung der Logarithmusfunktion Gebrauch gemacht haben.  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  strebt daher gegen  $e^x$ , wie behauptet.  $\square$

## Hyperbolische Funktionen

In den Anwendungen treten oft gewisse ‘symmetrische’ Kombinationen von  $e^x$  und  $e^{-x}$  auf, die sogenannten **hyperbolischen Funktionen**. Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung: Eine Funktion  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$  heißt **gerade**, wenn gilt:

$$\forall x \in \text{dom}(f) : \quad f(-x) = f(x) ,$$

und **ungerade**, wenn gilt:

$$\forall x \in \text{dom}(f) : \quad f(-x) = -f(x) ;$$

dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß  $\text{dom}(f)$  bezüglich 0 symmetrisch ist. Die Potenzfunktionen  $z \mapsto z^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sind gerade für gerades  $k$  und ungerade für ungerades  $k$ . Die Potenzreihenentwicklung einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion im Ursprung enthält nur Terme mit geraden (bzw. ungeraden) Exponenten.

Jede Funktion mit einem bezüglich 0 symmetrischen Definitionsbereich läßt sich in einen geraden und einen ungeraden ‘Anteil’ zerlegen:

$$f(x) \equiv \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerade}} .$$

Führen wir diese Zerlegung für die Exponentialfunktion durch (Fig. 2.5.3), so erhalten wir als geraden Anteil den **hyperbolischen Cosinus**

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

und als ungeraden Anteil den **hyperbolischen Sinus**

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Diese Funktionen sind übers Komplexe mit den entsprechenden trigonometrischen Funktionen verwandt und besitzen formal analoge Additionstheoreme usw. wie jene. Mit Hilfe des "Additionstheorems"  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$  beweist man leicht

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &\equiv 1 \quad (\text{hyperbolischer Pythagoras}), \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \end{aligned}$$

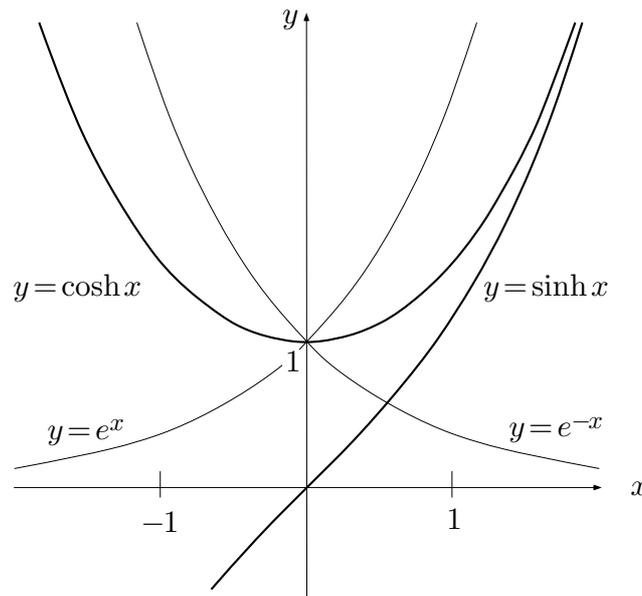


Fig. 2.5.3

Als Differenz einer streng monoton wachsenden und einer streng monoton fallenden Funktion ist  $\sinh$  streng monoton wachsend; ferner gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty.$$

Folglich existiert die Umkehrfunktion, genannt **Areasinus**:

$$(\sinh)^{-1} =: \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} .$$

Überraschenderweise läßt sich  $\operatorname{arsinh}$  durch “schon bekannte” Funktionen ausdrücken. Aus  $y = \sinh x$  folgt nämlich nacheinander

$$2y = e^x - e^{-x} , \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 , \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} .$$

Da jedenfalls  $e^x > 0$  ist, muß hier das obere Zeichen zutreffen, und wir erhalten  $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ ; das heißt, es gilt

$$\operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad (y \in \mathbb{R}) .$$

Auf dem Intervall  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  wächst

$$x \mapsto \cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$$

(als Zusammensetzung von wachsenden Funktionen) streng monoton von 1 bis  $\infty$  und besitzt somit daselbst eine Umkehrfunktion **Areacosinus**:

$$(\cosh)^{-1} =: \operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} ,$$

die sich ebenfalls durch Logarithmen ausdrücken läßt. Man erhält

$$\operatorname{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad (y \geq 1) .$$

Wir definieren schließlich noch den **hyperbolischen Tangens** (Fig. 2.5.4) durch

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .$$

Aus

$$\tanh x = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

folgt: Der Graph des hyperbolischen Tangens nähert sich mit  $x \rightarrow \infty$  “exponentiell” der Asymptote  $y = 1$ . Für die Umkehrfunktion **Areatangens**

$$(\tanh)^{-1} =: \operatorname{artanh} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

erhält man

$$\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \quad (-1 < y < 1) .$$

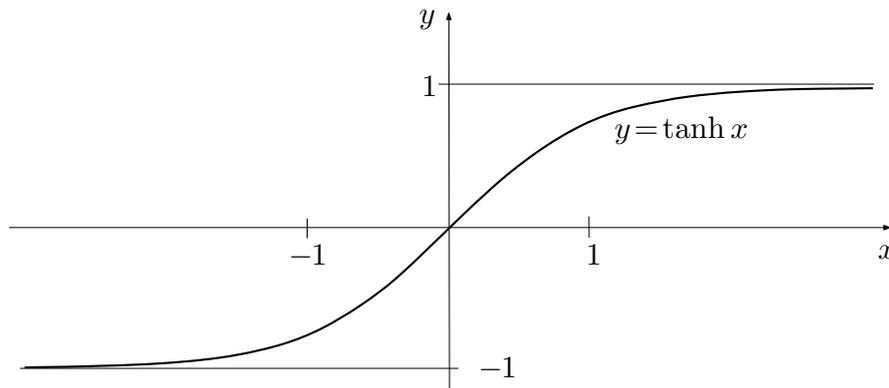


Fig. 2.5.4

Von seinem Charakter her eignet sich der hyperbolische Tangens besonders zur Modellierung von Vorgängen, bei denen eine seit Urzeiten bestehende Situation evolutionär in eine andere dauerhafte Situation übergeht.

### Die cis-Funktion

In Abschnitt 1.7 wurde (vorläufig) als handliche Abkürzung die Schreibweise

$$\cos t + i \sin t =: e^{it}$$

eingeführt. Wir müssen zum Schluß zeigen, daß das mit den jetzigen definitiven Vorstellungen über die Exponentialfunktion konsistent ist; in anderen Worten: Wir müssen die sogenannte **cis-Funktion**

$$\text{cis: } t \mapsto e^{it} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(‘cis’ für ‘cos + i sin’) untersuchen.

Da die Exponentialreihe reelle Koeffizienten besitzt, gilt für beliebige  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\exp \bar{z} = \overline{\exp z} .$$

□ Ist  $a_k = \bar{a}_k$  für alle  $k \geq 0$ , so folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}^k = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} . \quad \square$$

Hieraus ergibt sich für beliebige reelle  $t$ :

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1 ;$$

die Punkte  $e^{it}$  liegen somit auf dem Einheitskreis  $\partial D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  der komplexen Ebene. Es gilt aber noch mehr:

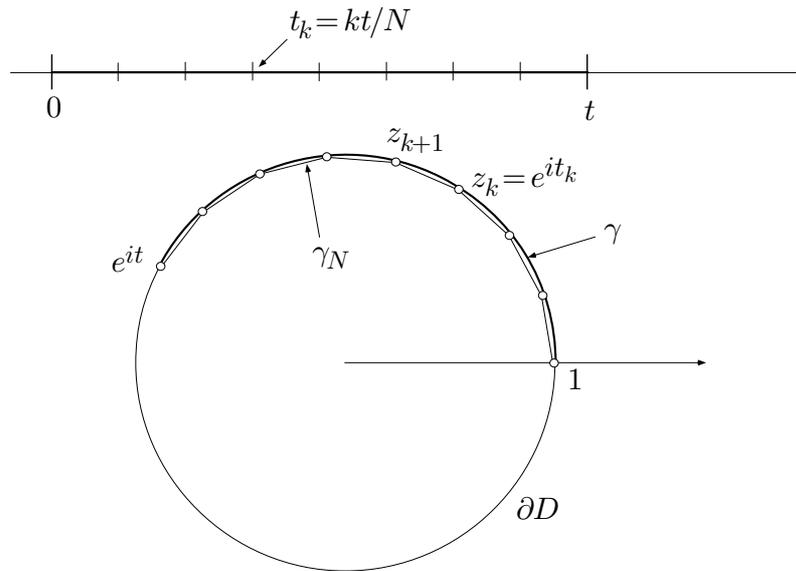


Fig. 2.5.5

**(2.21)** Die Funktion  $\text{cis} : t \mapsto e^{it}$  wickelt die reelle  $t$ -Achse längentreu auf den Einheitskreis  $\partial D$  auf.

□ Wir betrachten für ein beliebiges, aber festes  $t$ ,  $0 < t < 2\pi$ , das Intervall  $[0, t] \subset \mathbb{R}$  und sein Bild  $\gamma \subset \partial D$ . Die Bildmenge  $\gamma$  ist ein bei 1 beginnender Bogen auf  $\partial D$ . Teilen wir das Intervall  $[0, t]$  in  $N$  gleiche Teile (Fig. 2.5.5), so bestimmen die Bilder der Teilungspunkte  $t_k := kt/N$  ( $0 \leq k \leq N$ ) ein Sehnepolygon  $\gamma_N$  mit Eckpunkten

$$z_k := e^{it_k} = e^{ikt/N}.$$

Die Länge einer Teilstrecke ist gegeben durch

$$|z_{k+1} - z_k| = \left| e^{i(k+1)t/N} - e^{ikt/N} \right| = \left| e^{ikt/N} \right| \left| e^{it/N} - 1 \right| = \left| e^{it/N} - 1 \right|,$$

unabhängig von  $k$ , so daß sich die Länge des ganzen Sehnepolygons berechnet zu

$$L(\gamma_N) = N \left| e^{it/N} - 1 \right| = t \left| \frac{e^{it/N} - 1}{it/N} \right|.$$

Hieraus folgt mit **(2.20)**(a) und **(2.7)**:

$$L(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} L(\gamma_N) = t;$$

das heißt: Die von 1 bis  $e^{it}$  längs  $\partial D$  gemessene Bogenlänge beträgt gerade  $t$ , wie behauptet. □

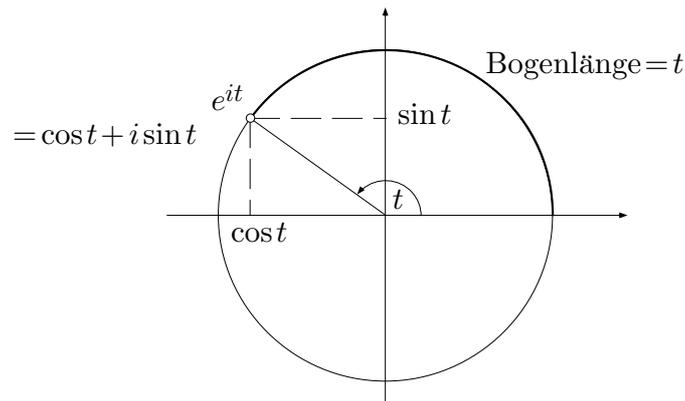


Fig. 2.5.6

Hiernach ist  $e^{it}$  der Punkt auf  $\partial D$  mit dem Argument (Polarwinkel)  $t$ , also der Punkt  $\cos t + i \sin t$  (Fig. 2.5.6), in Übereinstimmung mit unserer früheren Vereinbarung. Wir haben damit einen neuen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen gewonnen. Sie sind mit der Exponentialfunktion (nicht nur formal, sondern tatsächlich) verknüpft durch die **Eulerschen Formeln**

$$\begin{aligned}\cos t &= \operatorname{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \\ \sin t &= \operatorname{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.\end{aligned}$$

Cosinus und Sinus stellen also im wesentlichen den geraden und den ungeraden Anteil der Funktion  $t \mapsto e^{it}$  dar. Aus

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots$$

ergeben sich durch Trennung von Real- und Imaginärteil die folgenden für alle  $t \in \mathbb{R}$  konvergenten Potenzreihen von  $\cos$  und  $\sin$ :

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!}, \\ \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!}.\end{aligned}$$

## Aufgaben

1. Auf einem Taschenrechner stehen nur noch die Tasten  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{=}$ ,  $\boxed{+}$ ,  $\boxed{\frac{1}{x}}$  und  $\boxed{x^2}$  zur Verfügung. Berechne (mit akzeptablem Aufwand) eine brauchbare Approximation für  $e$ .

2. (M) Es sei  $c := \frac{\log 2}{2\pi} + i$ . Dann ist

$$\gamma : t \mapsto z(t) := e^{ct} \quad (-\infty < t < \infty)$$

eine Kurve in der  $z$ -Ebene.

(a) Bestimme die Momentangeschwindigkeit  $\dot{z}(t)$  des laufenden Punktes.

(b) Werden die Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{z}(t)$  im Ursprung angeheftet, so bilden ihre Spitzen eine neue Kurve  $\dot{\gamma}$  (den **Hodographen** von  $\gamma$ ). In welcher geometrischen Relation stehen  $\gamma$  und  $\dot{\gamma}$  zueinander?

(c) Zeichne die beiden Kurven  $\gamma$  und  $\dot{\gamma}$ .

3. Es sei

$$f_0(x) := x, \quad f_{n+1}(x) := e^{f_n(x)} \quad (n \geq 0).$$

Berechne  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x)$ .

4. Fritz macht sich hinter eine volle Literflasche Whisky seines Vaters. Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil  $\lambda$  des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schließlich die Whiskykonzentration in der Flasche auf  $\leq 1/2$  gesunken ist. Wieviel Liter Whisky und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im ganzen getrunken? Berechne die Grenzwerte für  $\lambda \rightarrow 0$ .

5. Produziere eine Funktion  $t \mapsto f(t)$  ( $t > 0$ ), die für  $t \rightarrow \infty$  schneller wächst als jede Potenz  $t^n$ ,  $n \geq 0$ , aber langsamer als irgendwelche Exponentialfunktionen  $e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ .

6. Jemand berechnet  $e^{-10}$  ( $\approx 5 \cdot 10^{-5}$ ) mit Hilfe der Exponentialreihe und berücksichtigt alle Glieder bis und mit  $10^{38}/38!$ . Wieviel signifikante Dezimalstellen erhält sie ungefähr? ( $39! \approx 2 \cdot 10^{46}$ )

7. Vergleiche das Wachstum der drei Funktionen

$$f(t) := t\sqrt{\log t}, \quad g(t) := (\log t)^{\log t}, \quad h(t) := \exp(\sqrt{t}/\log t)$$

für  $t \rightarrow \infty$ . (*Hinweis:* Betrachte die Logarithmen von  $f$ ,  $g$  und  $h$ .)

8. Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \tanh(k\alpha))x^k$ .

9. Produziere eine Funktion  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , für die gilt

$$f(f(t)) \equiv \sqrt{t}.$$

10. (a) Bestimme die sämtlichen komplexen Lösungen der Gleichung

$$\exp \frac{1-i}{z} = 1 .$$

(b) Bestimme die kleinstmögliche Kreisscheibe um  $0 \in \mathbb{C}$ , die alle Lösungen dieser Gleichung enthält. Figur!

11. (M) Wieviel gibt, sinngemäß,  $\cos(i \log 2)$ ?

# 3

## Differentialrechnung

### 3.1 Grundbegriffe, Rechenregeln

#### Die Ableitung, auf neue Art betrachtet

*Anmerkung:* Es ist zu vermuten, daß der Leser schon von der Ableitung gehört hat. Zur Abwechslung und im Hinblick auf die mehrdimensionale Differentialrechnung beginnen wir daher die Sache etwas anders.

Es sei

$$f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}, \quad t \mapsto f(t)$$

eine  $\mathbb{X}$ -wertige (zum Beispiel reellwertige) Funktion einer reellen Variablen  $t$ , die man als “Zeit” interpretieren kann. Wir halten einen “Arbeitspunkt”  $t_0 \in \text{dom}(f)$  bis auf weiteres fest und machen den von  $t_0$  aus gemessenen Zeitzuwachs  $h$  zur neuen unabhängigen Variablen. Der zugehörige von  $f(t_0) =: y_0$  aus gemessene **Wertzuwachs**  $\Delta f$  wird damit zu einer Funktion von  $h$ :

$$\Delta f(h) := f(t_0 + h) - f(t_0) .$$

In anderen Worten: Der Punkt  $(t_0, y_0)$  wird zum Ursprung eines  $(\Delta t, \Delta y)$ -Koordinatensystems gemacht, und der Wertzuwachs  $\Delta f$  wird an der Stelle  $\Delta t := h$  nach oben abgetragen (Fig. 3.1.1). Dieses  $h$  hat man sich betragsmäßig klein vorzustellen. Ist  $t_0$  ein Randpunkt von  $\text{dom}(f)$ , so muß man sich auf  $h \geq 0$  bzw.  $h \leq 0$  beschränken.

Es ist ein fundamentales Faktum der Analysis, daß bei “guten” Funktionen der Wertzuwachs  $\Delta f$  im Limes  $h \rightarrow 0$  *linear* von  $h$  abhängt: Es gibt eine Konstante  $A$ , die **momentane Zuwachsrate** von  $f$  an der Stelle  $t_0$ , mit

$$\Delta f(h) \doteq Ah \quad (h \rightarrow 0) . \tag{1}$$

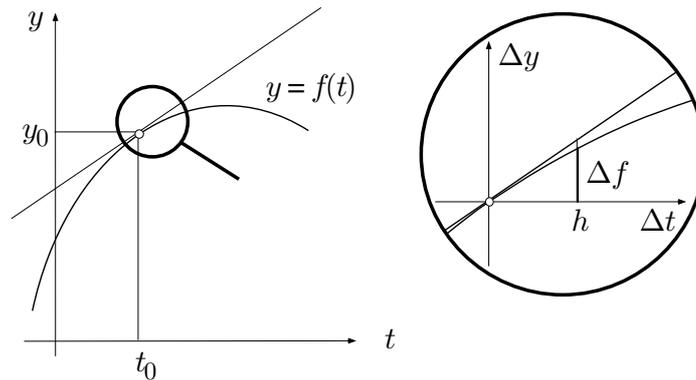


Fig. 3.1.1

Ist  $f$  vektorwertig, also Parameterdarstellung einer Kurve im  $\mathbb{R}^m$ , so ist auch  $\Delta f$  vektorwertig, und  $A$  ist ein Vektor, der als Momentangeschwindigkeit zur Zeit  $t_0$  interpretiert werden kann (s.u.).

Wir müssen der Formel (1) einen präzisen Sinn erteilen. Die Aussage (1) besitzt nur dann einen tatsächlichen Gehalt, wenn der durch das Zeichen ‘ $\doteq$ ’ implizierte Fehler

$$r(h) := \Delta f(h) - Ah$$

für  $h \rightarrow 0$  wesentlich (“um Größenordnungen”) kleiner ist als der rechts in (1) hingeschriebene Term  $Ah$ . Es müßte also

$$\frac{r(h)}{|Ah|} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

gelten, und das ist im Normalfall  $A \neq 0$  äquivalent mit  $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ).

Aufgrund dieser Überlegungen definieren wir definitiv: Die betrachtete Funktion  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{X}$  heißt an der Stelle  $t_0 \in \text{dom}(f)$  **differenzierbar**, wenn es eine Konstante  $A \in \mathbb{X}$  (und eine Funktion  $r(\cdot)$ ) gibt, so daß folgendes gilt:

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = Ah + r(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (2)$$

Die Gleichung links in (2) definiert die Funktion  $r(\cdot)$ , und diese Funktion unterliegt der entscheidenden Bedingung rechts. Diese Bedingung impliziert weiter

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - A = \frac{r(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

so daß wir für die momentane Zuwachsrate  $A$  die folgende Formel erhalten:

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} =: f'(t_0).$$

Der angeschriebene und mit  $f'(t_0)$  bezeichnete Grenzwert des Differenzenquotienten heißt bekanntlich **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $t_0$ . Die **einseitigen Ableitungen**  $f'(t_0+)$  und  $f'(t_0-)$  werden sinngemäß erklärt.

Im Fall einer "Funktion  $y = f(x)$ " ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Sekante durch die Graphenpunkte  $P_0 := (x_0, f(x_0))$  und  $P := (x, f(x))$  (Fig. 3.1.2). Strebt  $x$  gegen  $x_0$ , so wandert  $P$  auf dem Graphen gegen den Punkt  $P_0$ , und die Sekante durch  $P_0$  und  $P$  geht über in die Graphentangente im Punkt  $P_0$ . Die Steigung dieser Tangente ist gleich dem Grenzwert der Sekantensteigungen, also gleich  $f'(x_0)$ .

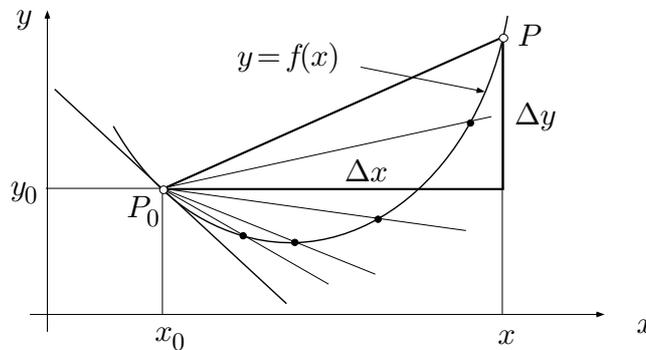


Fig. 3.1.2

① Betrachte die Funktion

$$\text{abs } t := |t| \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ist zunächst  $t_0 \neq 0$ , so besitzen alle hinreichend nahe bei  $t_0$  gelegenen  $t$  dasselbe Vorzeichen wie  $t_0$  (Fig. 3.1.3). Für diese  $t$  gilt daher

$$\text{abs } t = \text{sgn } t \cdot t = \text{sgn } t_0 \cdot t.$$

Damit erhalten wir für den Differenzenquotienten  $m(\cdot)$  die Formel

$$m(t) := \frac{\text{abs } t - \text{abs } t_0}{t - t_0} = \frac{\text{sgn } t_0 \cdot t - \text{sgn } t_0 \cdot t_0}{t - t_0} = \text{sgn } t_0,$$

und es folgt

$$\text{abs}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = \text{sgn } t_0 \quad (t_0 \neq 0).$$

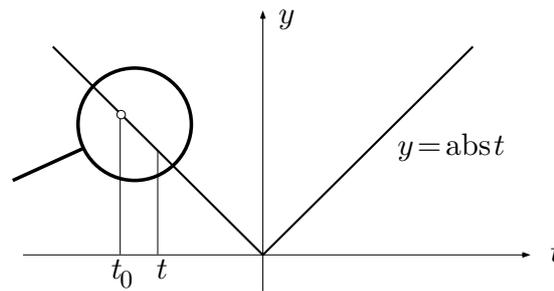


Fig. 3.1.3

Ist jedoch  $t_0 = 0$ , so hat man

$$m(t) = \frac{|t| - |0|}{t - 0} = \operatorname{sgn} t \quad (t \neq 0).$$

Der  $\lim_{t \rightarrow 0} m(t)$  existiert nicht; folglich ist  $\operatorname{abs}$  an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Hingegen existieren dort die einseitigen Ableitungen

$$\operatorname{abs}'(0+) = \operatorname{sgn}(0+) = 1, \quad \operatorname{abs}'(0-) = \operatorname{sgn}(0-) = -1. \quad \bigcirc$$

Die Punkte  $t_0 \in \operatorname{dom}(f)$ , in denen  $f$  differenzierbar ist, bilden den Definitionsbereich der Funktion

$$f' : t \mapsto f'(t),$$

genannt **Ableitung** von  $f$ . Die Ableitung  $f'$  gibt für jeden "Zeit"punkt  $t \in \operatorname{dom}(f')$  die momentane Zuwachsrate der Ausgangsfunktion  $f$  an. Anstelle von  $f'$  sind auch Bezeichnungen wie  $\dot{f}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ ,  $Df$  und andere in Gebrauch.

Bsp:  $\operatorname{abs}' = \operatorname{sgn} \upharpoonright_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ .

② Für die Exponentialfunktion hat man

$$m(t) := \frac{e^t - e^{t_0}}{t - t_0} = e^{t_0} \frac{e^{t-t_0} - 1}{t - t_0}$$

und somit nach (2.20)(a):

$$\exp'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = e^{t_0}.$$

Da dies für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$  zutrifft, gilt

$$\exp' = \exp \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} e^t = e^t, \quad (3)$$

das heißt: Die Exponentialfunktion wird durch Differentiation reproduziert.

○

### Exkurs über die $o$ -Notation

Bevor wir hier weitermachen, wenden wir uns nocheinmal den Formeln (2) zu. Es geht dort um die Größenordnung einer gewissen Fehlerfunktion  $r(h)$  beim Grenzübergang  $h \rightarrow 0$ . Mit Hilfe des **Landauschen  $o$ -Symbols** lassen sich derartige Sachverhalte in besonders kompakter Weise ausdrücken; man muß sich allerdings ein wenig an diese  $o$ -Schreibweise gewöhnen.

Also: Da der Quotient  $\frac{r(h)}{h}$  mit  $h \rightarrow 0$  gegen 0 geht, sagt man,  $r(h)$  sei "klein oh von  $h$ ", und schreibt

$$r(h) = o(h) \quad (h \rightarrow 0) .$$

Der Term  $o(h)$  bezeichnet hier *nicht* einen Funktionswert an der Stelle  $h$ , sondern erklärt  $r(\cdot)$  zu einer Funktion, von der man folgendes weiß: Dividiert man diese Funktion durch  $h$ , so geht der Quotient mit  $h \rightarrow 0$  gegen 0.

Allgemein: Es ist die Rede von einem bestimmten Grenzübergang  $x \rightarrow \xi$ . Ein Term  $o(p(x))$  in einer Gleichung bezeichnet eine letzten Endes durch diese Gleichung definierte Funktion  $R(x)$ , von der man aber weiß, daß sie für  $x \rightarrow \xi$  von wesentlich kleinerer Größenordnung ist als  $p(x)$ , oder genau: daß der Quotient  $R(x)/p(x)$  gegen 0 geht. In anderen Worten: Die nennerfreie Formel

$$f(x) = g(x) + o(q(x)) \quad (x \rightarrow \xi)$$

ist äquivalent mit dem Sachverhalt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - g(x)}{q(x)} = 0 .$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= o(1) && (t \rightarrow \infty) , \\ t^{1000} &= o(e^t) && (t \rightarrow \infty) , \\ t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 &= t^n (1 + o(1)) && (t \rightarrow \infty) , \\ \frac{3t^2 - 5t - 7}{t + 1} &= 3t - 8 + o(1) && (t \rightarrow \infty) , \\ \sqrt{1 + t} &= 1 + \frac{t}{2} + o(t) && (t \rightarrow 0) . \end{aligned}$$

(Die zweitletzte Beziehung ergibt sich durch Ausführung der Polynomdivision; die letzte mag der Leser selber verifizieren, wenn er diesen Abschnitt zu Ende gelesen hat.)

Wegen  $A = f'(t_0)$  sind wir damit in der Lage, den Inhalt von (2) in der folgenden prägnanten Formel auszudrücken:

$$\boxed{f(t_0 + h) - f(t_0) = f'(t_0) h + o(h) \quad (h \rightarrow 0)} \quad (4)$$

## Geschwindigkeit und Tangentenvektor

Wird die unabhängige Variable  $t$  einer Parameterdarstellung  $\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t)$  als “Zeit” interpretiert, so stellt der Ableitungsvektor eine Geschwindigkeit dar: Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} := \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0} \quad (t > t_0)$$

ist die “totale Ortsveränderung im Verhältnis zur insgesamt dafür benötigten Zeit” oder eben die **mittlere Geschwindigkeit** im Zeitintervall  $[t_0, t]$ , und der für  $t \rightarrow t_0+$  resultierende Grenzwert  $\mathbf{x}'(t_0)$  ist die **Momentangeschwindigkeit** oder einfach die **Geschwindigkeit** des laufenden Punktes zum Zeitpunkt  $t_0$ .

Ist  $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , so zeigt  $\mathbf{x}'(t_0)$  in die Richtung der Kurventangente an der Stelle  $t_0$ . Um das einzusehen, betrachten wir die normierten Sekantenvektoren  $\frac{\Delta \mathbf{x}}{|\Delta \mathbf{x}|}$  für  $t \rightarrow t_0+$  (Fig. 3.1.4). Mit  $t - t_0 =: h$  ergibt sich aufgrund von (4):

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{|\Delta \mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}'(t_0)h + o(h)}{|\mathbf{x}'(t_0)h + o(h)|} = \frac{\mathbf{x}'(t_0) + o(1)}{|\mathbf{x}'(t_0) + o(1)|}.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Delta \mathbf{x}}{|\Delta \mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}'(t_0)}{|\mathbf{x}'(t_0)|},$$

womit der normierte Geschwindigkeitsvektor als Grenzlage der Sekanteneinheitsvektoren, mithin als Tangenteneinheitsvektor identifiziert ist.

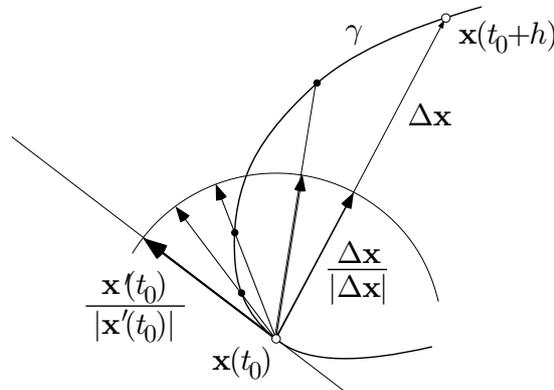


Fig. 3.1.4

② Betrachte zum Beispiel die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) := t\mathbf{a} + t^2\mathbf{b} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Es ergibt sich

$$\frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0} = \frac{(t - t_0)\mathbf{a} + (t^2 - t_0^2)\mathbf{b}}{t - t_0} = \mathbf{a} + (t + t_0)\mathbf{b}$$

und somit

$$\mathbf{x}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{a} + (t + t_0)\mathbf{b}) = \mathbf{a} + 2t_0\mathbf{b} .$$

Sind die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  linear unabhängig, so ist  $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$  für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ , und die Bahnkurve (eine Parabel) besitzt in allen Punkten eine Tangente. Ist aber zum Beispiel  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , so besitzt die Bahnkurve (eine zweimal durchlaufene Halbgerade) im Ursprung einen Rückkehrpunkt.  $\circ$

## Ableitungsregeln

### (3.1)

$$(a) \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \implies \mathbf{f}' = (f'_1, f'_2, f'_3),$$

insbesondere:  $(u + iv)' = u' + i v'$ ;

$$(b) \quad \begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' , \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \in \mathbb{C}) ; \end{aligned}$$

$$(c) \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(analog für alle in den Grundstrukturen vorhandenen Produkte);

$$(d) \quad (f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} ;$$

$$(e) \quad \frac{d}{dt} g(f(t)) = g'(f(t)) \cdot f'(t) \quad \textbf{(Kettenregel)};$$

(f) Ist  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  injektiv und  $g := f^{-1}$  die Umkehrfunktion, so gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

in allen Punkten  $y$ , für die die rechte Seite definiert ist.

□ Wir behandeln nur (c), (e) und (f). Dabei genügt es, jeweils eine feste Stelle  $t_0$  zu betrachten, für die die rechte Seite der zu beweisenden Formel

erklärt ist. Wir machen wiederholt von dem folgenden Prinzip Gebrauch: Ist  $f$  an der Stelle  $t_0$  differenzierbar, so ist die sogenannte **Trendfunktion**

$$m(t) := m_{f,t_0}(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} & (t \neq t_0), \\ f'(t_0) & (t = t_0) \end{cases}$$

an der Stelle  $t_0$  stetig, und es gilt dann für alle  $t \in \text{dom}(f)$ :

$$f(t) - f(t_0) = m(t)(t - t_0). \quad (5)$$

Umgekehrt: Besteht eine (nennerfreie!) Beziehung der Form (5) mit einer bei  $t_0$  stetigen Funktion  $m(\cdot)$ , so ist  $f$  an der Stelle  $t_0$  differenzierbar, und es gilt  $f'(t_0) = m(t_0)$ .

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(t)g(t) - f(t_0)g(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} g(t) + f(t_0) \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \\ &\rightarrow f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0) \quad (t \rightarrow t_0), \end{aligned}$$

wobei wir stillschweigend benutzt haben, daß eine an der Stelle  $t_0$  differenzierbare Funktion dort auch stetig ist (dies folgt aus (5)).

(e) Setzen wir zur Abkürzung  $f(t) =: y$ ,  $f(t_0) =: y_0$ , so gilt

$$\begin{aligned} g(f(t)) - g(f(t_0)) &= g(y) - g(y_0) = m_{g,y_0}(y) \cdot (y - y_0) \\ &= m_{g,y_0}(y) \cdot (f(t) - f(t_0)) \\ &= m_{g,y_0}(f(t)) \cdot m_{f,t_0}(t) \cdot (t - t_0) =: m(t) \cdot (t - t_0). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich, daß die Funktion  $m(\cdot)$  an der Stelle  $t_0$  stetig ist. Somit besitzt  $g \circ f$  nach dem oben angeführten Prinzip an der Stelle  $t_0$  die Ableitung

$$m(t_0) = m_{g,y_0}(f(t_0)) \cdot m_{f,t_0}(t_0) = g'(f(t_0))f'(t_0).$$

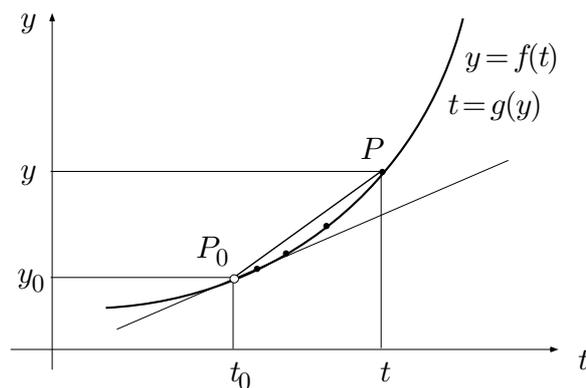


Fig. 3.1.5

(f) Wir verzichten auf einen richtiggehenden Beweis und verweisen auf die Figur 3.1.5. Es gilt

$$g'(y_0) \doteq \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)} \doteq \frac{1}{f'(t_0)}. \quad \lrcorner$$

② (Forts.) Es sei  $f$  eine reell- oder komplexwertige Funktion und

$$F(t) := e^{f(t)}.$$

Dann ist

$$F'(t) = \exp'(f(t)) \cdot f'(t) = \exp(f(t)) \cdot f'(t).$$

Es gilt daher

$$\frac{d}{dt} e^{f(t)} = f'(t) \cdot e^{f(t)}. \quad (6)$$

(Das Vertrauen in die Kraft des Kalküls wird hier etwas strapaziert. Die Überlegungen, die zu  $\exp' = \exp$  geführt haben, lassen sich aber “im Komplexen” nachvollziehen.)  $\circ$

In diesem Beispiel ist die Kettenregel als Regel für das Ableiten von zusammengesetzten Funktionstermen benutzt worden; sie besitzt aber auch einen geometrischen Gehalt, der in der Fig. 3.1.6 dargestellt ist.

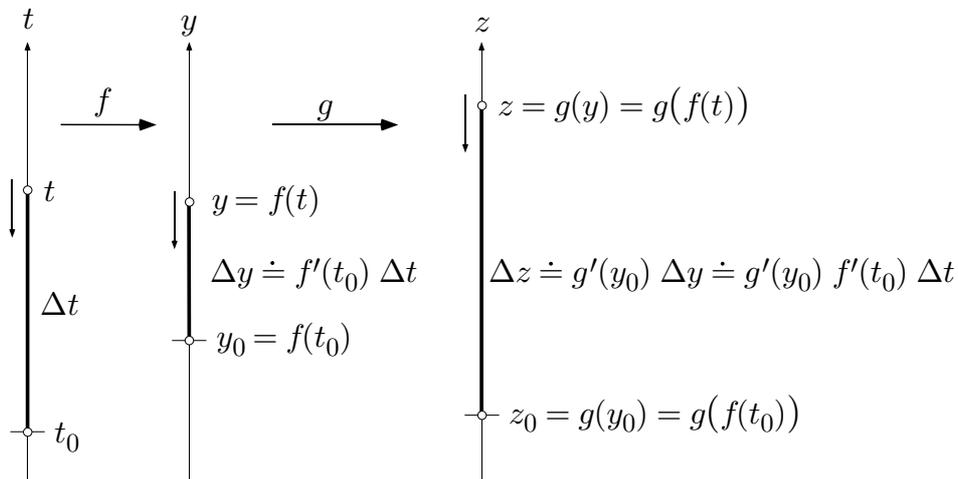


Fig. 3.1.6

## Die Ableitungen der elementaren Grundfunktionen

Wir geben nun (zum Teil ohne Beweis) die Ableitungen der elementaren Grundfunktionen an. Die Rechenregeln setzen uns dann instand, die Ableitung irgendeiner elementaren Funktion zu berechnen.

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} t^k = k t^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

□ Für  $f(t) := 1$  und  $g(t) := t$  ist

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \equiv 0, \quad \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \equiv 1 ;$$

es folgt  $\frac{d}{dt} 1 \equiv 0$ ,  $\frac{d}{dt} t \equiv 1$ . Weiter ergibt sich (vollständige Induktion nach  $k \geq 0$ ):

$$\frac{d}{dt} t^{k+1} = \frac{d}{dt} (t \cdot t^k) = 1 \cdot t^k + t \cdot (k t^{k-1}) = (k+1) t^k .$$

Negative Exponenten werden mit der Quotientenregel auf den schon behandelten Fall zurückgeführt. ┌

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \log y = \frac{1}{y} .$$

□ Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Folglich gilt nach **(3.1)**(f) und (3):

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y} . \quad \text{┌}$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1} \quad (t > 0, \alpha \in \mathbb{R}) .$$

□ Nach Definition der allgemeinen Potenz und (6) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} t^\alpha &= \frac{d}{dt} e^{\alpha \log t} = \alpha \log'(t) e^{\alpha \log t} \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{t} \cdot t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1} . \end{aligned} \quad \text{┌}$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t, \quad \frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t .$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \operatorname{arcosh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} .$$

┌ Ist  $\operatorname{arsinh} y = t$ , so ist  $\sinh t = y$  und folglich nach dem hyperbolischen Pythagoras  $\cosh t = \sqrt{y^2 + 1}$ . Hiermit ergibt sich

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh} y)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} . \quad \lrcorner$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt} \sin t = \cos t .$$

┌ Wird die Identität

$$\cos t + i \sin t = e^{it}$$

abgeleitet, so ergibt sich nach (6):

$$\begin{aligned} \cos' t + i \sin' t &= i e^{it} = i (\cos t + i \sin t) \\ &= -\sin t + i \cos t . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} .$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} \tan t = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{d}{dt} \tanh t = 1 - \tanh^2 t .$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \frac{d}{dy} \operatorname{artanh} y = \frac{1}{1 - y^2} .$$

Dies sollte genügen. Beachte, daß transzendente Funktionen, zum Beispiel  $\arcsin$  oder  $\log$ , durchaus algebraische oder sogar rationale Funktionen als Ableitungen haben können.

## Aufgaben

1. (M) Berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \log \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}, & \text{(b)} \quad \sqrt{\frac{\alpha + \beta t}{\alpha - \beta t}} \quad (\alpha, \beta > 0), \\ \text{(c)} \quad t^{1/3}(1 - t)^{2/3}(1 + t)^{1/2}, & \text{(d)} \quad t^t, \\ \text{(e)} \quad (\log \tan t)^{-1/3}, & \text{(f)} \quad \operatorname{artanh} \sqrt{1 - t^2}. \end{array}$$

Bestimme in jedem Fall den Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}$  sowie den Definitionsbereich  $D'$  der Ableitung.

2. Berechne die hundertste Ableitung der Funktion  $f(t) := t^2 \sin(2t)$ .

## 3.2 Extrema

### Maximum vs. Supremum

Es sei  $B \subset \mathbb{X}$  ein vorgegebener Bereich (zum Beispiel ein Intervall, eine Halbebene, ein Würfel, eine Sphäre) und

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

eine reellwertige Funktion. Wir suchen nach dem “Maximum von  $f$  auf  $B$ ”. Nun ist die Wertmenge

$$W := \{f(x) \mid x \in B\}$$

in aller Regel eine unendliche Menge, und da ist es gar nicht sicher, ob es überhaupt einen größten Wert gibt.

Betrachte für einen Moment eine ganz beliebige nichtleere Menge  $M \subset \mathbb{R}$ . Gibt es ein  $s \in M$  mit  $s \geq y$  für alle  $y \in M$ , so ist  $s$  das **maximale Element** von  $M$  und wird mit  $\max M$  bezeichnet. Analog ist  $\min M$  erklärt.

*Bsp:* Jede endliche Menge besitzt sowohl ein minimales wie ein maximales Element. Die Menge  $[0, 1[$  besitzt kein maximales, die Menge  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  kein minimales Element.

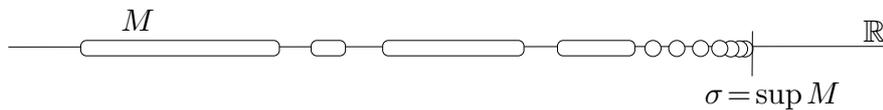


Fig. 3.2.1

Das **Supremum**  $\sup M =: \sigma$  der Menge  $M$  ist folgendermaßen charakterisiert (Fig. 3.2.1): Es gibt in  $M$  keine Zahlen  $> \sigma$ ; aber für jede Toleranz  $\varepsilon > 0$  gibt es in  $M$  Zahlen  $> \sigma - \varepsilon$ . In anderen Worten: Das Supremum wird innerhalb  $M$  beliebig genau erreicht, vielleicht sogar angenommen (nämlich dann, wenn  $M$  ein maximales Element besitzt), aber sicher nicht überschossen. Ist  $M$  nach oben unbeschränkt, so wird  $\sup M := \infty$  gesetzt. — Analog wird das **Infimum**  $\inf M$  erklärt.

Es ist eine Grundtatsache der Analysis, daß  $\sup M$  und  $\inf M$  für jede nichtleere Menge  $M \subset \mathbb{R}$  vorhanden und eindeutig bestimmt sind. Das hat mit der sogenannten *Vollständigkeit* von  $\mathbb{R}$  zu tun und wäre mit Hilfe einer Axt zu beweisen (siehe den Schluß von Abschnitt 1.4).

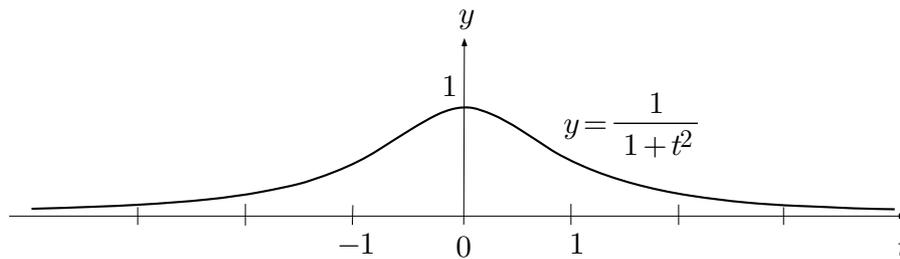


Fig. 3.2.2

Bezüglich unserer Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  können wir also davon ausgehen, daß jedenfalls die beiden Größen

$$\inf W = \inf_{x \in B} f(x) \quad (\geq -\infty), \quad \sup W = \sup_{x \in B} f(x) \quad (\leq \infty)$$

vorhanden und wohlbestimmt sind.

$$\text{Bsp:} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = 1, \quad \inf_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = 0 \quad (\text{Fig. 3.2.2});$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} e^t = \infty, \quad \inf_{0 < t < \pi/4} \cos t = 1/\sqrt{2}.$$

Besitzt die Wertmenge  $W$  ein maximales Element, das heißt: Wird das Supremum tatsächlich angenommen, so spricht man vom **(globalen) Maximum** von  $f$  auf  $B$  und schreibt  $\max_{x \in B} f(x)$  anstelle von  $\sup_{x \in B} f(x)$ . Es gibt dann mindestens einen Punkt  $\xi \in B$  mit

$$f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in B.$$

Ein derartiger Punkt  $\xi$  ist eine **(globale) Maximalstelle** von  $f$  auf  $B$ . Die Menge dieser globalen Maximalstellen (eine Teilmenge des Definitionsbereichs  $B$ !) bezeichnen wir mit  $S_{\max}(f \upharpoonright B)$  oder einfach mit  $S_{\max}$ . — Analog werden das **(globale) Minimum**  $\min_{x \in B} f(x)$  und **(globale) Minimalstellen** erklärt.

$$\text{Bsp:} \quad \max_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = 1, \quad S_{\max} = \{0\}, \quad S_{\min} = \emptyset;$$

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \cos t = -1, \quad S_{\min} = \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

## Der Satz vom Maximum

Maximal- und Minimalstellen werden im Sammelbegriff **Extremalstellen** zusammengefaßt. Ob in einer konkreten Situation Extremalstellen vorhanden sind, hängt von  $f$  und vom Bereich  $B$  ab. Wir benötigen den folgenden Begriff: Eine Menge  $B \subset \mathbb{X}$  ist **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, das heißt: wenn der Rand  $\partial B$  zu  $B$  gehört und  $B$  ganz "im Endlichen" liegt.

Der folgende Satz ist fundamental:

**(3.2)** *Ist  $B \subset \mathbb{X}$  kompakt und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reellwertige Funktion, so nimmt  $f$  auf  $B$  ein globales Maximum an.*

□ Beweisidee: Nach Definition des Supremums

$$\sup_{x \in B} f(x) =: \sigma \quad (\leq \infty)$$

gibt es eine Folge  $x$  in  $B$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sigma . \quad (1)$$

Da  $B$  beschränkt ist, besitzt diese Folge einen Häufungspunkt  $\xi$ , und da  $B$  abgeschlossen ist, muß  $\xi \in B$  sein (Fig. 3.2.3). Man kann nun eine Teilfolge

$$x' : n \mapsto x'_n := x_{k_n}$$

auswählen, die tatsächlich gegen  $\xi$  konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \xi . \quad (2)$$

Für diese Teilfolge gilt immer noch (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \sigma . \quad (1')$$

Da  $f$  stetig ist, liefern (2) und (1') im Verein mit Satz **(2.10)**:

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \sigma . \quad \square$$

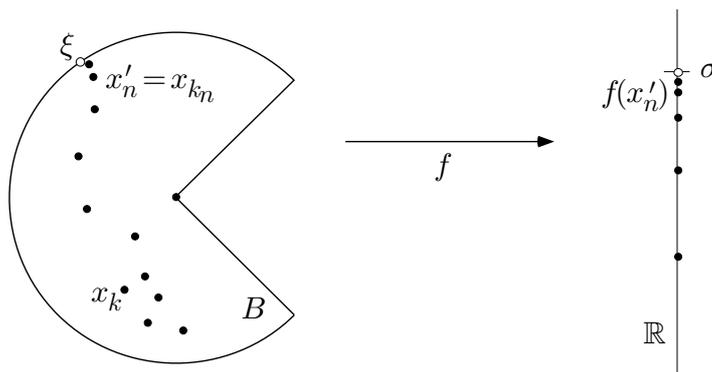


Fig. 3.2.3

Dieser Beweis ist (im Gegensatz zum Beweis des Zwischenwertsatzes (2.6)) nicht konstruktiv, das heißt: Er liefert keine Methode, im Anwendungsfall eine Maximalstelle  $\xi$  tatsächlich zu finden. Das hängt damit zusammen, daß der Maximalwert  $\sigma$  sehr genau bestimmt ist, der Ort, wo dieses Maximum angenommen wird, aber gar nicht. Es kommt aber noch schlimmer: Eine kleine Änderung der Funktion  $f$  oder des Bereichs  $B$  ändert den Maximalwert nur wenig, kann aber eine radikale Änderung der Maximalstelle(n) bewirken. Ähnliches ist zu sagen, wenn die "Problemdata"  $f$  und  $B$  mit Ungenauigkeiten behaftet sind.

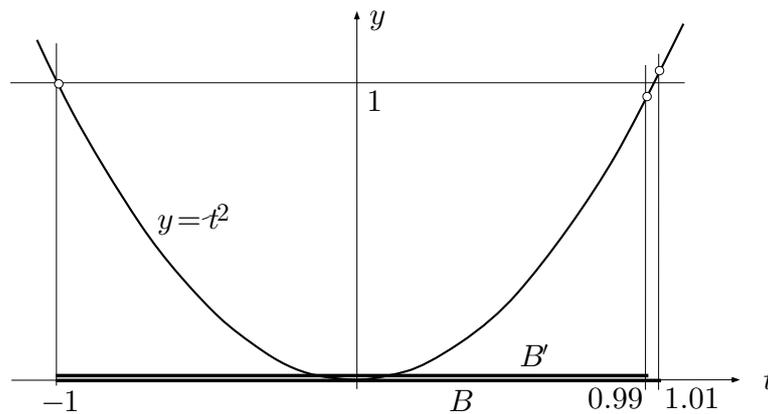


Fig. 3.2.4

① Betrachte die Funktion  $f(t) := t^2$  auf dem Intervall  $B := [-1, 1.01]$ , siehe die Fig. 3.2.4. Es ist

$$\max_{t \in B} f(t) = 1.01^2, \quad S_{\max}(f \upharpoonright B) = \{1.01\}.$$

Wird  $B$  ganz wenig abgeändert zu  $B' := [-1, 0.99]$ , so ergibt sich

$$\max_{t \in B'} f(t) = 1, \quad S_{\max}(f \upharpoonright B') = \{-1\}.$$

○

Dieser Sachverhalt hat schwerwiegende praktische Konsequenzen im täglichen Leben: Wenn sich ein Individuum unter gegebenen Bedingungen optimal verhält, so kann schon eine minimale Veränderung dieser Bedingungen dieses Individuum dazu veranlassen, sein Verhalten radikal zu ändern. Das wird bei  $10^6$  Individuen, die den gleichen Verhältnissen unterworfen sind, bestimmt an einem andern Ort Probleme verursachen; dabei ist der "Gewinn" für den Einzelnen und auch im Gesamten nur bescheiden.

## Lokale Extremalstellen

Neben den globalen, das heißt: auf ganz  $\text{dom}(f) =: B$  bezüglichen Extremalstellen werden **lokale Extremalstellen** wie folgt erklärt: Die Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  ist im Punkt  $\xi \in B$  **lokal maximal**, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$x \in B \quad \wedge \quad |x - \xi| < \delta \quad \implies \quad f(\xi) \geq f(x) .$$

Gemeint ist: Weit weg von  $\xi$  darf  $f$  schon noch größere Werte annehmen. Ist  $f$  an der Stelle  $\xi$  global maximal, so ist  $f$  dort erst recht lokal maximal.

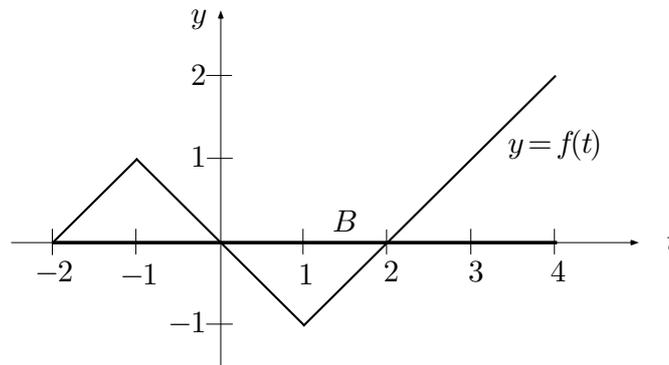


Fig. 3.2.5

② Es sei  $B := [-2, 4]$  und  $f$  die in der Figur 3.2.5 dargestellte Funktion. Dann ist  $f$  an den Stellen  $-1$  und  $4$  lokal maximal, bei  $4$  global maximal, an den Stellen  $-2$  und  $1$  lokal minimal und bei  $1$  global minimal.  $\circ$

Was hat das alles mit Differentialrechnung zu tun? Antwort: Die Differentialrechnung bringt alle lokalen Extremalstellen im Inneren von  $B$  zum Vorschein. Vorderhand müssen wir uns natürlich auf Funktionen *einer* unabhängigen Variablen  $t$  beschränken.

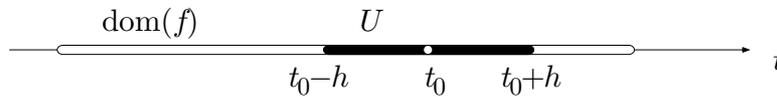


Fig. 3.2.6

Es sei also  $f: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $t_0$  ein innerer Punkt von  $\text{dom}(f)$  (Fig. 3.2.6). Es gibt dann ein  $h > 0$  mit  $]t_0 - h, t_0 + h[ \subset \text{dom}(f)$ .

Der Punkt  $t_0$  heißt **kritischer** oder **stationärer Punkt** von  $f$ , wenn  $f'(t_0) = 0$  ist. Aufgrund von 3.1.(4) gilt dann

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) = o(t - t_0) \quad (t \rightarrow t_0).$$

Der Zuwachs von  $f$  ist also für  $t \rightarrow t_0$  von kleinerer Größenordnung als der Zuwachs  $t - t_0$  der unabhängigen Variablen, daher der Name "stationär". Die Menge der kritischen Punkte von  $f$  auf  $B$  bezeichnen wir mit  $S_{\text{krit}}(f \upharpoonright B)$  oder einfach mit  $S_{\text{krit}}$ .

③ Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := \sin t + \frac{1}{2} \sin(2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(Fig. 3.2.7) mit der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos t + \cos(2t) = \cos t + (2 \cos^2 t - 1) \\ &= (2 \cos t - 1)(\cos t + 1). \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte  $t$  müssen daher der Gleichung  $\cos t = \frac{1}{2}$  oder der Gleichung  $\cos t = -1$  genügen. Es ergibt sich

$$S_{\text{krit}} = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi \right\}.$$

○

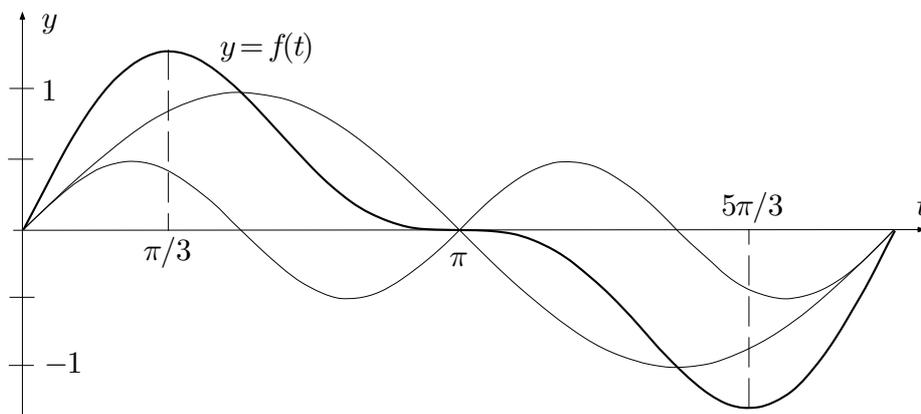


Fig. 3.2.7

Die Grundlage zur Lösung von allen praktischen Extremalaufgaben ist bekanntlich enthalten in dem folgenden Lemma:

**(3.3)** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $t_0$  ein innerer Punkt von  $\text{dom}(f)$ . Ist  $f$  an der Stelle  $t_0$  lokal extremal, so ist  $t_0$  notwendigerweise ein kritischer Punkt von  $f$ , das heißt, es gilt  $f'(t_0) = 0$ .

□ Es gilt

$$f(t) - f(t_0) = m(t)(t - t_0),$$

dabei bezeichnet  $m(\cdot)$  die Trendfunktion von  $f$  an der Stelle  $t_0$ . Ist zum Beispiel  $f'(t_0) = m(t_0) > 0$ , so ist  $m(t)$  in einer ganzen Umgebung  $U := ]t_0 - h, t_0 + h[$  des Punktes  $t_0$  (Fig. 3.2.6) positiv, und wir haben

$$\forall t \in U: \quad \text{sgn}(f(t) - f(t_0)) = \text{sgn}(t - t_0).$$

Hiernach nimmt  $f(t) - f(t_0)$  in  $U$  beiderlei Vorzeichen an, und  $f$  kann an der Stelle  $t_0$  weder lokal maximal noch lokal minimal sein. □

## Bestimmung der globalen Extrema

Das Lemma (3.3) erhält nun folgende anwendungsorientierte Form:

**(3.4)** Die stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei jedenfalls im Inneren von  $[a, b]$  differenzierbar und besitze dort endlich viele kritische Punkte  $t_1, \dots, t_r$ . Dann ist

$$S_{\max}(f \upharpoonright [a, b]) \subset \{a, b, t_1, \dots, t_r\} \quad (1)$$

und

$$\max_{a \leq t \leq b} f(t) = \max\{f(a), f(b), f(t_1), \dots, f(t_r)\}.$$

□ Nach Satz (3.2) wird das Maximum tatsächlich angenommen, und zwar in einem der Punkte  $a, b$  oder in einem inneren Punkt  $\xi$  des Intervalls  $[a, b]$ . Ein derartiger Punkt  $\xi$  muß nach dem Lemma (3.3) ein kritischer Punkt von  $f$  sein, denn sonst wäre die Funktion dort nichteinmal lokal maximal. Die "Kandidatenliste" rechter Hand in (1) enthält daher alle Punkte des Intervalls  $[a, b]$ , die als globale Maximalstelle überhaupt in Frage kommen, und der tatsächliche Maximalwert von  $f$  läßt sich durch Wertvergleich in diesen Punkten ermitteln. □

Beachte: Falls nur der Maximalwert  $\max_{a \leq t \leq b} f(t)$  und die Menge  $S_{\max}$  der Maximalstellen gefragt sind, ist es nach diesem Satz nicht nötig, zweite Ableitungen auszurechnen. Etwas anderes ist es, wenn zum Beispiel für eine Graphendiskussion oder für Stabilitätsbetrachtungen der Charakter der einzelnen kritischen Punkte untersucht werden soll (s.u.).

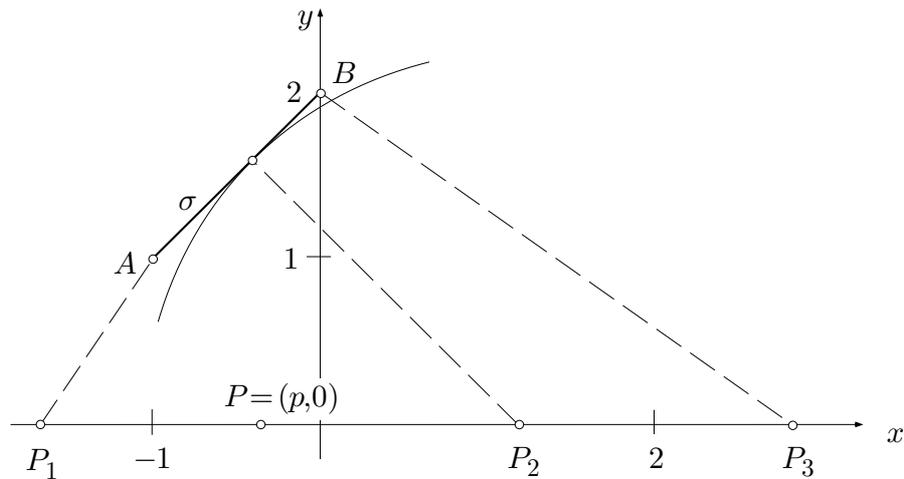


Fig. 3.2.8

- ④ Es sei  $\sigma$  die Verbindungsstrecke der beiden Punkte  $A := (-1, 1)$ ,  $B := (0, 2)$ , und es sei  $P := (p, 0)$  ein Punkt auf der  $x$ -Achse (Fig. 3.2.8). Welcher Punkt von  $\sigma$  liegt  $P$  am nächsten?

Der Figur entnimmt man ohne weiteres die folgende Lösung dieser Aufgabe: Ist  $p \leq 0$ , so liegt der Endpunkt  $A$  am nächsten, und ist  $p \geq 2$ , so liegt  $B$  am nächsten. Für  $0 < p < 2$  ist der nächste Punkt ein innerer Punkt von  $\sigma$ , nämlich der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf  $\sigma$ .

Was können wir hieraus lernen? Unsere Aufgabe enthält einen Parameter  $p$ . Der kürzeste Abstand von  $P$  zu  $\sigma$  hängt natürlich "zahlenmäßig" von  $p$  ab, aber nicht nur das: Auch die *Gestalt* der Extreimalsituation hängt von  $p$  ab und verändert sich an bestimmten Stellen der  $p$ -Achse (bei  $p = 0$  und  $p = 2$ ) radikal. Damit sind wir auf ein ziemlich universelles "Katastrophenprinzip" gestoßen: Enthält ein mathematisches Modell Parameter  $p, \lambda, \dots$ , so muß man von vorneherein damit rechnen, daß für gewisse spezielle Werte der Parameter die Gesamtsituation umkippt zu einer vollständig neuen Gestalt.

Die rechnerische Behandlung der obigen Aufgabe überlassen wir dem Leser. ○

- ⑤ Wir betrachten die mit  $\lambda$  parametrisierte Funktionenschar

$$f_\lambda(t) := t^3 - 3\lambda^2 t + 4\lambda$$

auf dem  $t$ -Intervall  $[-2, 2]$ . Jedes  $f_\lambda$  nimmt auf diesem Intervall ein globales Maximum  $M_\lambda$  und ein globales Minimum  $m_\lambda$  an. Diese beiden Größen sollen nun (als Funktionen von  $\lambda$ ) bestimmt werden. Hierzu müssen wir für jedes feste  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine "Kandidatenliste" herstellen.

Zunächst ist

$$f_\lambda(-2) = -8 + 6\lambda^2 + 4\lambda =: \phi_1(\lambda), \quad f_\lambda(2) = 8 - 6\lambda^2 + 4\lambda =: \phi_2(\lambda).$$

Ferner gilt  $f'_\lambda(t) = 3t^2 - 3\lambda^2$ , und dies verschwindet in den beiden Punkten  $t = \pm\lambda$ . Diese beiden Punkte fallen für  $|\lambda| \geq 2$  außer Betracht, da sie dann nicht im  $t$ -Intervall  $] -2, 2[$  liegen. Die zugehörigen Funktionswerte

$$f_\lambda(-\lambda) = 2\lambda^3 + 4\lambda =: \phi_3(\lambda), \quad f_\lambda(\lambda) = -2\lambda^3 + 4\lambda =: \phi_4(\lambda)$$

sind somit nur für  $-2 < \lambda < 2$  zur Konkurrenz zugelassen. Die Funktionen  $\phi_1(\lambda), \dots, \phi_4(\lambda)$  sind in der Fig. 3.2.9 simultan dargestellt,  $\phi_3$  und  $\phi_4$  nur in dem angegebenen Bereich. Die gesuchten Funktionen  $M_\lambda$  und  $m_\lambda$  lassen sich nun unmittelbar ablesen: Aufgrund von Satz (3.4) ist

$$M_\lambda = \max\{\phi_1(\lambda), \dots, \phi_4(\lambda)\}$$

und analog für  $m_\lambda$ . Damit erhalten wir die folgende Tabelle:

	$\lambda \leq -2$	$-2 < \lambda < -1$	$-1 \leq \lambda \leq 1$	$1 < \lambda < 2$	$\lambda \geq 2$
$M_\lambda$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_4(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	$\phi_1(\lambda)$
$m_\lambda$	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_4(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$

○

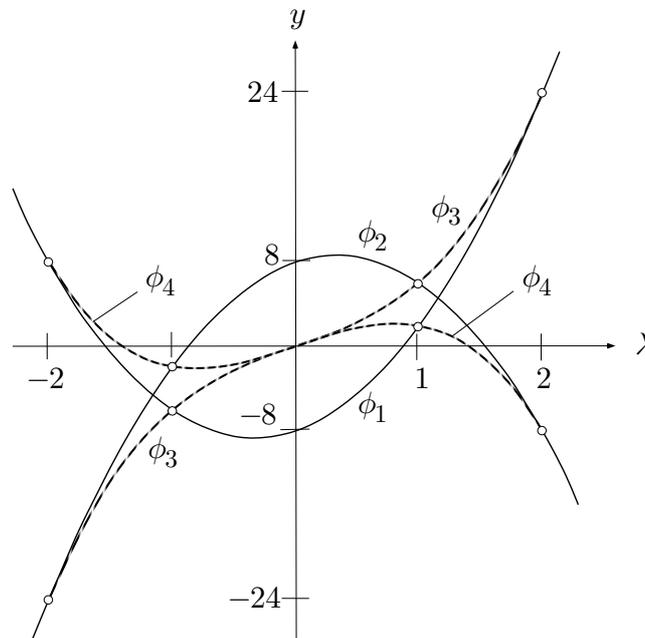


Fig. 3.2.9

## Aufgaben

1. Bestimme Infimum und Supremum der folgenden Mengen. Welche dieser Mengen besitzen ein minimales oder ein maximales Element?

$$(a) \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad (b) \left\{ \frac{x}{1+x} \mid x > -1 \right\},$$

$$(c) \left\{ x + \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} < x < 2 \right\}, \quad (d) \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}: x^2 + 5y^2 < 4\}.$$

2. (M) Bestimme, soweit vorhanden, die globalen Extrema der Funktion

$$f(t) := (t^3 + 4t^2 + 9t + 9)e^{-t}.$$

Stelle ein Bild des Graphen von  $f$  her, das das gefundene Resultat bestätigt.

3. Ein Versuch besitze zwei mögliche Ergebnisse, die mit Wahrscheinlichkeiten  $p$  bzw.  $q$  ( $= 1 - p$ ) eintreten. Ein Maß für die Ungewißheit über den Ausgang des Versuchs ist die sogenannte Entropie

$$H := -p \log p - q \log q.$$

Für welchen Wert von  $p$  und  $q$  ist die Ungewißheit am größten? (*Hinweis:*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ .)

4. Ein periodischer Vorgang wird beschrieben durch die Funktion

$$f(t) := \alpha \cos t + \cos(2t).$$

Für welchen Wert des reellen Parameters  $\alpha$  ist der Maximalausschlag (nach oben oder unten) minimal?

5. Eine Kugel soll in einen aufrechten Kreiskegel von minimalem Volumen gepackt werden. Bestimme den halben Öffnungswinkel des Kegels.
6. Auf der Ellipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  bestimme man diejenigen Punkte, die von dem Punkt  $(c, 0)$ ,  $0 < c < 2$ , minimalen Abstand haben. Man zeichne die gesuchten Punkte für die Fälle  $c := 3/4$  und  $c := 9/5$ .
7. Eine Zahl  $a \geq 1$  soll in  $n \geq 1$  gleiche Teile geteilt werden, so daß das Produkt der Teile möglichst groß wird. Bestimme  $n$  in Abhängigkeit von  $a$ . (*Hinweis:* Die Funktion  $\phi(t) := (a/t)^t$  ist unimodal.)
8. Bestimme die größte Zahl, die als Produkt von positiven ganzen Zahlen der Summe 1996 dargestellt werden kann.
9. Betrachte die Funktion  $f(t) := t^2$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) sowie das verschiebbare "Fenster"  $[\lambda - 1, \lambda + 1]$  auf der  $t$ -Achse. Aufgabe: die beiden Funktionen

$$m(\lambda) := \min\{f(t) \mid \lambda - 1 \leq t \leq \lambda + 1\},$$

$$M(\lambda) := \max\{f(t) \mid \lambda - 1 \leq t \leq \lambda + 1\}$$

zu bestimmen. Verlangt ist eine formelmäßige Darstellung (allenfalls mit Fallunterscheidungen) oder eine Figur, an der  $m(\cdot)$  und  $M(\cdot)$  unmittelbar abgelesen werden können.

10. Angenommen, Sie müßten an dem folgenden Spiel teilnehmen: Sie geben eine reelle Zahl  $x$  bekannt; hierauf wählt Ihr Gegner eine reelle Zahl  $y$  und gewinnt von Ihnen den Betrag

$$f(x, y) := (x^2 - 4)y^2 + 2(x + 4)y .$$

Welches  $x$  würden Sie wählen, und welches  $y$  hierauf Ihr Gegner?

### 3.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

#### Verschiedene Varianten des Mittelwertsatzes

Wir beginnen mit dem intuitiv einleuchtenden **Satz von Rolle**:

**(3.5)** Die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig, und es sei  $f(a) = f(b)$ . Ist  $f$  im Inneren von  $[a, b]$  differenzierbar, so gibt es einen Punkt  $\tau \in ]a, b[$  mit  $f'(\tau) = 0$ .

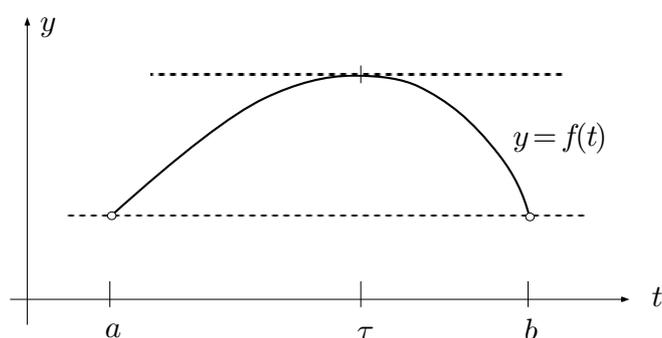


Fig. 3.3.1

┌ Ist  $f$  nicht konstant, so gibt es zum Beispiel Punkte  $t \in ]a, b[$  mit  $f(t) > f(a)$ , und das globale Maximum von  $f$  auf  $[a, b]$  wird notwendigerweise in (mindestens) einem inneren Punkt  $\tau$  angenommen (Fig. 3.3.1). An einer derartigen Stelle  $\tau$  ist  $f'(\tau) = 0$  nach Lemma **(3.3)**. ┘

Für komplexwertige (und erst recht für vektorwertige) Funktionen gibt es keine derartige Aussage!

Bsp: Es ist  $\text{cis}(2\pi) = \text{cis} 0$ , aber  $\text{cis}' t \neq 0$  für alle  $t$ .

Der angekündigte **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** erscheint in verschiedenen Varianten. Die erste davon ist (Fig. 3.3.2):

**(3.6)** Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und im Inneren von  $[a, b]$  differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt  $\tau \in ]a, b[$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\tau) \quad \text{bzw.} \quad f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) .$$

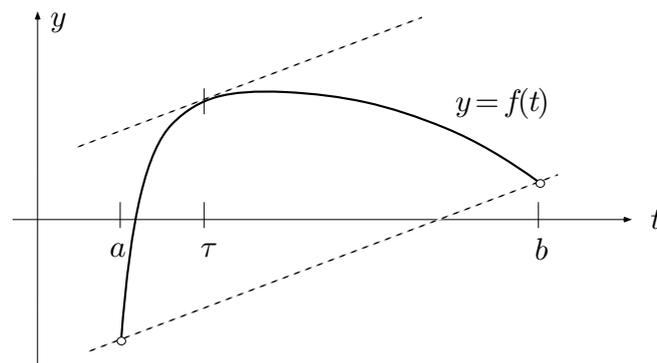


Fig. 3.3.2

Anstelle von **(3.6)** beweisen wir etwas allgemeiner:

**(3.6')** Genügen  $f$  und  $g$  den Voraussetzungen von **(3.6)** und ist  $g'(t) \neq 0$  für alle  $t \in ]a, b[$ , so gibt es einen Punkt  $\tau \in ]a, b[$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}.$$

□ Wir setzen zur Abkürzung

$$f(b) - f(a) =: \Delta f, \quad g(b) - g(a) =: \Delta g \quad (\neq 0)$$

und betrachten die Hilfsfunktion

$$h(t) := \Delta g \cdot f(t) - \Delta f \cdot g(t).$$

Es ist

$$h(b) - h(a) = \Delta g \Delta f - \Delta f \Delta g = 0;$$

nach dem Satz von Rolle gibt es daher einen Punkt  $\tau \in ]a, b[$  mit

$$0 = h'(\tau) = \Delta g f'(\tau) - \Delta f g'(\tau),$$

und es folgt in der Tat

$$\frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}.$$

□

Aus Satz **(3.6)** ergeben sich sofort die folgenden Aussagen, die nun nicht mehr auf einen unfaßbaren Punkt  $\tau$  Bezug nehmen:

**(3.7)** Ist  $f$  differenzierbar auf dem Intervall  $I$  und gilt

$$|f'(t)| \leq M \quad \forall t \in I,$$

so besteht für beliebige  $t_1, t_2 \in I$  die Abschätzung

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|.$$

**(3.8)** Ist  $f'(t) \equiv 0$  auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , so ist  $f$  konstant auf  $I$ .

Im Gegensatz zu **(3.5)** und **(3.6)** sind die Sätze **(3.7)** und **(3.8)** auch für komplexwertige und für vektorwertige Funktionen richtig (ohne Beweis).

## Grenzwerte nach de l'Hôpital

Wir benutzen den Mittelwertsatz gerade zum Beweis der beliebten **Regel von Bernoulli-de l'Hôpital**. Es handelt sich dabei um eine einfache Methode zur Berechnung von gewissen Grenzwerten, die zunächst auf Ausdrücke der Form  $0/0$  oder  $\infty/\infty$  führen.

**(3.9)** Es seien  $f$  und  $g$  differenzierbare reellwertige Funktionen auf dem Intervall  $]a, b[$  ( $b := \infty$  zugelassen), und es sei

$$\lim_{t \rightarrow b} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b} g(t) = 0 \quad (\text{bzw. beide} = \infty),$$

aber  $g'(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow b} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

falls der Grenzwert rechter Hand existiert ( $\pm\infty$  zugelassen).

□ Wir behandeln nur den Fall “ $0/0$ ” und  $b < \infty$ , so daß wir ohne weiteres  $f(b) = g(b) = 0$  annehmen dürfen (Fig. 3.3.3).

Die Funktionen  $f$  und  $g$  erfüllen in Intervallen  $[t, b]$  die Voraussetzungen von Satz **(3.6')**. Es gibt daher für jedes  $t < b$  einen Punkt  $\tau_t \in ]t, b[$  mit

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(b) - f(t)}{g(b) - g(t)} = \frac{f'(\tau_t)}{g'(\tau_t)}. \quad (1)$$

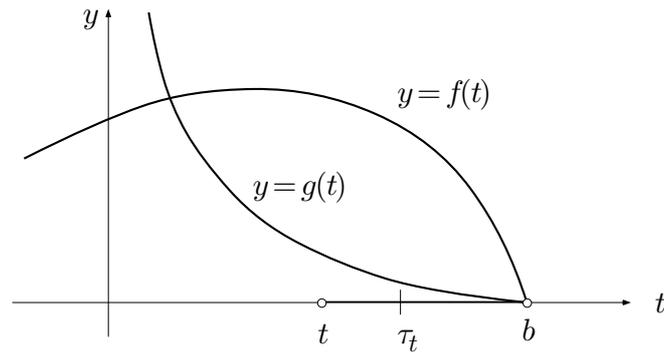


Fig. 3.3.3

Es sei jetzt  $\lim_{t \rightarrow b} (f'(t)/g'(t)) =: \lambda$ . Beim Grenzübergang  $t \rightarrow b-$  strebt notwendigerweise auch der Punkt  $\tau_t$  gegen  $b$  und folglich die rechte Seite von (1) gegen  $\lambda$ , also auch die linke Seite.  $\square$

Wir behandeln nun einige Beispiele.

①

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{2t^2 + t - 3}{t^3 - 3t + 2} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{4t + 1}{3t^2 - 3} = \lim_{t \rightarrow 1+} \left[ \frac{4t + 1}{3(t + 1)} \cdot \frac{1}{t - 1} \right].$$

Hier strebt der erste Faktor rechter Hand mit  $t \rightarrow 1+$  gegen  $5/6$ , der zweite gegen  $\infty$ , das Produkt also gegen  $\infty$ .

Es seien  $\alpha, \beta > 0$ . Bei der Funktion

$$h(t) := \frac{\log \cosh(\alpha t)}{\log \cosh(\beta t)}$$

streben Zähler und Nenner mit  $t \rightarrow 0$  beide gegen 0 und mit  $t \rightarrow \infty$  beide gegen  $\infty$ . Wegen

$$\frac{d}{dy} \log \cosh y = \log'(\cosh y) \cosh'(y) = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \tanh y$$

erhalten wir daher einerseits

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} h(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \tanh(\alpha t)}{\beta \tanh(\beta t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 (1 - \tanh^2(\alpha t))}{\beta^2 (1 - \tanh^2(\beta t))} \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \end{aligned}$$

wobei wir Satz (3.9) gleich zweimal angewandt haben, und andererseits

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha \tanh(\alpha t)}{\beta \tanh(\beta t)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

○

## Monotonie und Konvexität

Es sei  $I$  ein beliebiges Intervall. Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **(streng) monoton wachsend** auf  $I$ , wenn gilt:

$$t_1, t_2 \in I \quad \wedge \quad t_1 < t_2 \quad \implies \quad f(t_1) < f(t_2).$$

Der Mittelwertsatz liefert das folgende für die “Graphendiskussion” nützliche Monotoniekriterium:

**(3.10)** *Eine differenzierbare Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann streng monoton wachsend auf dem Intervall  $I$ , wenn folgendes zutrifft:*

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in I, \tag{2}$$

und auf keinem Teilintervall ist  $f'(t) \equiv 0$ .

□ Wir verzichten auf die Diskussion des “streng”. — Ist  $f$  monoton wachsend, so sind alle Differenzenquotienten

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq 0,$$

also auch deren Grenzwerte. Umgekehrt: Ist  $t_1 < t_2$ , so gilt unter der Voraussetzung (2):

$$f(t_2) - f(t_1) = f'(\tau)(t_2 - t_1) \geq 0. \quad \lrcorner$$

② Betrachte die Funktion

$$f(t) := 5t^3 - 3t^5$$

mit der Ableitung

$$f'(t) = 15t^2 - 15t^4 = 15t^2(1 - t^2).$$

Wie man sofort sieht, ist

$$f'(t) \begin{cases} = 0 & (t \in \{-1, 0, 1\}), \\ > 0 & (0 < |t| < 1), \\ < 0 & (|t| > 1). \end{cases}$$

Hiernach ist  $f$  im Intervall  $[-1, 1]$  streng monoton wachsend und in den beiden Intervallen  $\mathbb{R}_{\leq -1}$  und  $\mathbb{R}_{\geq 1}$  streng monoton fallend (Fig. 3.3.4). ○

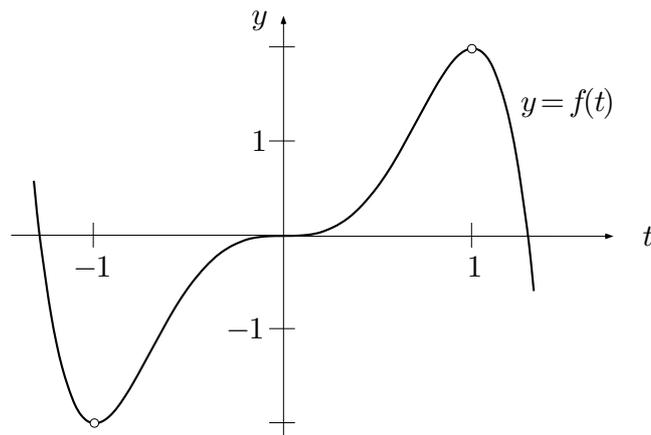


Fig. 3.3.4

Das Vorzeichen der ersten Ableitung  $f'$  gibt also Auskunft über die Monotonieeigenschaften von  $f$  längs  $\text{dom}(f)$ . Wenn wir schon dabei sind, betrachten wir auch noch das Vorzeichen der zweiten Ableitung  $f''$ .

Gilt in einem Teilintervall  $I \subset \text{dom}(f)$  durchwegs

$$f''(t) > 0,$$

so besagt **(3.10)**, angewandt auf  $f'$  anstelle von  $f$ : Die Funktion  $f'$  ist auf  $I$  streng monoton wachsend. Durchläuft also der Punkt  $(t, f(t))$  den betreffenden Teil des Graphen  $\mathcal{G}(f)$  von links nach rechts, so nimmt die Steigung der Tangente monoton zu (Fig. 3.3.5). Dann ist aber auch

$$\arg \mathbf{v}(\cdot) = \arg(1, f'(\cdot)) = \arctan f'(\cdot)$$

monoton wachsend, das heißt, die Tangente dreht sich in positivem Sinn. Man sagt, die Funktion sei in diesem Intervall **(nach unten) konvex**. Wie wir später zeigen werden, liegt der Graph einer konvexen Funktion immer oberhalb seiner Tangenten; diese werden im vorliegenden Zusammenhang auch **Stützgeraden** der betreffenden Funktion genannt.

Gilt jedoch in einem Intervall  $I$  durchwegs

$$f''(t) < 0,$$

so dreht sich die Tangente rechtsherum, wenn man  $\mathcal{G}(f)$  von links nach rechts durchläuft (Fig. 3.3.6). Die Funktion  $f$  wird dann **konkav** (oder meinetwegen “nach oben konvex”) genannt, und der Graph von  $f$  hängt unterhalb aller seiner Tangenten, die ihn gewissermaßen von oben “stützen”.

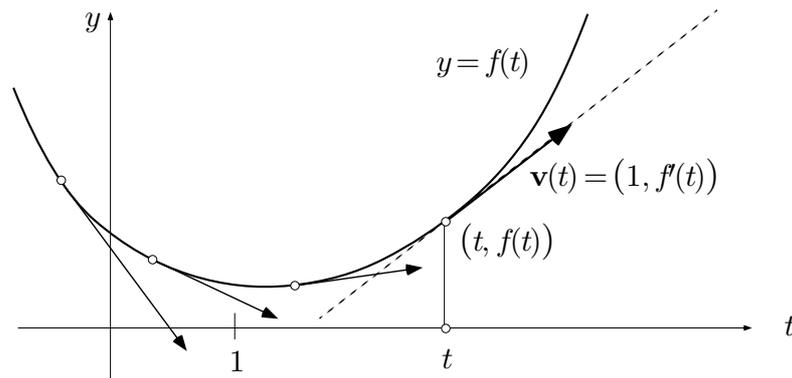


Fig. 3.3.5

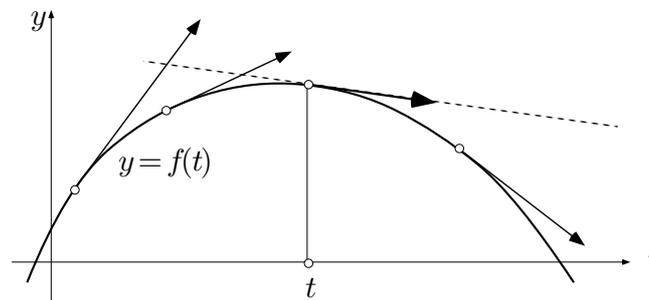


Fig. 3.3.6

③ Wir betrachten die Funktionen

$$b_\alpha(t) := (1+t)^\alpha \quad (t > -1)$$

(Binomialreihe!) für verschiedene Werte des reellen Parameters  $\alpha$ . — Man erhält nacheinander

$$b'_\alpha(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1}, \quad b''_\alpha(t) = \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}.$$

Wegen  $b'_\alpha(0) = \alpha$  besitzt die Tangente, die  $\mathcal{G}(b_\alpha)$  im Punkt  $P_0 := (0, 1)$  berührt, die Gleichung

$$y = 1 + \alpha t.$$

Was nun das Vorzeichen von  $b''_\alpha$  betrifft, so ist

$$\operatorname{sgn} b''_\alpha = \operatorname{sgn} \alpha \cdot \operatorname{sgn} (\alpha - 1) = \begin{cases} 1 & (\alpha > 1 \text{ oder } \alpha < 0), \\ -1 & (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

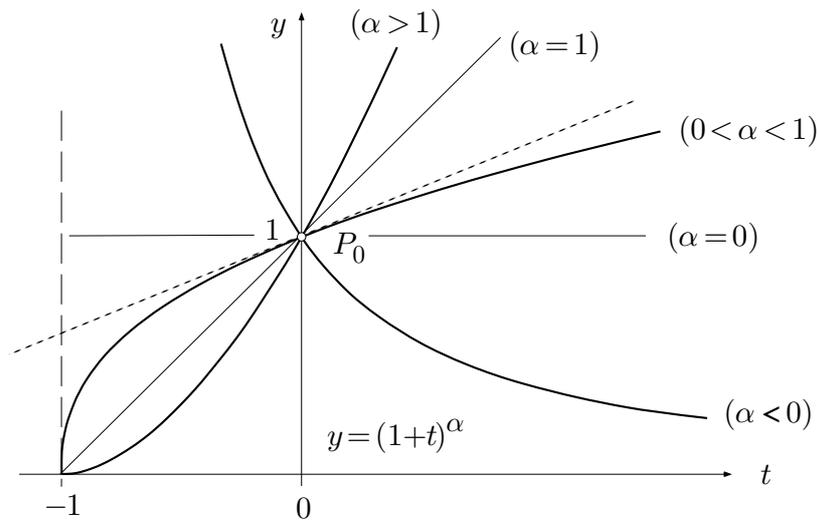


Fig. 3.3.7

Die Funktion  $b_\alpha$  ist somit konvex, falls  $\alpha > 1$  oder  $\alpha < 0$ , und konkav, falls  $0 < \alpha < 1$ ; in den Fällen  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$  schließlich ist  $\mathcal{G}(b_\alpha)$  eine Gerade, siehe die Fig. 3.3.7.

Da die Tangente im Punkt  $P_0$  in jedem Fall eine Stützgerade des Graphen ist, ergibt sich als Nebenprodukt die sogenannte **Bernoullische Ungleichung**:

— Ist  $\alpha \leq 0$  oder  $\alpha \geq 1$ , so gilt

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t \quad (t > -1);$$

— ist jedoch  $0 \leq \alpha \leq 1$ , so gilt

$$(1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t \quad (t > -1).$$

○

Wechselt  $f''$  an der Stelle  $t_0$  das Vorzeichen:

$$f''(t_0) = 0, \quad (\operatorname{sgn} f'')(t_0-) = -(\operatorname{sgn} f'')(t_0+),$$

so geht  $f$  beim Durchlaufen des Punktes  $P_0 := (t_0, f(t_0))$  vom konkaven zum konvexen Charakter über, oder umgekehrt; der Graph besitzt an der Stelle  $P_0$  einen **Wendepunkt** (Fig. 3.3.8).

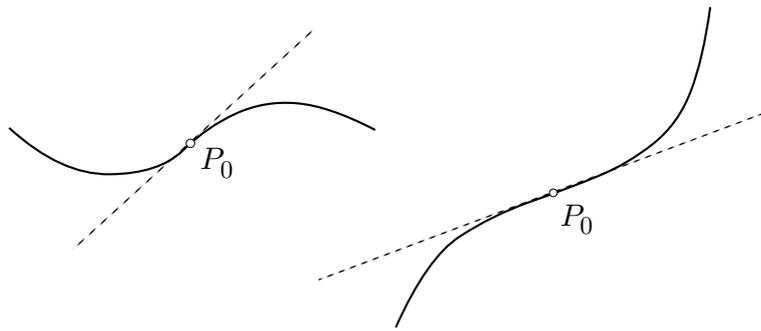


Fig. 3.3.8

④ Die **kubischen Parabeln**, das sind die Graphen der Polynome

$$p(t) := at^3 + bt^2 + ct + d, \quad a \neq 0,$$

besitzen alle einen Wendepunkt, denn

$$p''(t) = 6at + 2b$$

besitzt genau eine Nullstelle  $t_0 := -\frac{b}{3a}$  und wechselt dort das Vorzeichen. In der Figur 3.3.9 sind zwei Varianten dargestellt. ○

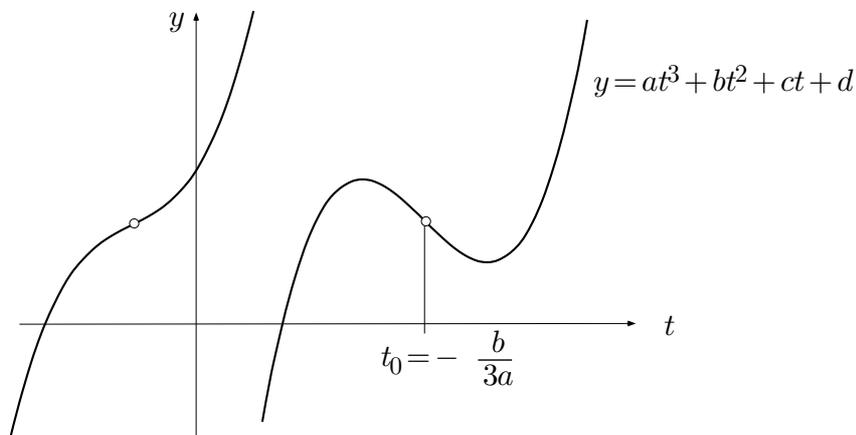


Fig. 3.3.9

In der nachstehenden Figur 3.3.10 werden die qualitativen Beziehungen zwischen den Graphen von  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  noch einmal zusammengefaßt.

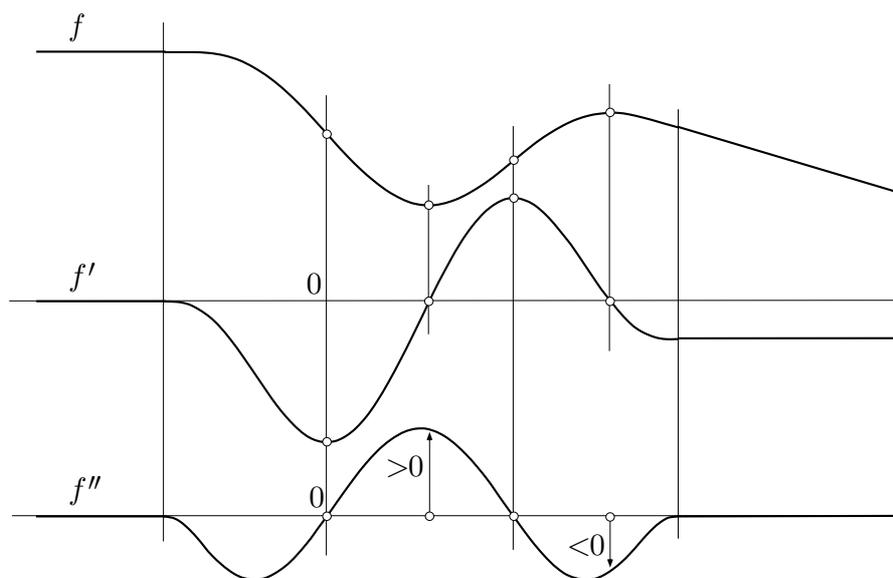


Fig. 3.3.10

## Aufgaben

1. Zeige: Die Gleichung  $x^2 = 2^x$  hat genau drei reelle Lösungen. (*Hinweis:* Betrachte die Funktion  $f(x) := 2^x - x^2$ . Mindestens drei Lösungen mit Zwischenwertsatz, höchstens drei Lösungen mit Hilfe des Satzes von Rolle, angewandt auf  $f / f' / f''$ .)
2. (M) Berechne die folgenden Grenzwerte:
  - (a)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t - \sinh t}$ ,
  - (b)  $\lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{\sin t + \sin(3t)}{\cos(2t)}$ ,
  - (c)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{b^t - 1}$  ( $a, b > 0$ ),
  - (d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(\cos t)}{\cosh t - 1}$ ,
  - (e)  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^\alpha - t^\beta}{t^{1/\beta} - t^{1/\alpha}}$  ( $\alpha\beta(\alpha - \beta) \neq 0$ ),
  - (f)  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 2 \sin t)^{\cot t}$  (*Hinweis:* Logarithmieren).

### 3.4 Taylor-Approximation

#### Zur Einführung

In der fundamentalen Beziehung 3.1.(4) ist enthalten, daß die Ableitung zur approximativen Berechnung von Funktionswerten herangezogen werden kann. Indem man nämlich den  $o$ -Term in 3.1.(4) vernachlässigt, erhält man die Möglichkeit, eine beliebige Funktion in der unmittelbaren Umgebung einer festen Stelle  $t_0$  zu *linearisieren* und so mit bescheidenem Rechenaufwand approximativ zu berechnen:

$$f(t) \doteq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad (t \doteq t_0) . \quad (1)$$

Eine Fehlerabschätzung ist damit allerdings nicht verbunden. Im Graphenbild läuft (1) darauf hinaus, daß  $\mathcal{G}(f)$  in der Umgebung von  $P_0 := (t_0, f(t_0))$  durch die Tangente in  $P_0$  ersetzt wird (Fig. 3.4.1).

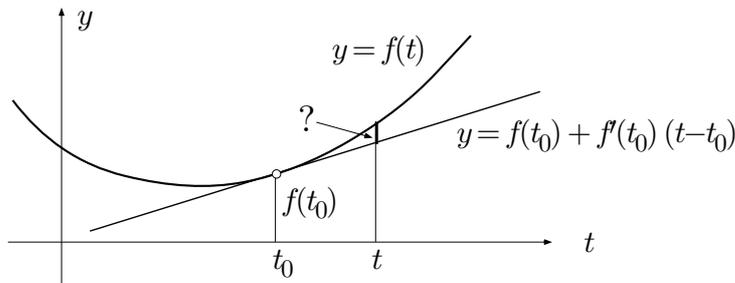


Fig. 3.4.1

① Gesucht ist ein Näherungswert für die Zahl  $\sqrt[5]{1023}$ . Hierzu betrachten wir die Funktion

$$f(t) := t^{1/5}$$

in der Umgebung der Stelle  $t_0 := 1024$  und schreiben

$$f(1023) \doteq f(1024) + f'(1024)(1023 - 1024) .$$

Nun ist  $f(1024) = (2^{10})^{1/5} = 4$ , ferner hat man

$$f'(t) = \frac{1}{5} t^{\frac{1}{5}-1} = \frac{t^{1/5}}{5t}$$

und somit  $f'(1024) = \frac{4}{5 \cdot 1024} = 0.00078125$ . Damit erhalten wir

$$\sqrt[5]{1023} \doteq 4 + 0.00078125 \cdot (-1) = 3.99921875 .$$

Der Tabellenwert ist 3.999218445.

○

② Ist  $|t|$  sehr klein gegenüber 1, in Zeichen:  $|t| \ll 1$ , so gilt

$$\frac{1}{1+t} \doteq 1-t. \quad (2)$$

Die Funktion  $f(t) := 1/(1+t)$  hat nämlich an der Stelle  $t_0 := 0$  den Wert 1 und die Ableitung  $f'(t) = -1/(1+t)^2$  den Wert  $-1$ .

Auf der Beziehung (2) beruht die Lebensweisheit, daß die Aussagen “A ist 2% teurer als B” und “B ist 2% billiger als A” kompatibel sind. Die analogen Aussagen mit 25% anstelle von 2% sind aber nicht mehr miteinander verträglich.  $\bigcirc$

Um bessere Approximationen und auch Fehlerabschätzungen zu erhalten, müssen wir die höheren Ableitungen ins Spiel bringen, die für eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$  rekursiv wie folgt definiert sind:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(k+1)} := (f^{(k)})' \quad (k \geq 0).$$

Anstelle von  $f^{(k)}$  schreibt man auch  $\frac{d^k}{dt^k} f(t)$ ,  $D^k f$  und ähnlich.

③ Es sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  fest. Dann ist

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}.$$

Mit vollständiger Induktion beweist man die **Leibnizsche Formel** für die  $n$ -te Ableitung eines Produkts:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Ferner:

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{1-t} = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}. \quad \bigcirc$$

Zurück zu unseren Approximationen. Um eine Indexstufe einzusparen, bezeichnen wir im folgenden den festgehaltenen “Arbeitspunkt” auf der  $t$ -Achse mit  $a$  statt mit  $t_0$  und nehmen zunächst  $a := 0$  an (die anvisierte Theorie ist natürlich translationsinvariant). Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$  sei in der Umgebung der Stelle 0 so oft wie nötig differenzierbar. Dann ist die “nullte Taylor-Approximation von  $f$  an der Stelle 0” gegeben durch

$$f(t) \doteq f(0) \quad (t \doteq 0) \quad (3_0)$$

und die “erste Taylor-Approximation” durch

$$f(t) \doteq f(0) + f'(0)t \quad (t \doteq 0) . \quad (3_1)$$

Hier wird  $f$  in der Umgebung von  $a := 0$  zunächst durch ein Polynom vom Grad  $\leq 0$  approximiert, dessen Wert an der Stelle 0 mit  $f(0)$  übereinstimmt, dann durch ein Polynom vom Grad  $\leq 1$ , dessen Wert und erster Ableitungswert an der Stelle 0 bzw. mit  $f(0)$  und  $f'(0)$  übereinstimmen. Es liegt nahe, diesen Gedanken weiterzuführen und im nächsten Schritt die Funktion  $f$  in der Umgebung von 0 “quadratisch” zu approximieren — gemeint ist: durch ein Polynom vom Grad  $\leq 2$ , das auch noch die zweite Ableitung  $f''(0)$  richtig wiedergibt.

### Konstruktion des Taylor-Polynoms

Es soll also eine Folge von Polynomen

$$j^0f, j^1f, j^2f, \dots$$

(‘ $j^rf$ ’ ist ein Bezeichner!) mit folgenden Eigenschaften konstruiert werden:

- (a) Jedes  $j^rf$  besitzt einen Grad  $\leq r$ .
- (b) Für  $0 \leq k \leq r$  gilt

$$(j^rf)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) .$$

Die Forderung (b) scheint vernünftig, denn nach (a) sind  $r + 1$  Koeffizienten zu bestimmen. Wir setzen noch  $j^{-1}f(t) \equiv 0$  und haben nach (3<sub>0</sub>) und (3<sub>1</sub>):

$$j^0f(t) \equiv f(0) , \quad j^1f(t) := f(0) + f'(0)t .$$

Für den allgemeinen Rekursionsschritt nehmen wir an,  $j^{r-1}f$  sei bestimmt und besitze die verlangten Eigenschaften. Setzen wir zur Abkürzung

$$j^rf - j^{r-1}f =: p ,$$

so muß das (vorderhand unbekannte) Polynom  $p$  den folgenden Bedingungen genügen (und das ist dann auch hinreichend):

- Der Grad von  $p$  ist  $\leq r$ .
- $p(0) = p'(0) = \dots = p^{(r-1)}(0) = 0$  .  
(Für  $0 \leq k \leq r - 1$  müssen ja die  $k$ -ten Ableitungen von  $j^{r-1}f$  und von  $j^rf$  bei 0 mit denen von  $f$  übereinstimmen.)
- $p^{(r)}(0) = f^{(r)}(0)$  .  
(Die  $r$ -te Ableitung von  $j^{r-1}f$  ist  $\equiv 0$ , und  $(j^rf)^{(r)}(0)$  sollte ja gleich  $f^{(r)}(0)$  sein.)

Es gibt genau ein Polynom  $p$ , das diese Bedingungen erfüllt, nämlich

$$p(t) := \frac{f^{(r)}(0)}{r!} t^r$$

(das war nicht schwer zu finden!). Folglich ist

$$j^r f = j^{r-1} f + \frac{f^{(r)}(0)}{r!} t^r,$$

und durch Aufsummieren erhalten wir definitiv

$$\begin{aligned} j^n f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \end{aligned}$$

Damit ist die durch (a) und (b) beschriebene Aufgabe gelöst: Das Polynom vom Grad  $\leq n$  mit den richtigen Ableitungswerten an der Stelle  $a := 0$  ist gefunden. Man nennt  $j^n f$  den  **$n$ -Jet** (oder auch das  **$n$ -te Taylorsche Approximationspolynom**) von  $f$  an der Stelle 0. Etwas allgemeiner ist

$$j_a^n f(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

der  **$n$ -Jet von  $f$  an der Stelle  $a$** . — Die formale Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

heißt **Taylor-Reihe von  $f$  an der Stelle  $a$** ; es handelt sich um eine Potenzreihe mit Mittelpunkt  $a$ . Die  $n$ -Jets  $j_a^n f$  sind die Partialsummen dieser Reihe.

Die Figur 3.4.2 zeigt einige  $n$ -Jets der Sinusfunktion an der Stelle  $a := 0$ . Man erkennt deutlich, wie sich der  $t$ -Bereich, in dem  $j^n$  eine brauchbare Approximation liefert, mit wachsendem  $n$  vergrößert.

## Qualität der Approximation

Wir kommen nun zu dem analytischen Problem, herauszufinden, wie gut  $j_a^n f$  die Ausgangsfunktion  $f$  in der Umgebung von  $a$  approximiert. Wir schreiben

$$f(t) = j_a^n f(t) + R_n(t) \tag{4}$$

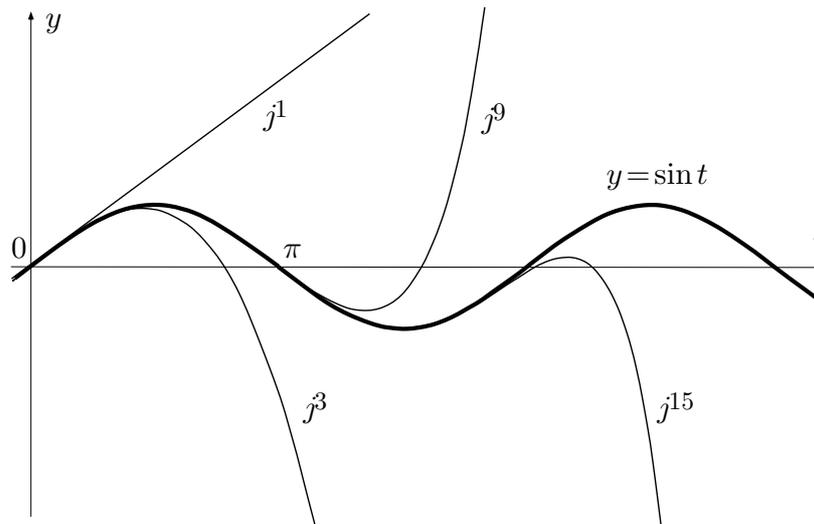


Fig. 3.4.2

und hoffen natürlich, daß das  $n$ -te Restglied  $R_n(t)$ , auch **Abbrechfehler** genannt, für  $t \doteq a$  und größeres  $n$  sehr sehr klein wird. Es gibt verschiedene Darstellungen des Restglieds. Man benötigt sie für Konvergenzuntersuchungen und für die numerische Abschätzung des Abbrechfehlers, nicht aber, um den Funktionswert auf einem unerhörten Umweg doch noch exakt zu berechnen. Wir beweisen darüber:

**(3.11)** Für ein geeignetes  $\tau$  zwischen  $a$  und  $t$  hat das Restglied in (4) den Wert

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1},$$

das heißt, es gilt

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

Das Restglied sieht hier fast so aus wie das erste vernachlässigte Glied der Taylor-Reihe. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß  $f^{(n+1)}$  an der Stelle  $a$  stetig ist, so folgt aus Satz **(3.11)** sofort:

$$\mathbf{(3.12)} \quad R_n(t) = o((t-a)^n) \quad (t \rightarrow a).$$

Das Restglied ist hiernach für  $t \rightarrow a$  von kleinerer Größenordnung als der letzte in  $j_a^n f$  berücksichtigte bzw. auftretende Term (ausgenommen natürlich im Fall  $j_a^n f = 0$ , wo  $R_n(t) \equiv f(t)$  ist, s.u.).

Zum Beweis von **(3.11)** benötigen wir das folgende Lemma:

**(3.13)** *Es sei  $t > a$ . Ist  $g$  im Intervall  $[a, t]$  hinreichend oft differenzierbar und ist*

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0, \quad (5)$$

*so gilt für ein geeignetes  $\tau \in ]a, t[$ :*

$$g(t) = \frac{g^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

□ Für  $n = 0$  lautet die Behauptung: Es gibt ein  $\tau \in ]a, t[$  mit

$$g(t) = g'(\tau)(t-a).$$

Dies trifft wegen  $g(a) = 0$  zu nach Satz **(3.6)** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Das Lemma sei daher richtig für  $n$ , und die Funktion  $g$  genüge neben (5) noch der zusätzlichen Bedingung

$$g^{(n+1)}(a) = 0. \quad (6)$$

Betrachte neben  $g$  die weitere Funktion

$$h(t) := (t-a)^{n+2}$$

mit der Ableitung

$$h'(t) = (n+2)(t-a)^{n+1}.$$

Nach Satz **(3.7)** gibt es ein  $\tau_1 \in ]a, t[$  mit

$$\frac{g(t)}{(t-a)^{n+2}} = \frac{g(t) - g(a)}{h(t) - h(a)} = \frac{g'(\tau_1)}{h'(\tau_1)} = \frac{g'(\tau_1)}{(n+2)(\tau_1 - a)^{n+1}}. \quad (7)$$

Nun genügt  $g'$  wegen (5) und (6) auf dem Intervall  $[a, \tau_1]$  der Induktionsvoraussetzung. Es gibt daher ein  $\tau \in ]a, \tau_1[$  (Fig. 3.4.3) mit

$$g'(\tau_1) = \frac{g^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (\tau_1 - a)^{n+1}.$$

Setzen wir dies rechts in (7) ein, so ergibt sich gerade

$$\frac{g(t)}{(t-a)^{n+2}} = \frac{g^{(n+2)}(\tau)}{(n+2)!},$$

wie für die Induktion erforderlich. □



Fig. 3.4.3

Damit kommen wir zum Beweis von Satz **(3.11)**:

□ Die Funktion  $R_n(\cdot)$  ist definiert durch (4). Nach Konstruktion besitzt  $R_n$  an der Stelle  $a$  verschwindende Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  und genügt damit den Voraussetzungen über  $g$  unseres Lemmas. Da  $j_a^n f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$  ist, stimmt  $R_n^{(n+1)}(\cdot)$  mit  $f^{(n+1)}$  überein, und wir erhalten durch Anwendung des Lemmas:

$$R_n(t) = \frac{R_n^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1} . \quad \square$$

## Beispiele und Anwendungen

④ Es soll  $\log 1.2$  mit Hilfe der Darstellung

$$\log t = j_1^n \log(t) + R_n(t)$$

auf  $10^{-3}$  genau berechnet werden (Fig. 3.4.4). Der Tabelle

$k$	$f^{(k)}(t)$	$f^{(k)}(1)$
0	$\log t$	0
1	$1/t$	1
2	$-1/t^2$	-1
3	$2/t^3$	2
4	$-6/t^4$	

entnimmt man

$$|f^{(4)}(t)| \leq 6 \quad (t \geq 1);$$

Satz **(3.11)** mit  $a := 1$ ,  $t := 1.2$  liefert daher die Abschätzung

$$|R_3(1.2)| = \frac{|f^{(4)}(\tau)|}{4!} (0.2)^4 \leq \frac{6}{4!} (0.2)^4 = 4 \cdot 10^{-4} ,$$

so daß wir  $R_3$  vernachlässigen dürfen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \log 1.2 &\doteq j_1^3 \log(1.2) \\ &= 0 + 1 \cdot 0.2 + \frac{-1}{2} (0.2)^2 + \frac{2}{3!} (0.2)^3 = 0.18267 \end{aligned}$$

mit einem Fehler  $\leq 4 \cdot 10^{-4}$ . Der Tabellenwert ist  $\log 1.2 = 0.182321557$ .

○

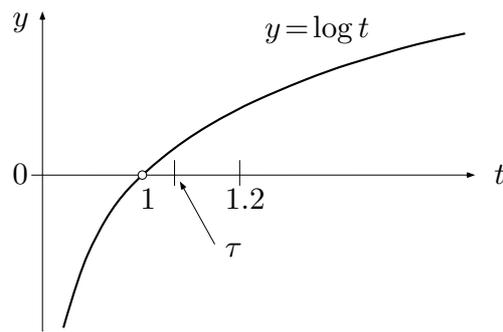


Fig. 3.4.4

⑤ Wir zeigen, daß der Graph einer konvexen Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  oberhalb seiner Tangenten liegt.

┌ Es gelte

$$\forall t \in I: \quad f''(t) > 0,$$

und es sei  $a \in I$  ein fest gewählter Punkt. Die Tangente in dem zu  $a$  gehörigen Graphenpunkt  $P_0$  (Fig. 3.4.5) hat die Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)(t - a) = j_a^1 f(t).$$

Es sei  $t \in I$ ,  $t \neq a$ , beliebig. Nach (3.11) gibt es ein  $\tau$  zwischen  $t$  und  $a$  mit

$$f(t) = j_a^1 f(t) + \frac{f''(\tau)}{2} (t - a)^2.$$

Hier ist der zweite Summand rechter Hand  $> 0$ .

┐  
○

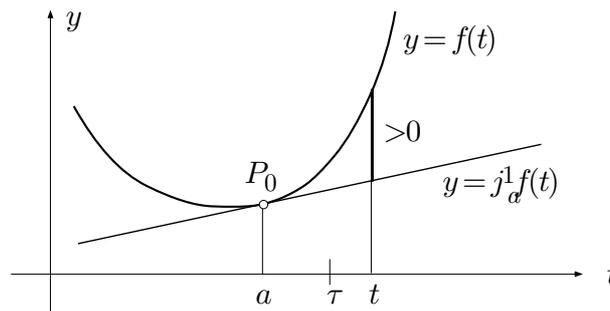


Fig. 3.4.5

Satz (3.12) setzt uns instand, das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines kritischen Punktes näher zu untersuchen. Wir zeigen:

**(3.14)** Es sei  $t_0$  ein kritischer Punkt der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , und zwar gelte für ein  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) &= 0, \\ f^{(n)}(t_0) &=: A \neq 0. \end{aligned}$$

Ist  $n$  gerade, so besitzt  $f$  an der Stelle  $t_0$  ein lokales Minimum, falls  $A > 0$ , und ein lokales Maximum, falls  $A < 0$ . Ist  $n$  ungerade, so besitzt  $f$  an der Stelle  $t_0$  kein lokales Extremum, hingegen einen Wendepunkt.

□ Der Einfachheit halber sei  $t_0 = 0$ . Der Punkt  $t_0$  ist definitionsgemäß ein innerer Punkt von  $\text{dom}(f)$  (Fig. 3.2.6), somit kann die Größe  $t - t_0 = t$  im folgenden beiderlei Vorzeichen annehmen. Nach Satz (3.12) ist

$$\begin{aligned} f(t) &= j_0^n f(t) + o(t^n) \\ &= f(0) + \frac{A}{n!} t^n + o(t^n) \quad (t \rightarrow 0), \end{aligned}$$

denn alle übrigen Glieder des  $n$ -Jets entfallen. Wir schreiben das in der Form

$$f(t) - f(0) = t^n \left( \frac{A}{n!} + o(1) \right) \quad (t \rightarrow 0).$$

Wegen  $A \neq 0$  gilt daher für alle hinreichend nahe bei 0 gelegenen  $t$ :

$$\text{sgn}(f(t) - f(0)) = \text{sgn}(t^n) \cdot \text{sgn} A.$$

Hieraus folgen alle Behauptungen bezüglich eines allfälligen lokalen Extremums. — Es sei weiter  $n \geq 3$  ungerade. Wenden wir Satz (3.12) auf  $f''$  an, so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} f''(t) &= j_0^{n-2} f''(t) + o(t^{n-2}) \\ &= t^{n-2} \left( \frac{A}{(n-2)!} + o(1) \right) \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

und somit

$$\text{sgn} f''(t) = \text{sgn} t \cdot \text{sgn} A$$

für alle  $t$  in der Nähe von 0. Folglich wechselt  $f''$  an der Stelle 0 das Vorzeichen, wie behauptet. □

⑥ Es sollen die kritischen Stellen der Funktion

$$f(t) := (t - 3)^3 (t + 2)^2$$

untersucht werden. — Wir unterlassen tunlichst, das Produkt rechter Hand auszumultiplizieren, und berechnen nacheinander

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-3)^2(t+2)(3(t+2) + 2(t-3)) \\ &= 5(t-3)^2(t+2)t, \\ f''(t) &= 5(t-3)(2(t+2)t + (t-3)t + (t-3)(t+2)) \\ &= 5(t-3)(4t^2 - 6) = 20(t-3)(t - \sqrt{3/2})(t + \sqrt{3/2}), \\ f'''(t) &= 20 \left( \left( t^2 - \frac{3}{2} \right) + (t-3)2t \right). \end{aligned}$$

Es gibt daher die drei kritischen Stellen  $-2$ ,  $0$ ,  $3$ . Wir legen die folgende Tabelle an, in die wir auch noch die zwei weiteren Nullstellen  $\pm\sqrt{3/2}$  von  $f''$  aufnehmen:

$t_k$	$f(t_k)$	$f'(t_k)$	$f''(t_k)$	$f'''(t_k)$	Typ
$-2$	$0$	$0$	$-250$		lokales Maximum
$0$	$-108$	$0$	$90$		lokales Minimum
$3$	$0$	$0$	$0$	$150$	Wendepunkt
$\pm\sqrt{3/2}$		$\neq 0$	$0$	$\neq 0$	Wendepunkte

Diese Tabelle findet ihre graphische Bestätigung in der Figur 3.4.6. ○

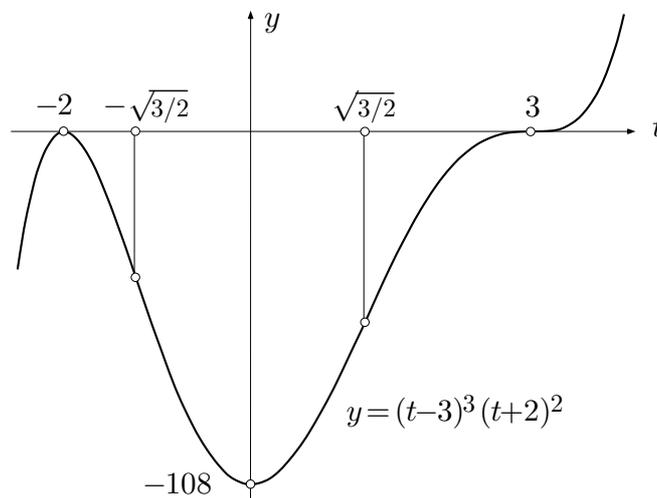


Fig. 3.4.6

## Das Newtonsche Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Wir machen nun einen Exkurs in ganz andere Gefilde und behandeln das **Verfahren von Newton** zur approximativen Lösung von Gleichungen der Form

$$f(x) = 0,$$

$f$  eine gegebene Funktion. Die unabhängige Variable bezeichnen wir hier mit  $x$ , um den Eindruck einer "Unbekannten" zu vermitteln. Außerdem läßt sich das Verfahren auf mehrdimensionale Situationen, das heißt: auf  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten, übertragen.

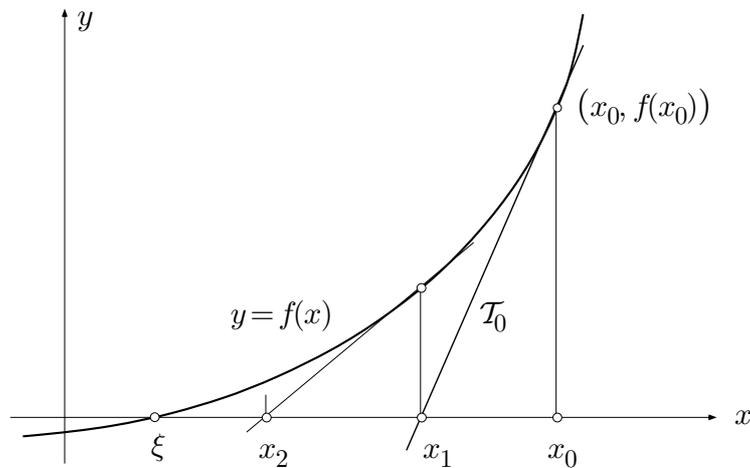


Fig. 3.4.7

Die Idee ist genial einfach (Fig. 3.4.7). Es sei  $x_0$  ein irgendwie gefundener Näherungswert für eine (unbekannte) Lösung  $\xi$  der obigen Gleichung. Wir ersetzen dann  $\mathcal{G}(f)$  durch die Tangente  $\mathcal{T}_0$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  und schneiden diese Tangente statt  $\mathcal{G}(f)$  mit der  $x$ -Achse. Es ist zu erwarten, daß der Schnittpunkt  $x_1$  näher bei  $\xi$  liegt als  $x_0$ . Das Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen und liefert eine Folge  $x_n$ , die unter günstigen Umständen gegen  $\xi$  konvergiert. (Es kann aber auch schiefgehen, wie Fig. 3.4.8 zeigt.)

Die geometrische Konstruktion läßt sich analytisch wie folgt nachvollziehen: Die Graphentangente  $\mathcal{T}_0$  besitzt die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

und schneidet daher die  $x$ -Achse an der Stelle

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

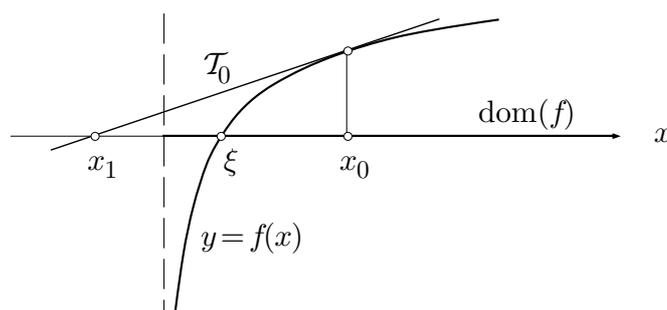


Fig. 3.4.8

Dieselbe Formel gilt auch für den allgemeinen Schritt  $x_n \mapsto x_{n+1}$ . Infolgedessen wird das Newtonsche Verfahren durch folgende Rekursionsvorschrift beschrieben:

$x_0$  : hinreichend nahe bei  $\xi$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten der Folge  $x_n$  untersuchen, wobei wir geeignete Annahmen treffen, die sicherstellen, daß  $x_0$  unter den gegebenen Umständen "hinreichend nahe bei  $\xi$ " liegt. (In der Praxis werden diese Bedingungen natürlich nicht immer verifiziert. Man beginnt einfach mit einem plausiblen Näherungswert  $x_0$  zu rechnen und sieht dann sehr bald, ob es klappt.)

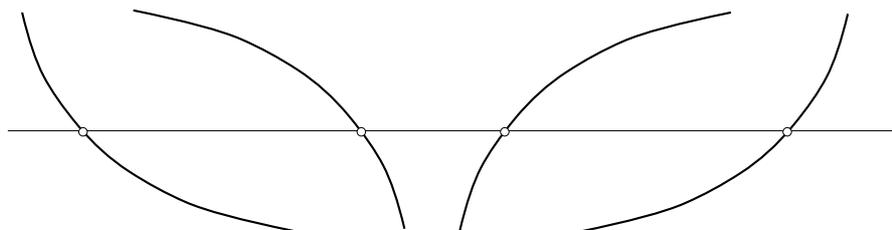


Fig. 3.4.9

Es sei ein Intervall  $I := [a, b]$  so bestimmt, daß gilt:

(a') 
$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

(b') 
$$\forall x \in I : f'(x)f''(x) \neq 0.$$

Der Graph von  $f \upharpoonright I$  hat dann eine der vier in Fig. 3.4.9 dargestellten Formen. Insbesondere ist  $f$  streng monoton auf  $I$  und besitzt somit genau eine Nullstelle  $\xi \in I$ . Wir nehmen etwa an, es sei  $f' > 0$  und  $f'' > 0$  auf  $I$  und setzen  $x_0 := b$ . (Je nachdem, ob  $f'$  und  $f''$  gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist  $x_0 := b$  oder  $x_0 := a$  zu wählen.) Dann treffen die folgenden Bedingungen für  $n = 0$  zu:

- (a)  $\xi < x_n$ ,
- (b)  $\forall x \in ]\xi, x_n]: f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ .

Damit ergibt sich für  $x_1$  jedenfalls

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Wir entwickeln nun die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  nach Taylor: Nach Satz (3.11) gibt es einen Punkt  $x^*$  zwischen  $x_0$  und  $\xi$  (Fig. 3.4.10) mit

$$0 = f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) + \frac{f''(x^*)}{2!}(\xi - x_0)^2.$$

Nach Division mit  $f'(x_0)$  folgt hieraus

$$0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0 + \xi + \frac{f''(x^*)}{2f'(x_0)}(x_0 - \xi)^2,$$

und das heißt

$$x_1 - \xi = \frac{f''(x^*)}{2f'(x_0)}(x_0 - \xi)^2. \quad (8)$$

Hier ist die rechte Seite  $> 0$  wegen (b). Es gilt daher

$$\xi < x_1 < x_0,$$

und folglich treffen die Bedingungen (a) und (b) auch für  $n = 1$  zu.

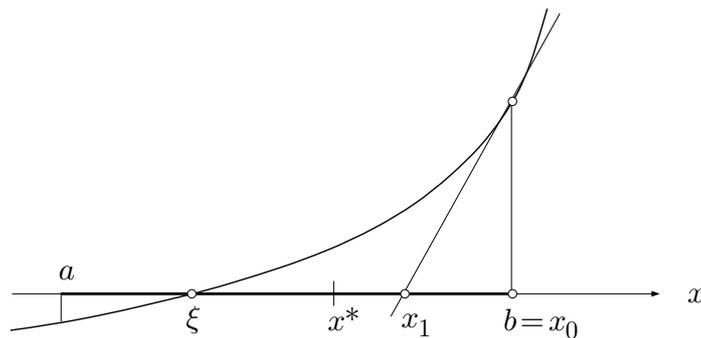


Fig. 3.4.10

Mit vollständiger Induktion ergibt sich: Die Folge  $x_n$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch  $\xi$ . Sie besitzt daher einen Grenzwert  $\xi' \in [\xi, x_0]$ . Wir führen nun in der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0)$$

den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  durch und erhalten

$$\xi' = \xi' - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')}.$$

Es folgt  $f(\xi') = 0$ , das heißt:  $\xi' = \xi$ , wie erwartet.

Das Newtonsche Verfahren liefert also in der Tat die gesuchte Nullstelle  $\xi$ . Man kann aber noch mehr sagen: Ist  $n$  hinreichend groß, so ist  $x_n$  schon recht nahe bei  $\xi$  und ebenso der in (8) auftretende Punkt  $x^* \in ]\xi, x_n[$ . Wir dürfen daher schreiben

$$x_{n+1} - \xi \doteq C(x_n - \xi)^2 \quad (n \text{ hinreichend groß})$$

mit

$$C := \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$

Dies ist folgendermaßen zu interpretieren: Das Newtonsche Verfahren **konvergiert quadratisch**, da sich die Abweichung  $x_n - \xi$  mit jedem Schritt im wesentlichen quadriert. Anders ausgedrückt: Ist  $C$  von der Größenordnung 1, so wird (nach einer gewissen Anfangsphase) die Anzahl der richtigen Dezimalstellen in der Näherung  $x_n \doteq \xi$  mit jedem Schritt verdoppelt.

⑦ Wir haben in Beispiel 1.3.⑥ mit Hilfe der Rekursionsformel

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

eine Folge  $x_n$  konstruiert, die sehr rasch gegen  $\sqrt{c}$  konvergiert. Das Geheimnis kann nun gelüftet werden: Man kommt auf diese Formel, indem man auf die Gleichung

$$f(x) := x^2 - c = 0$$

das Newtonsche Verfahren anwendet. Es ist nämlich

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - c}{2x} = \frac{1}{2} \left( x + \frac{c}{x} \right).$$

○

⑧ Von einem kreisförmigen Kuchen (Fig. 3.4.11) soll durch einen geradlinigen Schnitt ein Drittel abgeteilt werden. In welchem Abstand vom Mittelpunkt ist der Schnitt zu führen?

Verwenden wir als Hilfsvariable den halben Zentriwinkel  $\phi$ , so ist der Flächeninhalt  $A$  des abgeteilten Stückes gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} 2\phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi),$$

so daß wir die Gleichung

$$f(\phi) := \phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi) - \frac{\pi}{3} = 0$$

aufösen müssen. Es ist  $f(0) < 0$  und  $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ . Wir leiten ab und erhalten

$$f'(\phi) = 1 - \cos(2\phi), \quad f''(\phi) = 2 \sin(2\phi).$$

Die Rekursionsformel lautet daher

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \frac{\phi_n - \frac{1}{2} \sin(2\phi_n) - \frac{\pi}{3}}{1 - \cos(2\phi_n)}.$$

Da  $f'$  und  $f''$  im Intervall  $]0, \frac{\pi}{2}[$  gleiches Vorzeichen besitzen, wählen wir mit Vorteil  $\phi_0 := \pi/2$  und erhalten

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{3}}{1 - (-1)} = \frac{5\pi}{12}.$$

Die weiteren Werte sind:

$$\phi_0 = 1.57079$$

$$\phi_1 = 1.30899$$

$$\phi_2 = 1.3026736661$$

$$\phi_3 = 1.3026628373 \dots$$

$$\phi_4 = 1.3026628373 \dots$$

Der gesuchte Abstand  $x$  beträgt daher

$$x = \cos \phi \doteq 0.2649.$$



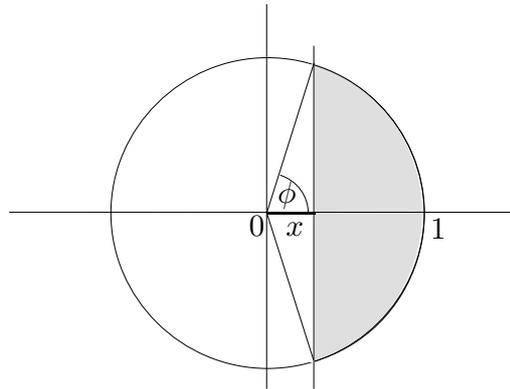


Fig. 3.4.11

## Die Taylor-Reihe als Potenzreihe

Wir kehren zurück zur Taylor-Entwicklung.

Ist eine Funktion in der Umgebung von  $a$  beliebig oft differenzierbar, so kann man die unendliche Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k =: j_a^{\infty} f(t)$$

bilden, und es stellt sich natürlich die Frage, ob diese Reihe die Funktion  $f$  **darstellt**, das heißt: ob in einem geeigneten Intervall  $I := ]a - \rho, a + \rho[$  die Identität

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad (t \in I) \quad (9)$$

zutrifft.

⑨ Ist  $f$  zufälligerweise ein Polynom vom Grad  $\leq n$ , also

$$f(t) := a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad (10)$$

so ist von vorneherein

$$j_0^{\infty} f = j_0^n f = f,$$

denn erstens verschwinden alle Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $> n$ , und zweitens gibt es nur *ein* Polynom vom Grad  $\leq n$ , dessen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  bei 0 gegebene Werte annehmen. Es folgt: Eine Polynomfunktion (10) ist schon ihre eigene Taylorreihe an der Stelle 0. Man kann aber noch mehr sagen: Für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  ist  $j_a^{\infty} f (= j_a^n f)$  nichts anderes als “das nach Potenzen von  $(t-a)$  entwickelte Polynom  $f$ ” und stimmt wertmäßig für alle  $t$  mit  $f(t)$  überein.  $\bigcirc$

Um die obige Frage zu entscheiden, müßte man untersuchen, ob das Restglied

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}$$

auf einem  $t$ -Intervall  $I := ]a - \rho, a + \rho[$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Im allgemeinen ist das der Fall, das heißt, es läßt sich ein Intervall  $I$  finden, auf dem (9) gilt.

⑩ Die Funktion

$$f(t) := \frac{1}{1-t}$$

besitzt die Ableitungen

$$f^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} \quad (k \geq 0)$$

(siehe Beispiel ③). Somit ist

$$\begin{aligned} j_0^\infty f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1 + t + t^2 + \dots, \end{aligned}$$

und hier stellt die rechte Seite in der Tat auf dem Intervall  $] -1, 1[$  die Funktion  $f$  dar. ○

Es gibt aber auch Gegenbeispiele:

⑪ Für jedes feste  $n \geq 0$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-1/t^2}}{t^n} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y}}{y^{-n/2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{n/2}}{e^y} = 0;$$

das heißt, es ist

$$e^{-1/t^2} = o(t^n) \quad (t \rightarrow 0)$$

für jedes  $n$ . Hieraus folgt (ohne Beweis): Sämtliche Ableitungen der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & (t \neq 0), \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

(Fig. 3.4.12) an der Stelle 0 sind 0. Dann ist aber auch

$$j_0^\infty f = 0 \quad (\neq f). \quad \text{○}$$

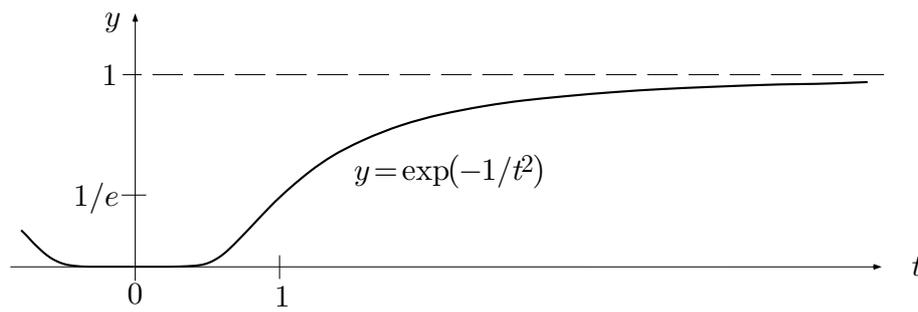


Fig. 3.4.12

Folgendes ist jedoch immer richtig:

**(3.15)** Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{X}$  durch eine Potenzreihe definiert:

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-a)^k \quad (t \in I),$$

so ist diese Reihe auch schon die Taylor-Reihe von  $f$  an der Stelle  $a$ , das heißt, es gilt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

□ Gemäss **(2.15)**(b) dürfen wir die gegebene Potenzreihe gliedweise differenzieren, wobei dann der “vorderste” Term wegfällt:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (t-a)^{k-1}.$$

Nach  $r \geq 1$  derartigen Schritten ergibt sich

$$f^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k k(k-1) \cdots (k-r+1) (t-a)^{k-r}.$$

Wenn wir das an der Stelle  $t := a$  evaluieren, so liefert rechter Hand nur der konstante Term, also derjenige mit  $k = r$ , einen Beitrag, und wir erhalten

$$f^{(r)}(a) = c_r r!.$$

□

## Aufgaben

1. (M) Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) := \frac{1}{1-t^2}$$

an der Stelle 0. Interpretiere das Ergebnis. (*Hinweis:*  $f$  läßt sich als Summe von zwei "einfacheren" Funktionen schreiben.)

2. Bestimme das Taylor-Polynom  $j_0^2 \tan(t)$  sowie eine im Intervall  $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$  gültige Fehlerabschätzung. (*Hinweis:* Verwende wiederholt  $\tan' = 1 + \tan^2$ .)
3. Aus dem Additionstheorem für den Tangens folgt relativ leicht die Formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

Man benütze diese Formel und die Taylor-Entwicklung des Arcustangens, um  $\pi/4$  mit einem Fehler von höchstens  $10^{-4}$  zu berechnen.

4. Jemand möchte  $\sinh 1$  auf hundert Dezimalstellen genau berechnen. Wieviele Glieder der Taylor-Entwicklung  $j_0^\infty \sinh$  muß sie berücksichtigen?
5. (M) Die Gleichung  $z^2 - 3z + 27 = 0$  besitzt eine Lösung in der Nähe von  $z_0 := 1 + 5i$ . Man führe zwei Newton-Schritte durch zur Bestimmung eines besseren Näherungswerts  $z_2$ .

6. (M) Es sei

$$f(t) := \frac{t - t^3/3}{2 - t}.$$

Berechne das Taylor-Polynom  $j_0^7 f(t)$  und zeichne in einer einzigen Figur (den Ausschnitt passend wählen) die Graphen von  $f, j_0^1 f, j_0^2 f, \dots, j_0^5 f$ .

7. (M) Entwickle die Funktion  $f(t) := t^5$  an der Stelle  $a := 2$  nach Taylor. Um genau zu sein: Verlangt ist das Polynom  $j_2^3 f(t)$ .
8. Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion  $f(t) := \cos t \cosh t$  an der Stelle  $a := 0$ .
- (a) Berechne die ersten sechs nichtverschwindenden Terme mit Hilfe von (M).
- (b) Erwünscht wäre eine Formel für den  $n$ -ten Koeffizienten. (*Hinweis:* Stelle  $f$  als Summe von Exponentialfunktionen dar.)
9. Ein divisionsfreier Algorithmus zur Berechnung von Kehrwerten: Fasse den Kehrwert einer Zahl  $c \in ]0, 2[$  als Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{x} - c = 0$$

auf und wende das Newtonsche Verfahren an. Es resultiert eine einfache Rekursionsformel, die mit  $x_0 := 1$  beginnend eine schnell gegen  $1/c$  konvergente Folge  $x_n$  produziert. Für eine Fehlerabschätzung betrachte man die weitere Folge  $y_n := cx_n - 1$ .

10. Behandle die Aufgabe 2.2.8 nocheinmal mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens. Vergleiche die Konvergenzraten.
11. Ausgehend vom Näherungswert  $x_0 := 1$  bestimme man mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens die Nullstelle der Funktion  $f(x) := x^2$ . Man berechne explizit den  $n$ -ten Näherungswert  $x_n$ . Wie gut ist die Konvergenz, und warum ist sie nicht besser?
12. Die Funktion  $f$  ist für  $x \neq 0$  definiert durch

$$f(x) := \frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x - \cos x}$$

und an der Stelle  $x = 0$  sinngemäß, d.h. durch  $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Berechne  $f(0)$  und  $f'(0)$ . (*Hinweis:* Anfangsstücke der Taylor-Reihen von Zähler bzw. Nenner betrachten!)

13. Es sei

$$f(t) := \sin t + b \sin(2t) + c \sin(3t),$$

wobei die Parameter  $b$  und  $c$  so festzulegen sind, daß die Ableitungen

$$f^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

bis zu möglichst hoher Ordnung verschwinden.

(a) Bestimme  $b$  und  $c$ .

(b) Es gilt dann

$$f(t) = t^r (A + o(1)) \quad (t \rightarrow 0).$$

Bestimme  $r$  und  $A$  ( $\neq 0$ ).

## 3.5 Differentialgleichungen I

### Modellbildung, einführende Beispiele

Man erhält ein mathematisches Modell von einem realen, in der Natur oder der Technik angesiedelten "System", indem man einige als wesentlich und in ihrer Gesamtheit als ausreichend erachtete Zustandsgrößen (zum Beispiel: Druck, Lage und Geschwindigkeit einzelner Komponenten, Stromstärken an bestimmten Stellen eines Netzwerks usw.) herausgreift und sich überlegt, wie diese Größen in ihrer zeitlichen Entwicklung aneinander gekoppelt sind.

Das Ergebnis dieser Überlegungen sind die sogenannten **konstituierenden Gleichungen** des betreffenden Systems. Bei Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden sind das in aller Regel Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen. Die Herleitung dieser Gleichungen gehört zur Theorie des betreffenden realen Systems, die Mathematik stellt nur die Begriffe, wie "Ableitung", "Vektorraum", "periodisch" usw., zur Verfügung. Es gibt über das Aufstellen eines mathematischen Modells keine "Metatheorie" mit eigenen Lehrsätzen, die in entsprechenden Vorlesungen doziert werden könnte. Es ist vielmehr so, daß man nur an Hunderten von Beispielen beobachten und nachvollziehen kann, wie das etwa vor sich geht.

① Eine radioaktive Substanz  $X$  wird durch Zerfall ihrer Atome abgebaut zur Substanz  $Y$ , diese zur Substanz  $Z$ . Über den Zerfallsmechanismus macht man sich folgende Vorstellungen: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelnes zur Zeit  $t$  noch lebendes  $X$ -Atom in dem sehr kurzen Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  zerfällt, ist proportional zu  $\Delta t$ . Es gibt also eine Materialkonstante  $\lambda > 0$  mit

$$\mathcal{P}[\text{Zerfall in } [t, t + \Delta t]] \doteq \lambda \Delta t .$$

Im weiteren zerfallen die Atome unabhängig voneinander und unabhängig von ihrer Vorgeschichte. Bezeichnet also  $N(t)$  die Anzahl der zur Zeit  $t$  noch lebenden  $X$ -Atome, so kann man erwarten, daß im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  insgesamt

$$N(t) \cdot \mathcal{P}[\text{Zerfall in } [t, t + \Delta t]]$$

Stück davon zerfallen. Folglich gilt

$$N(t + \Delta t) - N(t) \doteq -N(t) \lambda \Delta t . \tag{1}$$

Ein  $X$ -Atom hat die sehr kleine Masse  $m_X$ . Wir dürfen daher die zur Zeit  $t$  vorhandene makroskopische Substanzmenge

$$x(t) := N(t) m_X$$

(= Totalmasse an Substanz  $X$ ) als kontinuierliche Variable auffassen. Aus (1) folgt sofort

$$x(t + \Delta t) - x(t) \doteq -x(t) \lambda \Delta t$$

und somit nach Division mit  $\Delta t$ :

$$(\dot{x}(t) \doteq) \quad \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \doteq -\lambda x(t),$$

wobei dieser Näherung eine sehr kurze Zeitspanne  $\Delta t > 0$  zugrundeliegt. Nun kommt ein weiterer Gedankensprung: Wir "gehen zum Limes über" und erklären: Für die reellwertige Funktion  $x(\cdot)$ , die die Totalmasse an Substanz  $X$  modelliert, gilt *exakt*

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t), \quad (2)$$

und zwar zu jedem Zeitpunkt  $t$ . In anderen Worten: Die unbekannt Funktion  $x(\cdot)$  und ihre Ableitung  $\dot{x}(\cdot)$  sind miteinander verknüpft durch die Gleichung

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

Wir haben hier zum ersten Mal eine sogenannte **Differentialgleichung** vor uns. Die Unbekannte in dieser Gleichung ist nicht eine Zahl oder ein Vektor, sondern eine *Funktion*: Gesucht sind diejenigen Funktionen  $t \mapsto x(t)$ , die *identisch in  $t$*  die Gleichung (2) befriedigen.

Betrachten wir alle drei Substanzen gleichzeitig, so werden wir offenbar auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x \\ \dot{y} &= \lambda x - \mu y \\ \dot{z} &= \mu y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

geführt; dabei bezeichnet  $\mu$  die Zerfallskonstante der Substanz  $Y$ . Ist  $\mu < \lambda$ , was wir im weiteren annehmen wollen, so zerfällt  $Y$  langsamer als  $X$ . Die Gleichungen (3) bilden die konstituierenden Gleichungen des betrachteten Substanzgemisches; sie gelten für alle Abläufe, bei denen diese drei Substanzen gleichzeitig im Spiel sind.

Ein real durchgeführtes Experiment beginnt zur Zeit  $t := 0$  mit drei vorgegebenen Anfangsmengen

$$x(0) := x_0, \quad y(0) := y_0, \quad z(0) := z_0. \quad (4)$$

Die physikalische Anschauung sagt uns, daß der weitere Ablauf durch diese **Anfangsbedingungen** eindeutig bestimmt ist. Demnach ist zu erwarten, daß das System (3) a priori unendlich viele Lösungen besitzt und daß erst die Angaben (4) einen ganz bestimmten Ablauf

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

aus dieser Lösungsgesamtheit  $\mathcal{L}$  festlegen. In anderen Worten: Das **Anfangswertproblem** (3)^(4) besitzt genau eine Lösung.

Wir wollen nun diese Lösung (auf unkomplizierte Weise) bestimmen. Als erstes erfüllt jedenfalls

$$x(t) := x_0 e^{-\lambda t}$$

die auf  $x(\cdot)$  allein bezüglichen Bedingungen. Für  $y(\cdot)$  machen wir den naheliegenden Ansatz

$$y(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t},$$

wobei die Koeffizienten  $A$  und  $B$  noch bestimmt werden müssen. Es folgt

$$\dot{y}(t) = -A\lambda e^{-\lambda t} - B\mu e^{-\mu t}.$$

Aufgrund der zweiten Gleichung (3) ist nun dafür zu sorgen, daß *identisch in  $t$*  gilt:

$$-A\lambda e^{-\lambda t} - B\mu e^{-\mu t} = \lambda(x_0 e^{-\lambda t}) - \mu(Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t})$$

bzw.

$$((\mu - \lambda)A - \lambda x_0) e^{-\lambda t} \equiv 0. \quad (5)$$

Falls es keine Lösung  $y(t)$  der vorgeschlagenen Form gibt, so muß sich das jetzt herausstellen: Es ist dann unmöglich, die Gleichung (5) identisch in  $t$  zu befriedigen. Es geht aber: Mit

$$A = -\frac{\lambda x_0}{\lambda - \mu}$$

ist (5) erfüllt. Aufgrund der Anfangsbedingung für  $y(\cdot)$  muß weiter  $A+B = y_0$  sein, so daß wir

$$B = y_0 + \frac{\lambda x_0}{\lambda - \mu}$$

erhalten. Damit ist  $y(\cdot)$  bestimmt zu

$$y(t) = y_0 e^{-\mu t} + \frac{\lambda x_0}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}).$$

Für  $z(\cdot)$  könnten wir ebenfalls einen geeigneten Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten hinschreiben. Stattdessen bemerken wir, daß nach (3) gilt:

$$(x + y + z)' = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0 .$$

Hieraus folgt mit Satz (3.8):

$$x(t) + y(t) + z(t) \equiv x_0 + y_0 + z_0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

(“Erhaltung der Substanz”), und es ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) &= x_0 + y_0 + z_0 - (x(t) + y(t)) \\ &= z_0 + y_0(1 - e^{-\mu t}) + x_0 \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda - \mu} e^{-\mu t} + \frac{\mu}{\lambda - \mu} e^{-\lambda t} \right) . \end{aligned}$$

Damit ist das Anfangswertproblem (3)^(4) vollständig gelöst. Wie erwartet, gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = x_0 + y_0 + z_0 .$$

Figur 3.5.1 zeigt einen typischen Ablauf dieses Experiments. ○

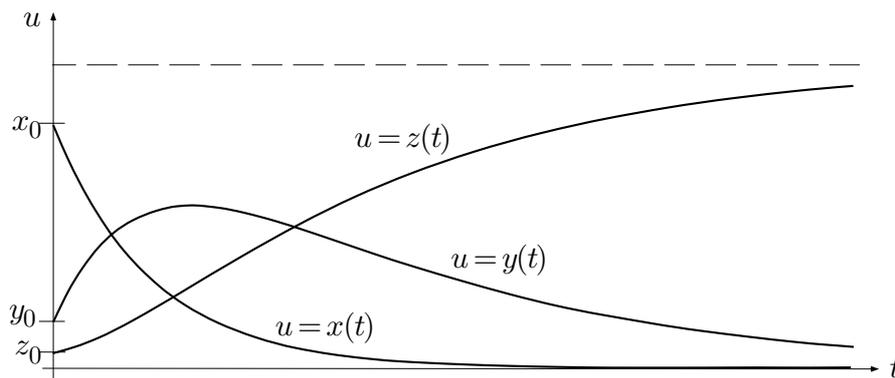


Fig. 3.5.1

② Wir betrachten das in Fig. 3.5.2 skizzierte mechanische System. Die Feder übt (in beiden Richtungen) eine zum Ausschlag  $y$  proportionale Rückstellkraft aus, und die Dämpfung erzeugt eine zur Momentangeschwindigkeit  $\dot{y}$  proportionale Reibungskraft; überdies ist eine (zum Beispiel durch Ein- und Ausschalten eines Magneten bewirkte) äußere Anregung (“Störkraft”)  $K(t)$  vorgesehen, die als bekannt vorausgesetzt wird und auch  $\equiv 0$  sein kann. Es handelt sich hier um ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad: Die Aktion des Systems wird vollständig beschrieben durch das Verhalten der einen Lagevariablen  $y$ .

In jedem Moment wirken auf den Massenpunkt drei Kräfte, die zusammen eine Beschleunigung  $\ddot{y}$  erzielen. Diese Vorstellung führt nach Newton auf die **Bewegungsgleichung**

$$m\ddot{y} = -fy - b\dot{y} + K(t)$$

bzw.

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K(t) \quad (6)$$

mit positiven Systemkonstanten  $m, b, f$ . Dies ist schon die konstituierende Gleichung des vorliegenden Systems: Für jeden möglichen Ablauf  $t \mapsto y(t)$  stehen die drei Funktionen  $y(\cdot)$ ,  $\dot{y}(\cdot)$  und  $\ddot{y}(\cdot)$  in der Relation (6), und das heißt: Es gilt *identisch in  $t$* :

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + fy(t) \equiv K(t) . \quad (6')$$

Die Gleichung (6) ist eine **lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**; sie ist **homogen**, falls  $K(t) \equiv 0$  ist. Eine **Lösung** dieser Gleichung ist eine Funktion  $y(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Identität (6') realisiert.

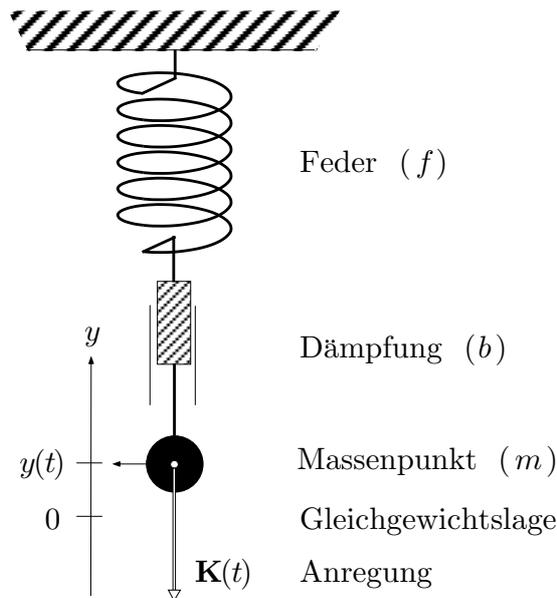


Fig. 3.5.2

Von den unendlich vielen möglichen Abläufen wird einer bestimmt, sobald Anfangsbedingungen formuliert sind. Offenbar genügt es nicht, den Ausschlag zur Zeit  $t = 0$  anzugeben, da verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten zu ganz verschiedenen Abläufen führen. Die physikalische Anschauung sagt

uns, daß folgender Satz von Anfangsbedingungen notwendig und hinreichend ist:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0; \quad (7)$$

dabei sind  $y_0$  und  $v_0$  vorgegebene Zahlen.

### Lösungsansatz

Eine allgemeine Methode zur Behandlung von (6) steht uns (noch) nicht zur Verfügung. Zur Vereinfachung beschränken wir uns im weiteren auf den homogenen (“ungestörten”) Fall

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = 0. \quad (8)$$

Die ähnliche, aber noch einfachere Gleichung

$$\dot{y} - ay = 0, \quad \text{bzw.} \quad \dot{y} = ay$$

hat die Lösungen  $y(t) = Ce^{at}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  beliebig. Wir versuchen daher für (8) den Lösungsansatz

$$y(t) := e^{\lambda t},$$

wobei wir uns die Wahl von  $\lambda$  noch vorbehalten. Wegen  $\dot{y}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ ,  $\ddot{y}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$  ist dieser Ansatz dann erfolgreich, wenn wir durch geeignete Wahl des (komplexen!) Parameters  $\lambda$  die “Einsetzung” in (8), also

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + fe^{\lambda t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (m\lambda^2 + b\lambda + f)e^{\lambda t} = 0$$

identisch in  $t$  befriedigen können. Es zeigt sich, daß  $\lambda$  der quadratischen Gleichung

$$m\lambda^2 + b\lambda + f = 0 \quad (9)$$

genügen muß. Man nennt  $\text{chp}(\lambda) := m\lambda^2 + b\lambda + f$  das zu (8) gehörige **charakteristische Polynom**, (9) die **charakteristische Gleichung** und deren Lösungen die **Eigenwerte** von (8).

Eigenwerte sind die beiden (unter Umständen komplexen) Zahlen

$$\lambda_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m}, \quad \lambda_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m},$$

wobei wir für das weitere  $b^2 - 4fm > 0$  annehmen wollen (starke Dämpfung), so daß  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reell ausfallen, und zwar ist

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0.$$

Wir haben damit vorerst die beiden Lösungen

$$Y_1(t) := e^{\lambda_1 t}, \quad Y_2(t) := e^{\lambda_2 t}.$$

Die Linearität und Homogenität der Gleichung (8) hat nun zur Folge, daß mit  $Y_1(\cdot)$  und  $Y_2(\cdot)$  von selbst auch jede **Linearkombination**

$$y(t) := c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

eine Lösung von (8) ist:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + fy &= m(c_1 Y_1 + c_2 Y_2)'' + b(c_1 Y_1 + c_2 Y_2)' + f(c_1 Y_1 + c_2 Y_2) \\ &= c_1 (m\ddot{Y}_1 + b\dot{Y}_1 + fY_1) + c_2 (m\ddot{Y}_2 + b\dot{Y}_2 + fY_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die zweiparametrische Funktionenschar (10) stellt schon die Gesamtheit  $\mathcal{L}$  der Lösungen von (8) dar. Alle Lösungen nehmen mit  $t \rightarrow \infty$  exponentiell ab (Fig. 3.5.3). Schreiben wir sie in der Form

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda_1 t} (c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \\ &= e^{\lambda_1 t} (c_1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

so sehen wir, daß die "Zeitkonstante" dieser Abnahme durch den grösseren Eigenwert  $\lambda_1$  bestimmt ist, und weiter, daß es höchstens einen Nulldurchgang gibt, nämlich dann, wenn die monotone Funktion

$$t \mapsto c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

eine Nullstelle besitzt.

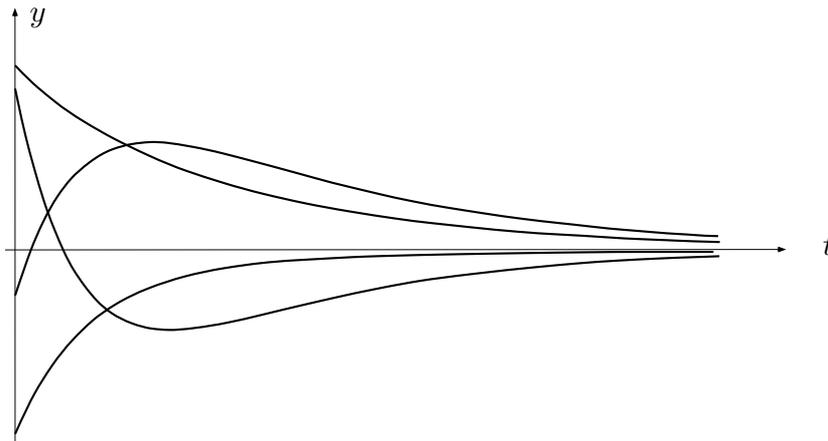


Fig. 3.5.3

Sind Anfangsbedingungen (7) vorgegeben, so werden dadurch die **Integrationskonstanten**  $c_1$  und  $c_2$  bestimmt. Wir müssen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \dot{y}(t) &= c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

an der Stelle  $t := 0$  betrachten und erhalten wegen  $e^0 = 1$  das folgende Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= y_0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= v_0 \end{aligned} \right\}.$$

Es folgt

$$c_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

so daß wir definitiv als Lösung des Anfangswertproblems (8)^(7) erhalten:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( (v_0 - \lambda_2 y_0) e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 y_0 - v_0) e^{\lambda_2 t} \right).$$

○

## Differentialgleichungen erster Ordnung, allgemein

In den beiden einführenden Beispielen diente die Differentialgleichung zur Beschreibung eines gewissen zeitlichen Ablaufs; wir haben daher die unabhängige Variable mit  $t$  bezeichnet. Wir können aber auch geometrisch argumentieren; es geht dann um “Lösungskurven” in der  $(x, y)$ -Ebene.

Eine **Differentialgleichung erster Ordnung** hat allgemein folgende Form:

$$y' = f(x, y); \tag{11}$$

dabei ist die **rechte Seite**  $f: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$  eine *gegebene* Funktion mit einem gewissen Definitionsbereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Die Gleichung (11) definiert auf implizite Weise eine Kurvenschar in der  $(x, y)$ -Ebene, und zwar folgendermaßen: Für jedes  $(x, y) \in \Omega$  stellt der Funktionswert  $f(x, y)$  eine im Punkt  $(x, y)$  “angeschriebene” Steigung dar. Gesucht sind die Funktionen

$$y(\cdot): \quad x \mapsto y(x) \quad (x \in I),$$

mit folgender Eigenschaft: Die Tangentensteigung des Graphen  $\mathcal{G}$  von  $y(\cdot)$  stimmt an jeder Stelle  $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$  mit dem dort angeschriebenen  $f$ -Wert  $f(x_0, y_0) = f(x_0, y(x_0))$  überein (Fig. 3.5.4). Diese Funktionen  $y(\cdot)$  genügen also *identisch in  $x$*  der Beziehung

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I).$$

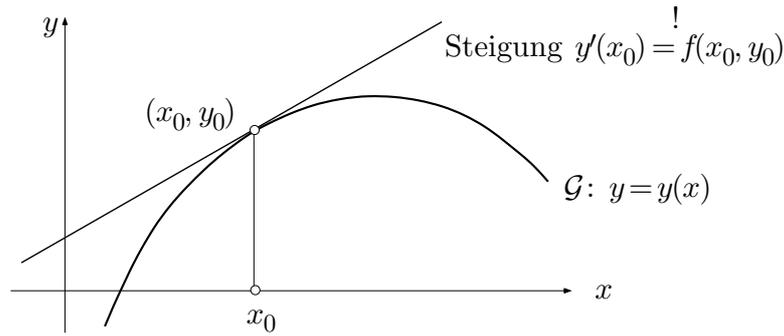


Fig. 3.5.4

In anderen Worten: Die Differentialgleichung (11) definiert ein **Richtungsfeld** in  $\text{dom}(f) = \Omega$  (Fig. 3.5.5). Gesucht sind diejenigen Kurven in  $\Omega$ , die sich in jedem einzelnen Kurvenpunkt der dort gegebenen Richtung anschmiegen.

*Anmerkung:* In der Theorie der Differentialgleichungen ist es üblich, denselben Buchstaben als Koordinatenvariable *und* als Variable für Funktionen mit Werten in der betreffenden Koordinate zu nehmen, den Buchstaben  $y$  also als Koordinate in der  $(x, y)$ -Ebene und als Variable für Funktionen, deren Graph in der  $(x, y)$ -Ebene liegt.

In der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen werden unter anderem die folgenden Grundtatsachen bewiesen:

**(3.16)** (a) Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine “vernünftige” Funktion, so bilden die Lösungen der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  eine einparametrische Funktionenschar

$$y_c(\cdot) : \quad x \mapsto y = y_c(x) .$$

(b) Durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  geht genau eine Lösungskurve, in anderen Worten: Das **Anfangswertproblem**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung

$$x \mapsto y(x) \quad (x \in I),$$

wobei das Definitionsintervall  $I$  noch von  $(x_0, y_0)$  abhängen kann.

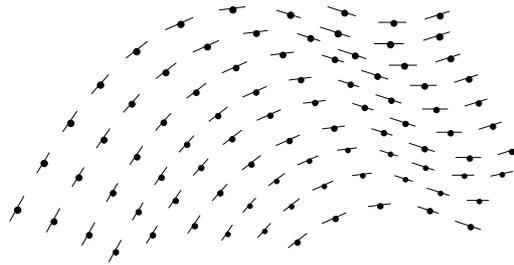


Fig. 3.5.5

Für die Beweisidee verweisen wir auf Satz (4.19) und das daran anschließende Beispiel 4.6.①. — Zu (a): Der Parameter  $c$  “nummeriert” sozusagen die einzelnen Lösungen.

③ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -x/y \quad (y > 0).$$

Die im Punkt  $(x, y)$  vorgeschriebene Steigung

$$f(x, y) := -x/y$$

liefert die auf dem Ortsvektor  $(x, y)$  senkrecht stehende Richtung, denn  $-x/y$  ist negativ reziprok zu  $y/x$  (Fig. 3.5.6). Die Lösungskurven sind offenbar Halbkreisbögen um  $O$ , und zwar geht durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \text{dom}(f)$  genau ein derartiger Bogen. Analytisch wird die Lösungsschar durch

$$y_c(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \quad (-c < x < c)$$

beschrieben. ○

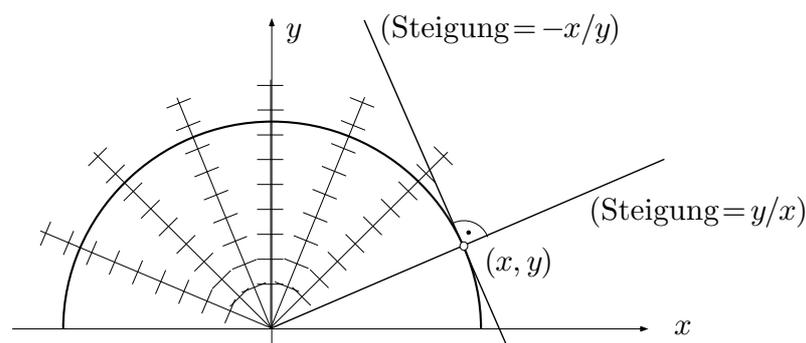


Fig. 3.5.6

④ Die Differentialgleichung

$$y' = 3|y|^{2/3}$$

besitzt die “ordentlichen” Lösungen

$$y_c(x) := (x - c)^3, \quad c \in \mathbb{R},$$

sowie die “außerordentliche” Lösung  $y(x) \equiv 0$ ; und wenn man will, kann man aus diesem Material weitere Lösungen fabrizieren (Fig. 3.5.7). Die zu den Punkten  $(x_0, 0)$  gehörigen Anfangswertprobleme besitzen also mehrere Lösungen, in scheinbarem Widerspruch zu Satz (3.16). Dieses Phänomen hat folgenden Grund: Die rechte Seite  $f(x, y) := 3|y|^{2/3}$  ist in den Punkten  $(x_0, 0)$  nicht genügend “vernünftig” (genau: nicht lipstetig bezüglich  $y$ ), denn die Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} \right| = 3|y|^{-1/3}$$

sind für  $y \rightarrow 0$  unbeschränkt. ○

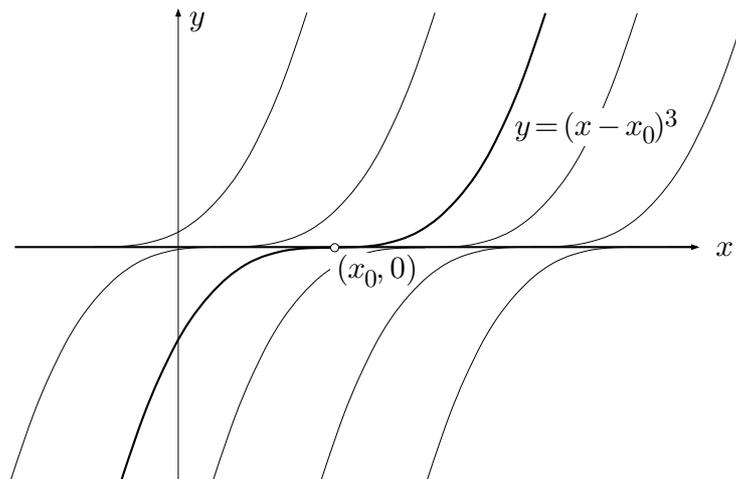


Fig. 3.5.7

### Ein einfaches numerisches Verfahren

Von der geometrischen Interpretation her kommt man auf das folgende einfache Verfahren zur numerischen Behandlung eines Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Das Rezept lautet (siehe die Fig. 3.5.8):

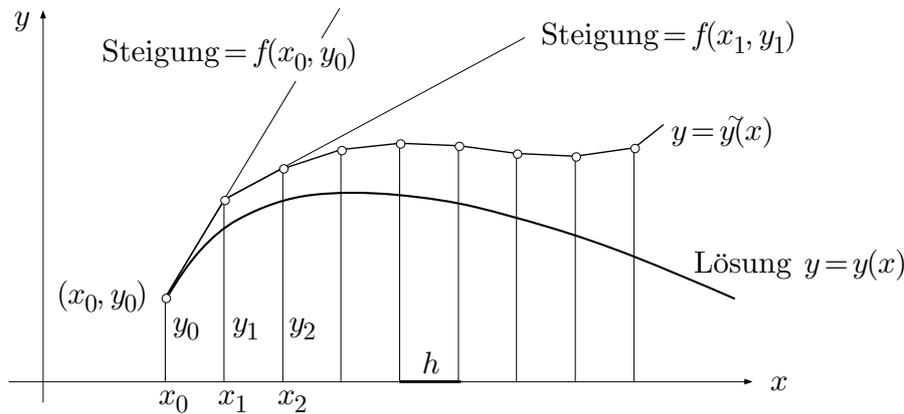


Fig. 3.5.8

- Wähle eine Schrittweite  $h > 0$ .
- Für  $k \geq 0$  setze rekursiv

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k + h & (\implies x_n = x_0 + nh), \\ y_{k+1} &:= y_k + f(x_k, y_k) h. \end{aligned}$$

Ist  $y(\cdot)$  die tatsächliche Lösung des vorliegenden Anfangswertproblems, so liefert dieses sogenannte **Polygonverfahren** zunächst nur an diskreten Stellen  $x_k$  Näherungswerte  $y_k$ :

$$y(x_k) \doteq y_k.$$

Man kann aber die Punkte  $(x_k, y_k)$  durch einen Streckenzug oder auch durch eine glatte Kurve verbinden und erhält damit eine "angenäherte Lösung"  $\tilde{y}(\cdot)$ . Der Fehler  $|\tilde{y}(x) - y(x)|$  ist natürlich um so kleiner, je kleiner die Schrittweite  $h$  gewählt wurde, und wächst im wesentlichen exponentiell mit der Distanz des Punktes  $x$  von  $x_0$ .

③ (Forts.) Wir behandeln das Anfangswertproblem

$$y' = -x/y, \quad y(0) = 1$$

zunächst mit der Schrittweite  $h := \frac{1}{16}$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 1; \\ x_1 &= \frac{1}{16}, & y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 - \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{16} = 1; \\ x_2 &= \frac{2}{16}, & y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)h = 1 - \frac{1/16}{1} \cdot \frac{1}{16} = 0.9961; \\ x_3 &= \frac{3}{16}, & y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)h = 0.9961 - \frac{2/16}{0.9961} \cdot \frac{1}{16} = 0.9883; \\ & \vdots & & \\ x_8 &= \frac{8}{16}, & y_8 &= 0.8852. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Näherungswert  $y\left(\frac{1}{2}\right) \doteq 0.8852$ . Wählen wir stattdessen  $h := \frac{1}{256}$ , so liefert die Rechnung

$$y\left(\frac{1}{2}\right) \doteq y_{128} = 0.86726 .$$

Nun ist ja die wahre Lösung der Kreisbogen  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Der exakte Wert an der Stelle  $x := \frac{1}{2}$  ist somit

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660 .$$

○

## Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Dglen

### Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

definiert eine zweiparametrische Kurvenschar in der  $(x, y)$ -Ebene. Gefragt wird nach denjenigen Funktionen

$$x \mapsto y(x) \quad (x \in I) ,$$

deren Graphen  $\mathcal{G}$  an jeder Stelle  $(x, y) \in \mathcal{G}$  die dort je nach Steigung  $y'$  vorgeschriebene "Krümmung"  $y'' = f(x, y, y')$  haben; siehe die Fig. 3.5.9. (Die dort durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  gehenden Lösungskurven sind je nach Steigung verschieden stark gekrümmt.)

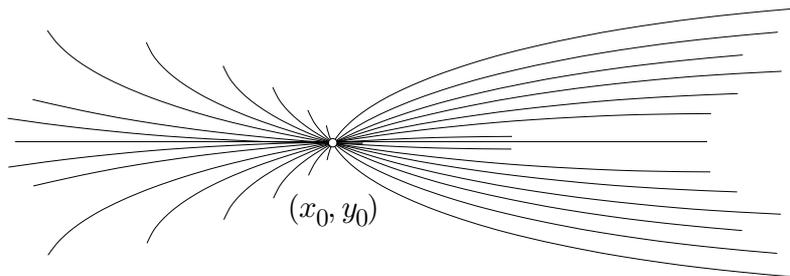


Fig. 3.5.9

Die Lösungsfunktionen  $y(\cdot)$  genügen also *identisch in  $x$*  der Beziehung

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in I) .$$

Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sieht ein korrekt gestelltes Anfangswertproblem folgendermaßen aus:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Hier ist  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Funktion, und die Anfangswerte  $y_0, v_0$  sind gegebene Zahlen (vgl. Beispiel ②).

In Wirklichkeit kommen Differentialgleichungen höherer als vierter Ordnung kaum vor, wohl aber **Systeme von  $n$  ( $\gg 1$ ) Differentialgleichungen erster Ordnung** für  $n$  unbekannte Funktionen, siehe Beispiel ①. Ein derartiges System sieht allgemein folgendermaßen aus:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Tritt die Variable  $t$  rechter Hand nicht in Erscheinung, so spricht man von einem **autonomen** ("sich selbst überlassenen") System. Die  $i$ -te Gleichung,

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n),$$

drückt aus, in welcher Weise die zeitliche Änderungsrate der Größe  $x_i$  (zum Beispiel des Drucks im Reaktorgefäß Nr.  $i$ ) vom augenblicklichen Wert aller einbezogenen Größen  $x_1, \dots, x_n$  und allenfalls von  $t$ -abhängigen äußeren Einflüssen abhängt.

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz (3.16)(b) wird von Anfang an für Systeme bzw. in vektorieller Form angesetzt und bewiesen. Es geht dann um Anfangswertprobleme der folgenden Gestalt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Mit Hilfe eines einfachen Tricks lassen sich Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System der Form (12) verwandeln. Damit werden die für derartige Systeme entwickelten numerischen Methoden auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung verfügbar. Es sei also eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (13)$$

vorgelegt. Die Idee besteht darin, die unbekannte Funktion  $y(\cdot)$  durch Übergang zur sogenannten **Jet-Extension**

$$(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) =: (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

in ein  $n$ -komponentiges Objekt zu verwandeln, für das dann  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung hingeschrieben werden können. Diese  $n$  Differentialgleichungen lauten folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} &= f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\} . \quad (14)$$

Hier sorgen die ersten  $n-1$  Gleichungen dafür, dass jedes  $x_k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) die Ableitung seines Vorgängers  $x_{k-1}$  und folglich die  $k$ -te Ableitung von  $x_0$  ist, und die letzte Gleichung garantiert

$$x_0^{(n)} = \frac{d}{dt} x_0^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} = f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(t, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}) .$$

Ist also

$$t \mapsto (x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t))$$

eine Lösung des Systems (14) bzw. eines zugehörigen Anfangswertproblems, so ist  $y(t) := x_0(t)$  eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (13).

Es gibt keinen Algorithmus, mit dem man jede formelmäßig vorliegende Differentialgleichung formelmäßig lösen ("integrieren") kann, genau so wenig, wie es einen Algorithmus gibt, der beliebige Gleichungen für eine unbekannte Zahl  $x$ , zum Beispiel

$$x^3 + \sin x - e^{-x} = 0 ,$$

akzeptiert und nach endlich vielen Operationen die exakte Lösung liefert. Es gibt hingegen wichtige Typen und Klassen von Differentialgleichungen, die formelmässig gelöst werden können; wir werden im folgenden einige davon behandeln. Das vollständigste Verzeichnis derartiger "lösbarer" Differentialgleichungen findet sich in

*E. Kamke: Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen.*  
10. Auflage, 1983 (Teubner).

## Aufgaben

1. Es sei  $s > 0$  gegeben. Man bestimme die Differentialgleichung der Kurven  $\gamma: y = y(x)$  im ersten Quadranten, die die Eigenschaft (a) bzw. (b) bzw. (c) besitzen.
  - (a) Die Tangentenabschnitte zwischen Berührungspunkt und  $x$ -Achse besitzen alle dieselbe Länge  $s$ .
  - (b) Die Tangentenabschnitte zwischen den beiden Koordinatenachsen besitzen alle dieselbe Länge  $s$ .
  - (c) Die Dreiecke, begrenzt durch Tangente, Ordinate im Berührungspunkt und  $x$ -Achse, haben alle denselben Flächeninhalt  $s^2$ .

2. Bestimme die Differentialgleichung des freien Falls

- (a) in der Nähe der Erdoberfläche, unter Vernachlässigung des Luftwiderstands;
- (b) über der Erdoberfläche, wobei nun die Abnahme der Schwerkraft zu berücksichtigen ist;
- (c) im Erdinnern.

An physikalischen Konstanten erscheinen nur die Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$  und der Erdradius  $R$  im Ergebnis. Für (c) muß man wissen, daß die den fallenden Körper umfassende Erdrinde keine Kraft auf ihn ausübt und die weiter innen liegende Erdmasse so wirkt, als ob sie im Erdmittelpunkt konzentriert wäre.

3. (a) Es sei

$$\Gamma: \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2 \quad (c \in \mathbb{R})$$

die Schar der Kreise, die die  $x$ -Achse im Ursprung berühren. Leite mit Hilfe geometrischer Betrachtungen die Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  dieser Schar her.

- (b) Eine **Orthogonaltrajektorie** der Schar  $\Gamma$  ist eine Kurve  $\sigma$ , die in jedem ihrer Punkte die Scharkurve  $\gamma$  durch den betreffenden Punkt senkrecht schneidet. Wie lautet die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien?
  - (c) Zeichne einige Kreise der Schar  $\Gamma$  sowie einige Orthogonaltrajektorien. Die Figur bringt einen auf eine plausible Vermutung betreffend die Orthogonalschar  $\Gamma^\perp$ . Beweise diese Vermutung elementargeometrisch.
  - (d) Verifiziere, daß die in (c) geometrisch ermittelten Orthogonaltrajektorien in der Tat Lösungen der in (b) gefundenen Differentialgleichung sind.
4. (a) Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \min\{y, 1\} .$$

- (b) Bestimme explizit die beiden Lösungen  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  mit den Anfangspunkten

$$P_1 := (0, -1), \quad P_2 := \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

5. (M) Das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - x^2, \quad y(0) = 1$$

besitzt eine Lösung der Form  $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ , womit eine Potenzreihe gemeint ist. Bestimme  $c_0, \dots, c_4$ .

## 3.6 Differentialgleichungen II

### Homogene lineare Differentialgleichungen, allgemein

Nach den vorbereitenden Beispielen und allgemeinen Bemerkungen des vorangehenden Abschnitts sind wir reif für die formale Behandlung einer wichtigen Klasse von Differentialgleichungen. Die betreffenden Differentialgleichungen werden nicht mit Hilfe der Integralrechnung “integriert”, sondern mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes. Die in Beispiel 3.5.② behandelte Gleichung (8) gehört zu dieser Klasse und letzten Endes auch das System (3) von Beispiel 3.5.①. — Die nun folgende Theorie ist eine schöne Anwendung der linearen Algebra auf die Analysis.

Wir bezeichnen die unabhängige Variable wieder mit  $t$  und verwenden den Buchstaben  $y$ , auch mit Index, als Variable für beliebig oft differenzierbare reell- oder komplexwertige Funktionen von  $t$ :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto y(t).$$

Die Gesamtheit dieser Funktionen bezeichnen wir mit  $C^\infty$ . — Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1)$$

mit reellen oder komplexen  $a_i$  heißt **homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**. Sind die  $a_i$  reell, so werden reellwertige Lösungen gewünscht, sind die  $a_i$  komplex, so dürfen auch die Lösungen komplex sein.

Es ist in diesem Zusammenhang üblich, die Ableitungsoperation mit  $D$  zu bezeichnen:

$$D : \quad y \mapsto Dy := y'.$$

In dieser Auffassung ist  $D$  ein **linearer Operator**, nämlich eine lineare Abbildung von  $C^\infty$  nach  $C^\infty$ . Dieser Operator akzeptiert  $C^\infty$ -Funktionen als Input und produziert  $C^\infty$ -Funktionen als Output, und für beliebige  $y_1, y_2 \in C^\infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt

$$D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2, \quad D(\alpha y) = \alpha Dy.$$

Sind  $A$  und  $B$  zwei derartige Operatoren (zum Beispiel Potenzen von  $D$ , es gibt aber auch andere), so ist ihre Summe  $A + B$  (wie die Summe von zahlenwertigen Funktionen) in naheliegender Weise definiert durch

$$(A + B)y := Ay + By,$$

analog das  $\alpha$ -fache von  $A$  durch

$$(\alpha A)y := \alpha(Ay) .$$

Diese Vereinbarungen setzen uns instand, die linke Seite von (1) in wesentlich kompakterer Form zu schreiben:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y \\ &= D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y \\ &= (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y \\ &= Ly . \end{aligned}$$

In dem **Differentialoperator**

$$L := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \quad (2)$$

sind sämtliche vorzunehmenden Differentiationen eingespeichert, so daß nunmehr (1) die suggestive Form

$$Ly = 0 \quad (1')$$

erhält.

Das mit den Koeffizienten von (1) "rein formal" gebildete Polynom

$$\text{chp}(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

in der (komplexen) Hilfsvariablen  $\lambda$  heißt **charakteristisches Polynom** der Differentialgleichung (1); es wird in unserer Theorie eine zentrale Rolle spielen. Mit Hilfe dieses Polynoms können wir jedenfalls die Definition (2) von  $L$  in der folgenden Form schreiben:

$$L := \text{chp}(D) . \quad (2')$$

Wir benötigen noch einen Begriff aus der linearen Algebra: Eine endliche Kollektion  $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$  von Funktionen  $y_k \in C^\infty$  heißt **linear unabhängig**, wenn keine dieser Funktionen eine Linearkombination der übrigen ist.

*Bsp:* Die Funktionen  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  sind linear unabhängig, die Funktionen  $\exp$ ,  $\cosh$ ,  $\sinh$  aber nicht, denn es ist

$$e^t \equiv \cosh t + \sinh t .$$

Die Gesamtheit der Lösungen von (1) bzw. (1') bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}$ . Diese Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  ist nicht einfach ein Sack voll Funktionen, sondern besitzt eine bestimmte algebraische Struktur:

**(3.17)**  $\mathcal{L}$  ist ein  $n$ -dimensionaler (reeller oder komplexer) Vektorraum; das heißt:

(a) Sind  $y_1, y_2$  und  $y$  Lösungen, so sind auch die Funktionen  $y_1 + y_2$  und  $\alpha y$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  bzw.  $\in \mathbb{C}$ ) Lösungen.

(b) Es gibt in  $\mathcal{L}$  (verschiedene) Basen von je  $n$  linear unabhängigen Lösungen  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ . Jede Lösung  $y \in \mathcal{L}$  ist dann in der Form

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}$$

mit geeigneten Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{R}$  bzw.  $\in \mathbb{C}$  darstellbar.

Nach diesem Satz kennen wir alle Lösungen, wenn wir  $n$  linear unabhängige Lösungen kennen. Beachte, daß die Basis von  $\mathcal{L}$  (wie immer in der linearen Algebra) nicht eindeutig bestimmt ist.

□ Unser  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  ist ein linearer Operator. Aus  $y_1, y_2, y \in \mathcal{L}$  folgt daher

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0, \quad L(\alpha y) = \alpha(Ly) = 0,$$

das heißt:  $y_1 + y_2 \in \mathcal{L}$ ,  $\alpha y \in \mathcal{L}$ . Dies beweist (a).

Zum Beweis von (b) lösen wir  $n$  verschiedene Anfangswertprobleme, nämlich für jedes einzelne  $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  das Problem

$$\text{AWP}_r : \begin{cases} Ly = 0; \\ y^{(k)}(0) = 0 & (0 \leq k \leq n-1, k \neq r), \\ y^{(r)}(0) = 1. \end{cases}$$

Jedes dieser  $n$  Probleme besitzt nach Satz **(3.16)**(b) (bzw. dessen Analogon für Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung) eine wohlbestimmte Lösung  $y_r(\cdot)$ .

Die  $n$  Funktionen  $y_0(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_{n-1}(\cdot)$  sind linear unabhängig, denn jedes  $y_r(\cdot)$  besitzt eine Eigenschaft, die von keiner Linearkombination der übrigen produziert werden kann: Es ist  $y_r^{(r)}(0) = 1$ , aber  $y_k^{(r)}(0) = 0$  für alle  $k \neq r$ .

Es sei andererseits  $\tilde{y} \in \mathcal{L}$  eine beliebige Lösung, und es seien  $c_k := \tilde{y}^{(k)}(0)$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) ihre Ableitungswerte bis zur Ordnung  $n-1$  an der Stelle 0. Dann ist

$$\tilde{y} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_{n-1} y_{n-1};$$

denn beide Seiten dieser Gleichung sind Lösungen desselben Anfangswertproblems

$$Ly = 0, \quad y^{(k)}(0) = c_k \quad (0 \leq k \leq n-1),$$

nämlich  $\tilde{y}$  nach Definition der  $c_k$  und die rechte Seite wegen der besonderen Anfangswerte  $y_r^{(k)}(0) = \delta_{rk}$ .

Zusammengenommen ergibt sich, dass die  $n$  Funktionen  $y_0(\cdot), \dots, y_{n-1}(\cdot)$  eine Basis von  $\mathcal{L}$  bilden. └

## Die charakteristische Gleichung

Die Basis von  $\mathcal{L}$ , die wir im folgenden explizit angeben werden, ist allerdings nicht die Kollektion  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  von Satz (3.17), sondern besteht aus  $n$  anderen Funktionen  $Y_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), die mit der Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Linearfaktoren zusammenhängen. Die Bestimmung der bei einem vorgelegten Anfangswertproblem waltenden Konstanten  $c_k$  ist dann allerdings nicht mehr gratis wie bei den  $y_r(\cdot)$  von Satz (3.17), sondern erfordert die Auflösung eines linearen Gleichungssystems; siehe den Schluß von Beispiel 3.5.②.

Angelpunkt der ganzen Theorie ist der folgende Sachverhalt: Für jedes  $k \geq 0$  gilt

$$D^k(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t},$$

und durch Linearkombination folgt für ein beliebiges Polynom  $p(\cdot)$ :

$$p(D)(e^{\lambda t}) = p(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Versuchen wir daher, die Gleichung (1) mit dem Ansatz

$$y(t) := e^{\lambda t}$$

zu befriedigen, so muß gelten:

$$Ly = \text{chp}(D)(e^{\lambda t}) = \text{chp}(\lambda) e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0,$$

und dies ist wegen  $e^{\lambda t} \neq 0$  genau dann erfüllt, wenn

$$(\text{chp}(\lambda) =) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3)$$

ist; vergleiche dazu noch einmal Beispiel 3.5.②.

Die Gleichung (3) wird als **charakteristische Gleichung** von (1) bezeichnet; ihre  $n$  reellen oder komplexen Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sind die **Eigenwerte**, die Menge  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} =: \text{spec } L$  ist das **Spektrum** des Operators  $L := \text{chp}(D)$ .

Besitzt (3)  $n$  verschiedene Lösungen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  oder meinetwegen  $\in \mathbb{C}$ , so sind wir fertig. Es ist nämlich plausibel, daß dann die  $n$  Funktionen

$$Y_k(t) := e^{\lambda_k t} \quad (4)$$

linear unabhängig sind (sie wachsen mit  $t \rightarrow \infty$  ganz verschieden rasch an) und somit eine Basis des Lösungsraums  $\mathcal{L}$  bilden. Die Sache hat zwei Haken:

- (a) Die charakteristische Gleichung kann komplexe Nullstellen  $\lambda_k$  haben, obwohl die Koeffizienten  $a_i$  reell sind. Die zugehörigen Funktionen (4) sind dann komplexwertig und werden vom Auftraggeber unter Umständen nicht akzeptiert.
- (b) Die charakteristische Gleichung kann mehrfache Nullstellen haben, so daß es weniger als  $n$  verschiedene Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen (4) gibt.

Zu (a): Sind die Koeffizienten  $a_i$  von *chp reell*, so bringt die Anwendung des Operators  $L := \text{chp}(D)$  auf eine komplexe Funktion  $z(\cdot)$  die Real- und Imaginärteile nicht durcheinander. Ist  $z(\cdot)$  eine komplexe Lösung von (1), so müssen demnach der Realteil und der Imaginärteil von  $z(\cdot)$  je für sich die Gleichung (1) befriedigen; das heißt:  $\text{Re } z$  und  $\text{Im } z$  sind dann automatisch *reelle* Lösungen der Differentialgleichung (1).

Es sei jetzt (bei reellen Koeffizienten  $a_i$ ) die Zahl

$$\lambda_0 := \mu_0 + i\nu_0, \quad \nu_0 \neq 0,$$

ein echt komplexer Eigenwert. Nach Beispiel 1.7.② ist dann die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{\lambda}_0 = \mu_0 - i\nu_0$  ebenfalls ein Eigenwert (der gleichen Vielfachheit), und wir haben die beiden (wesentlich verschiedenen!) komplexwertigen Eigenfunktionen (also Lösungen)

$$Z_0(t) := e^{\lambda_0 t}, \quad \bar{Z}_0(t) := e^{\bar{\lambda}_0 t}.$$

Nach dem oben Gesagten sind in diesem Fall die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= \text{Re } Z_0(t) = e^{\mu_0 t} \cos(\nu_0 t), \\ X_2(t) &:= \text{Im } Z_0(t) = e^{\mu_0 t} \sin(\nu_0 t), \end{aligned}$$

(zwar keine Eigenfunktionen, aber) linear unabhängige reelle Lösungen von (1), die sozusagen im Verein die beiden Eigenwerte  $\lambda_0$  und  $\bar{\lambda}_0$  gepachtet haben (die analoge Zerlegung von  $\bar{Z}_0(\cdot)$  bringt nichts Neues).

- ① Betrachte für ein festes  $\omega > 0$  die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Es handelt sich um die **Differentialgleichung der** (ungedämpften) **harmonischen Schwingung**. Ihre charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

besitzt die beiden Lösungen  $\lambda_1 := i\omega$ ,  $\lambda_2 := -i\omega$ . Die allgemeinste komplexwertige Lösung  $z(\cdot)$  der Schwingungsgleichung ist daher

$$z(t) := c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

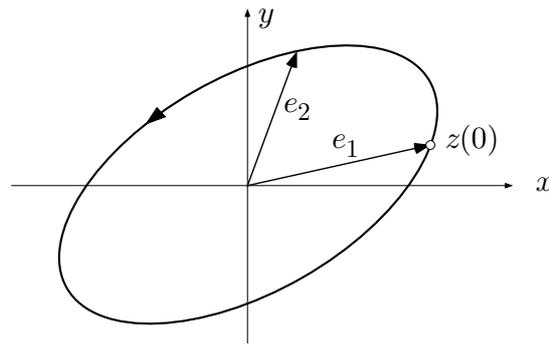


Fig. 3.6.1

und läßt sich als elliptische Bewegung in der komplexen Ebene auffassen. Man kann nämlich  $z(\cdot)$  in der Form

$$z(t) = (c_1 + c_2) \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega t)$$

schreiben und erkennt die Vektoren  $e_1 := c_1 + c_2$  und  $e_2 := i(c_1 - c_2)$  als konjugierte Halbmesser (Fig. 3.6.1).

Der Raum der *reellen* Lösungen  $x(\cdot)$  der Schwingungsgleichung wird aufgespannt von den beiden Funktionen

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t), \\ X_2(t) &:= \operatorname{Im}(e^{i\omega t}) = \sin(\omega t); \end{aligned}$$

die allgemeinste reelle Lösung ist daher die harmonische Schwingung

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hieran schließen wir noch die folgenden Bemerkungen:

Eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten bringt keine Oszillationen zustande, sondern immer nur exponentielle Zu- bzw. Abnahme. Etwas anderes ist es bei einem System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, zum Beispiel

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \right\}.$$

Dieses besonders einfache System besitzt die Lösungen

$$\left. \begin{aligned} x(t) &:= A \cos(t + \alpha) \\ y(t) &:= A \sin(t + \alpha) \end{aligned} \right\}.$$

Die Behandlung allgemeiner derartiger Systeme führt auf Eigenwertaufgaben im Sinn der linearen Algebra. So können wir das System (3) von Beispiel 3.5.① auf folgende Weise in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Dieses System besitzt die drei Eigenwerte  $-\lambda$ ,  $-\mu$  und  $0$ . ○

### Mehrfache Eigenwerte

Zu (b): Hier müssen wir weiter bohren. Die einfachste Differentialgleichung (1) mit mehrfachen Eigenwerten lautet offenbar

$$D^m y = 0 . \tag{5}$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^m = 0$$

besitzt die  $m$ -fache Nullstelle  $0$ . Die Lösungen von (5) sind leicht zu erraten: Es sind die Polynome vom Grad  $< m$ ; das heißt, die allgemeine Lösung ist

$$y(t) := c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}, \quad c_k \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \in \mathbb{C} \text{)} . \tag{6}$$

Wir müssen daher auch im allgemeinen Fall damit rechnen, daß Polynome ins Spiel kommen, und einen entsprechenden Ansatz bereithalten. Wir nehmen also an,  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  sei eine  $m$ -fache Nullstelle von  $\text{chp}$ ; dann ist

$$\text{chp}(\lambda) = \hat{p}(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^m$$

für ein gewisses Polynom  $\hat{p}(\cdot)$ . In Anlehnung an (4) und (6) machen wir den Lösungsansatz

$$y(t) := q(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{7}$$

dabei ist

$$q(t) := c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}$$

ein beliebiges Polynom vom Grad  $< m$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (D - \lambda_0) y &= D(q(t)e^{\lambda_0 t}) - \lambda_0 (q(t)e^{\lambda_0 t}) \\ &= q'(t)e^{\lambda_0 t} + q(t)\lambda_0 e^{\lambda_0 t} - \lambda_0 q(t)e^{\lambda_0 t} \\ &= q'(t)e^{\lambda_0 t} . \end{aligned}$$

Wird dieser Prozeß  $m$ -mal wiederholt, so ergibt sich

$$(D - \lambda_0)^m y \underset{(*)}{=} q^{(m)}(t) e^{\lambda_0 t} \equiv 0,$$

da  $q(\cdot)$  einen Grad  $< m$  hat. Hieraus folgt aber

$$\text{chp}(D)y = (\hat{p}(D) \cdot (D - \lambda_0)^m) y \underset{(*)}{=} \hat{p}(D) ((D - \lambda_0)^m y) = \hat{p}(D) 0 = 0,$$

das heißt: Die Funktionen (7) sind tatsächlich Lösungen von (1).

An den Stellen (\*) haben wir stillschweigend benutzt, daß dem Produkt zweier Polynome die Hintereinanderschaltung der zugehörigen Differentialoperatoren entspricht. Dieser Umstand ist ein wesentliches Ingredienz der ganzen Theorie. Es genügt, ihn für zwei Monome

$$p_1(\lambda) := \lambda^r, \quad p_2(\lambda) := \lambda^s$$

und ihr Produkt  $p := p_1 \cdot p_2$  zu verifizieren: Es ist  $p(\lambda) = \lambda^{r+s}$  und somit

$$p(D)y = D^{r+s} y = D^r(D^s y) = p_1(D)(p_2(D)y).$$

Wir haben also zu einem  $m$ -fachen Eigenwert  $\lambda_0$  auch  $m$  linear unabhängige Lösungen gefunden, nämlich die Funktionen

$$e^{\lambda_0 t}, \quad t e^{\lambda_0 t}, \quad t^2 e^{\lambda_0 t}, \quad \dots, \quad t^{m-1} e^{\lambda_0 t}.$$

Da die charakteristische Gleichung nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau  $n$  Lösungen besitzt (mehrfache mehrfach gezählt), sind wir folglich imstande,  $n$  linear unabhängige Lösungen explizit anzugeben, und sind damit nach Satz (3.17) im Besitz aller Lösungen von (1).

② Gesucht sind die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$$

sowie speziell die Lösungen, die den Bedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \tag{8}$$

genügen.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$$

und besitzt ersichtlich die Nullstelle  $\lambda_1 := 1$ . Wir reduzieren:

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5) : (\lambda - 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$$

und sehen, daß das reduzierte Polynom immer noch die Nullstelle 1 besitzt, also:  $\lambda_2 := 1$ . Weiter ist

$$(\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 5,$$

und Auflösung der quadratischen Gleichung  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$  liefert die beiden letzten Eigenwerte

$$\lambda_3 := -1 + 2i, \quad \lambda_4 := -1 - 2i.$$

Damit erhalten wir die vier reellen Basislösungen

$$Y_1(t) := e^t, \quad Y_2(t) := t e^t, \quad Y_3(t) := e^{-t} \cos(2t), \quad Y_4(t) := e^{-t} \sin(2t),$$

von denen die zwei ersten mit  $t \rightarrow \infty$  "explodieren" und die beiden andern gedämpfte Schwingungen darstellen. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t))e^{-t}.$$

Was nun die Zusatzbedingungen (8) betrifft, so folgt aus  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  schon  $c_1 = c_2 = 0$ . Es bleibt also

$$y(t) = (c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t))e^{-t}$$

mit der Ableitung

$$y'(t) = ((-c_3 + 2c_4) \cos(2t) + (-2c_3 - c_4) \sin(2t))e^{-t}.$$

Evaluation an der Stelle  $t := 0$  führt mit (8) auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{rcl} c_3 & = & 1 \\ -c_3 + 2c_4 & = & 3 \end{array} \right\}.$$

Es gibt daher genau eine Lösung, die die Zusatzbedingungen erfüllt, nämlich

$$y(t) = (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) e^{-t}.$$

○

## Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten nun die **inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = K(t). \quad (9)$$

Wir verwenden weiterhin die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \text{chp}(\lambda) &:= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \\ L &:= \text{chp}(D) \end{aligned}$$

und schreiben (9) kurz in der Form

$$Ly = K(t); \quad (9')$$

dabei ist  $K(\cdot)$  eine *gegebene* Funktion von  $t$ . Diese Differentialgleichung modelliert zum Beispiel ein nach Maßgabe seiner Systemparameter  $a_i$  ( $0 \leq a_i \leq n-1$ ) schwingendes elektrisches oder mechanisches System, dem von außen eine willkürlich von der Zeit abhängende Anregung (oder "Störkraft")  $K(\cdot)$  aufgeprägt wird, siehe Beispiel 3.5.②. Die Differentialgleichung (9) ist dermaßen wichtig und verbreitet, daß im Lauf der Zeit verschiedene Lösungsverfahren erdacht worden sind, unter anderen:

- (a) spezieller Lösungsansatz für spezielle Anregungen  $K(\cdot)$ ,
- (b) Methode der Variation der Konstanten,
- (c) Laplace-Transformation.

Bevor wir uns der "primitivsten" und nicht für beliebige  $K(\cdot)$  anwendbaren Methode (a) annehmen, beweisen wir:

**(3.18)** *Es sei  $(Y_1(\cdot), \dots, Y_n(\cdot))$  eine Basis des Lösungsraums der homogenen Differentialgleichung  $Ly = 0$ , und es sei  $y_p(\cdot)$  eine irgendwie gefundene Lösung der inhomogenen Differentialgleichung  $Ly = K(t)$ . Dann ist die allgemeine Lösung  $y(\cdot)$  der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch*

$$y(t) := c_1Y_1(t) + \dots + c_nY_n(t) + y_p(t).$$

□ Ist

$$y = \sum_{k=1}^n c_k Y_k + y_p,$$

so folgt wegen  $LY_k = 0$ :

$$Ly = L\left(\sum_{k=1}^n c_k Y_k\right) + Ly_p = \sum_{k=1}^n c_k LY_k + K(\cdot) = K(\cdot).$$

Umgekehrt: Ist  $\tilde{y}$  eine beliebige Lösung von (9'), so ist

$$L(\tilde{y} - y_p) = L\tilde{y} - Ly_p = K(\cdot) - K(\cdot) = 0,$$

das heißt:  $\tilde{y} - y_p$  ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Hieraus folgt mit Satz (3.17)(b):

$$\tilde{y} = (\tilde{y} - y_p) + y_p = \sum_{k=1}^n c_k Y_k + y_p$$

für geeignete Konstanten  $c_k$ . ┘

Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $Ly = 0$  explizit angeben können, haben wir nach diesem Satz das inhomogene Problem (9) vollständig gelöst, wenn wir (außer den Lösungen  $Y_1, \dots, Y_n$  des homogenen Problems) eine einzige sogenannte **partikuläre Lösung**  $y_p$  von (9) gefunden haben. Hierzu dienen die oben genannten Methoden (a)–(c).

Nach dem folgenden Satz ist es erlaubt, ein gegebenes  $K(\cdot)$  in Komponenten zu zerlegen und die zugehörigen Teilprobleme je für sich zu behandeln:

**(3.19)** *Es sei  $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$ , und es sei  $y_1$  eine Lösung der Differentialgleichung  $Ly = K_1(t)$ , analog  $y_2$  eine Lösung der Differentialgleichung  $Ly = K_2(t)$ . Dann ist  $y_1 + y_2$  eine Lösung der Differentialgleichung*

$$Ly = K(t).$$

┘ Es ist  $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = K_1 + K_2 = K$ . ┘

### Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

Die Methode (a) ist anwendbar, falls die Anregung  $K(\cdot)$  selber Lösung einer geeigneten *homogenen* linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sein kann.  $K(\cdot)$  muß also von der Form

$$K(t) := t^r e^{\lambda t}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

oder eine Linearkombination von Funktionen dieser Art sein.

Bsp:  $1, \quad b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r, \quad \cos(\omega t), \quad e^{-\delta t} \sin(\omega t), \quad t^r e^{-t}.$

In diesem Fall hilft ein geeigneter Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Die Grundregel lautet (ohne Beweis):

**(3.20)** Ist

$$K(t) := q(t) e^{\lambda_0 t},$$

mit einem Polynom  $q(\cdot)$  vom Grad  $r$  und ist  $\lambda_0$  ein  $m$ -facher Eigenwert von  $L$ , so erhält man eine partikuläre Lösung von (9) durch den Ansatz

$$y_p(t) := (A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r) t^m e^{\lambda_0 t}$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $A_k$ .

Dieser Ansatz ist in die Differentialgleichung (9) einzubringen, worauf die  $A_k$  durch Koeffizientenvergleich so bestimmt werden können, daß (9) identisch in  $t$  erfüllt ist. — Satz **(3.20)** handelt vom schlimmstmöglichen Fall. Im allgemeinen sind wenigstens zwei der drei Zahlen  $r$ ,  $m$ ,  $\lambda_0$  gleich 0, und alles wird viel einfacher. Ist  $m > 0$ , das heißt:  $\lambda_0 \in \text{spec } L$ , so sind wir im **Resonanzfall**: Die Anregung  $K(\cdot)$  besitzt die gleiche Frequenz wie eine Eigenschwingung des ungestörten Systems. Dies führt bekanntlich zu besonderen Effekten.

Ist die Anregung  $K(\cdot)$  eine Superposition von Termen  $K_j(t) := q_j(t) e^{\lambda_j t}$  mit verschiedenen  $\lambda_j$ , so ist für jeden derartigen Term ein  $y_{p,j}$  gemäß **(3.20)** anzusetzen, und die zu  $K := \sum_j K_j$  gehörige partikuläre Lösung ist dann nach **(3.19)** gegeben durch

$$y_p = \sum_j y_{p,j}.$$

*Bsp:* Bei dem “trigonometrischen Monom”  $K(t) := \cos(\omega t)$  sind die beiden Frequenzen  $i\omega$  und  $-i\omega$  angeregt, und die zugehörige partikuläre Lösung wird im allgemeinen  $e^{i\omega t}$ - und  $e^{-i\omega t}$ -Terme enthalten. Ist alles reell (und  $\pm i\omega$  kein Eigenwert von  $L$ ), so wird man daher von vorneherein

$$y_p(t) := A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

ansetzen.

Weitere Beispiele findet man in der folgenden Tabelle.

$K(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(t)$
$t^r$	$0 \notin \text{spec } L$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r$
	$0 \in \text{spec } L, m\text{-fach}$	$A_0 t^m + A_1 t^{m+1} + \dots + A_r t^{m+r}$
$b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r,$ $b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \text{spec } L$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \text{spec } L$	$A e^{\lambda_0 t}$
	$\lambda_0 \in \text{spec } L, m\text{-fach}$	$A t^m e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	$\pm i\omega \notin \text{spec } L$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
	$\pm i\omega \in \text{spec } L, \text{ einfach}$	$t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$
$t^2 e^{-t}$	$-1 \notin \text{spec } L$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) e^{-t}$

③ Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t) \quad (10)$$

beschreibt den resonant angeregten ungedämpften harmonischen Oszillator. Die zugehörige homogene Gleichung  $y'' + \omega^2 y = 0$  besitzt die allgemeine reelle Lösung

$$y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(siehe Beispiel ①). Für eine partikuläre Lösung von (10) machen wir gemäß unserer Tabelle den Ansatz

$$y_p(t) := t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

wobei die Koeffizienten  $A$  und  $B$  so festzulegen sind, daß die in (10) eingebrachte Funktion  $y_p$  diese Gleichung identisch in  $t$  erfüllt. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (A + B\omega t) \cos(\omega t) + (B - A\omega t) \sin(\omega t), \\ y_p''(t) &= (2B\omega - A\omega^2 t) \cos(\omega t) + (-2A\omega - B\omega^2 t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y_p''(t) + \omega^2 y_p(t) = 2B\omega \cos(\omega t) - 2A\omega \sin(\omega t),$$

und nach (10) sollte dies  $\equiv \cos(\omega t)$  sein. Es folgt

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2\omega}.$$

Aufgrund von Satz (3.18)(a) lautet demnach die allgemeine Lösung von (10):

$$y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) .$$

Wir beobachten eine Schwingung der Kreisfrequenz  $\omega$ , deren Amplitude unabhängig von den Anfangsbedingungen im wesentlichen linear mit der Zeit zunimmt (Fig. 3.6.2). ○

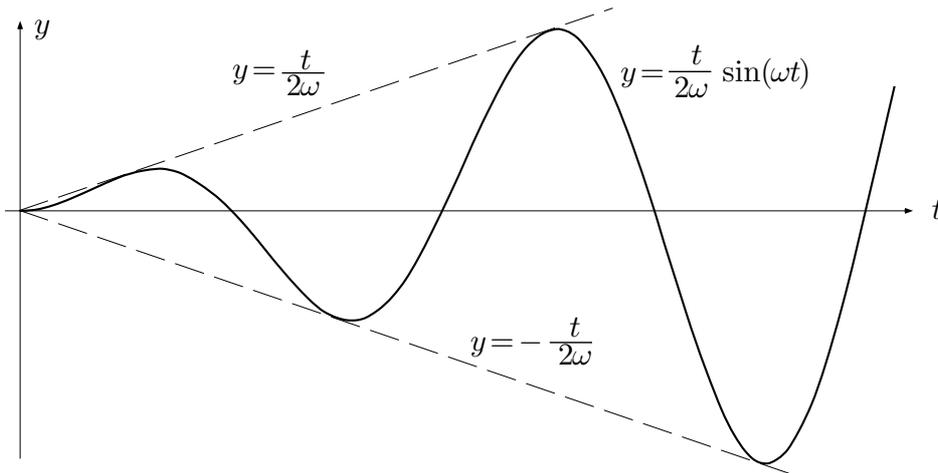


Fig. 3.6.2

### Der gedämpfte harmonische Oszillator

④ (Forts. von Beispiel 3.5.②) Bevor wir unser Federpendel wieder in Bewegung setzen, soll dargetan werden, daß zum Beispiel ein einfacher Schwingkreis (Fig. 3.6.3) zu der gleichen Differentialgleichung Anlaß gibt wie das Federpendel. Die beiden Systeme besitzen also formal dieselbe Theorie, und weiter: Die Vorgänge in dem betrachteten mechanischen System können in einem Schwingkreis mit passend gewählten Elementen “analog” reproduziert (**simuliert**) werden.

Jedes “Element” in dem Schwingkreis wird durch eine konstituierende Gleichung charakterisiert, wobei es üblich ist, die “Konstante” eines Elements mit demselben Buchstaben zu bezeichnen wie das betreffende Element selbst.

Element	konstituierende Gleichung
Kapazität $C$	$u_C = q / C$
Induktivität $L$	$u_L = L \frac{di}{dt}$
Widerstand $R$	$u_R = R i$

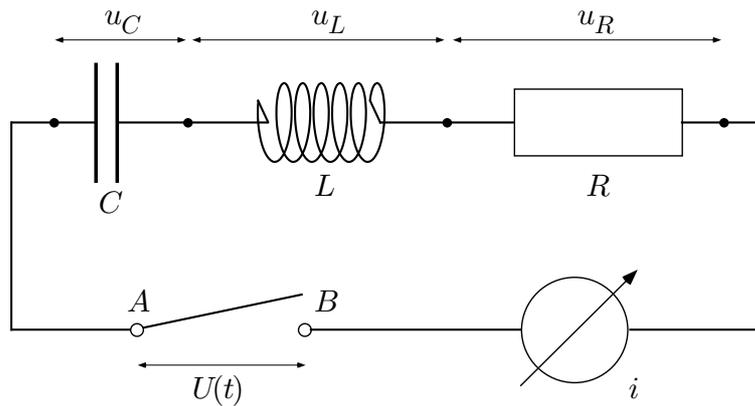


Fig. 3.6.3

Dabei bezeichnen  $u_C$ ,  $u_L$ ,  $u_R$  die über den betreffenden Elementen gemessenen Spannungen,  $q$  die auf  $C$  sitzende Ladung und  $i$  den in dem Stromkreis fließenden Strom. Es gilt

$$i = \dot{q} . \quad (11)$$

Wird der Schalter über den Klemmen  $A$  und  $B$  geschlossen, so gilt nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz:

$$u_L + u_R + u_C = 0 .$$

Allgemein: Wird an die Klemmen  $A$  und  $B$  eine willkürlich modulierte Fremdspannung  $U(t)$  angelegt, so gilt

$$u_L + u_R + u_C = U(t) .$$

Aufgrund der konstituierenden Gleichungen der einzelnen Elemente haben wir daher

$$L \frac{di}{dt} + Ri + q/C = U(t) .$$

Die Stromstärke  $i$  ist die in diesem Zusammenhang interessierende Zustandsvariable. Wir differenzieren die letzte Gleichung nach  $t$  und erhalten wegen (11):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \dot{U}(t) .$$

Dies ist die konstituierende Gleichung unseres Schwingkreises und stimmt bis auf die Bezeichnung der Systemparameter überein mit der Gleichung 3.5.(6), die wir hier noch einmal hinschreiben:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K(t) .$$

Wir kehren nun zu dem in Fig. 3.5.2 dargestellten mechanischen System zurück; allerdings soll es jetzt nur noch schwach gedämpft sein. Es sei also  $b^2 - 4fm < 0$ ; dann werden die beiden Eigenwerte

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4fm}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{f}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

komplex. Setzen wir zur Abkürzung

$$\delta := \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{f}{m}}, \quad \omega_* := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (12)$$

so kommt

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega_*, \quad \lambda_2 = -\delta - i\omega_* .$$

Die allgemeine reelle Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung 3.5.(8) ist somit gegeben durch

$$y(t) = e^{-\delta t} (a \cos(\omega_* t) + b \sin(\omega_* t)) \quad (13)$$

und stellt (unter beliebigen Anfangsbedingungen) eine gedämpfte Schwingung dar. Der Systemparameter  $\delta$  ist die **Dämpfungs-konstante**, und  $\omega_*$  heißt **Eigen-Kreisfrequenz** des betrachteten Systems. Aus (12) geht hervor, daß  $\omega_*$  im Fall  $\delta = 0$  (keine Dämpfung) den Wert  $\omega_0 = \sqrt{f/m}$  besitzt und mit zunehmender Dämpfung abnimmt.

Wir wollen weiter untersuchen, was beim Vorliegen einer harmonisch oszillierenden Anregung  $K(\cdot)$  geschieht. Hierzu betrachten wir die spezielle inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

mit einem frei wählbaren Parameter  $\omega > 0$ . Wir haben  $K(\cdot)$  komplex angesetzt, um die Phasenlage der entstehenden Schwingungen leichter beurteilen zu können.

Von nun an wollen wir  $\delta > 0$  voraussetzen, so daß  $i\omega$  jedenfalls kein Eigenwert der homogenen Gleichung ist. Nach Satz (3.20) ist dann eine partikuläre Lösung  $y_s(\cdot)$  in der Form

$$y_s(t) := c e^{i\omega t}$$

anzusetzen, das heißt: als harmonische Schwingung mit der komplexen Amplitude  $c$ . Setzen wir  $y_s(\cdot)$  und seine Ableitungen

$$\dot{y}_s(t) = i\omega c e^{i\omega t}, \quad \ddot{y}_s(t) = -\omega^2 c e^{i\omega t}$$

in (14) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für  $c$  die Bedingung

$$-m\omega^2 c + bi\omega c + fc = K_0 .$$

Damit ist  $c$  bestimmt zu

$$c = \frac{K_0}{(f - m\omega^2) + ib\omega} = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}.$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung von (14), indem wir  $y_s(\cdot)$  zur allgemeinen Lösung (13) der homogenen Gleichung addieren. Da alle Funktionen (13) mit  $t \rightarrow \infty$  exponentiell abklingen, bleibt nach Beendigung dieses Einschwingvorgangs nur noch der (von den Anfangsbedingungen unabhängige) Summand  $y_s(\cdot)$  übrig. Man nennt daher  $y_s(\cdot)$  die **stationäre Lösung** von (14).

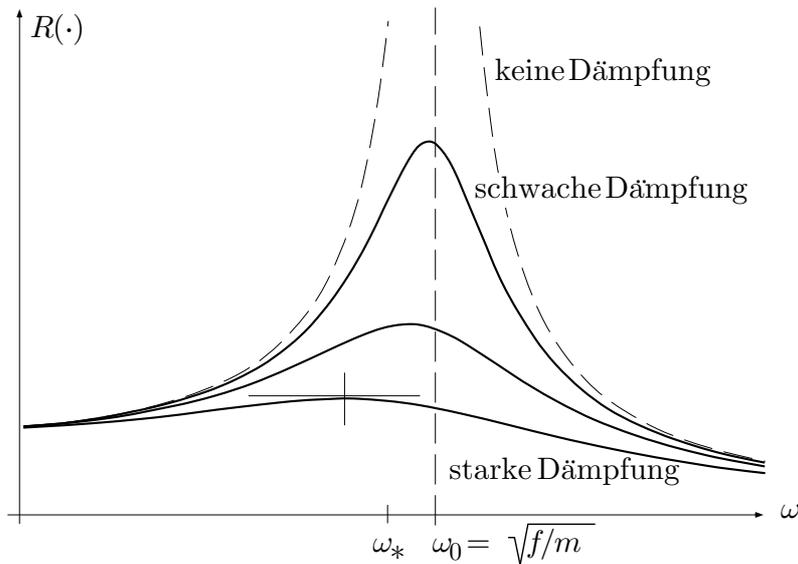


Fig. 3.6.4

Die stationäre Lösung  $y_s(\cdot)$  schwingt mit derselben, von den Systemparametern  $\omega_0$  und  $\delta$  *unabhängigen*, Frequenz wie die Anregung  $K(\cdot)$ . Wir untersuchen nun ihre komplexe Amplitude  $c$  etwas genauer. Der Betrag

$$|c| = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} =: R(\omega)$$

stellt die Amplitude der effektiv beobachteten Schwingung  $\operatorname{Re} y_s(\cdot)$  dar und hängt in charakteristischer Weise von der Anregungsfrequenz  $\omega$  ab (siehe die Fig. 3.6.4). Man nennt  $R(\cdot)$  die **Resonanzfunktion** des betrachteten Systems.  $R(\omega)$  ist maximal für diejenige Anregungsfrequenz  $\omega$ , die den Radikanden

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = \left(\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2)\right)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)$$

zu einem Minimum macht, und das ist ersichtlich der Fall, wenn die große Klammer verschwindet, das heißt für

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

also nicht für  $\omega := \omega_0$  oder  $\omega = \omega_*$ , wie man vielleicht erwarten würde.

Um die Phase von  $y_s(\cdot)$  bezüglich  $K(\cdot)$  zu bestimmen, schreiben wir  $c$  in der Form

$$c = \frac{K_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Mit  $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega =: c'$  folgt

$$\arg c = \arg c' = \arg(\omega_0^2 - \omega^2, -2\delta\omega)$$

(Fig. 3.6.5). Hiernach ist  $-\pi < \arg c < 0$ . Das bedeutet physikalisch:  $y_s(\cdot)$  eilt der Anregung  $K(\cdot)$  nach. Ist  $\omega = \omega_0$ , so ist  $\arg c = -\pi/2$ , und für  $\omega \rightarrow \infty$  strebt  $\arg c$  gegen  $-\pi$ .  $\bigcirc$

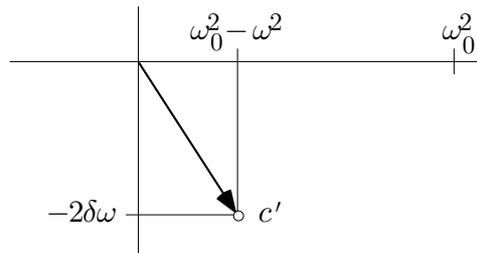


Fig. 3.6.5

## Eulersche Differentialgleichungen

Den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten liegt eine gewisse Translationsinvarianz der betrachteten Phänomene zugrunde: Man kann den Schwingungsversuch mit gleichen Anfangsdaten auf morgen verschieben und wird dasselbe einen Tag später beobachten. In gewissen geometrischen Situationen liegt statt der Translationsinvarianz eine "Streckungs-invarianz" vor, die ebenfalls zu linearen Differentialgleichungen von einem bestimmten Typ führt. Wir bezeichnen hierzu die unabhängige Variable mit  $r$  und lassen für  $r$  von vorneherein nur positive Werte zu, so daß Potenzen  $r^\alpha$  mit beliebigen reellen Exponenten  $\alpha$  definiert sind.

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y^{(n)} + \frac{b_{n-1}}{r} y^{(n-1)} + \dots + \frac{b_1}{r^{n-1}} y' + \frac{b_0}{r^n} y = 0 \quad (r > 0) \quad (15)$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten  $b_i$  wird (homogene) **Eulersche Differentialgleichung** genannt. Die Sätze **(3.17)**–**(3.19)** gelten für beliebige lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung, also auch hier. Man kann (15) mit Hilfe der Substitution

$$r = e^t \quad (-\infty < t < \infty)$$

und längeren Rechnungen in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen. Rascher kommt man mit dem richtigen Ansatz zum Ziel; er lautet:

$$y(r) := r^\alpha, \quad (16)$$

wobei der Exponent  $\alpha$  noch geeignet zu bestimmen ist. Zunächst folgt

$$y'(r) = \alpha r^{\alpha-1}, \quad y''(r) = \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2}, \dots$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha^{(k)} := \begin{cases} 1 & (k=0), \\ \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-(k-1)) & (k \geq 1) \end{cases} \quad (k \text{ Faktoren!})$$

erhalten wir allgemein

$$y^{(k)}(r) = \alpha^{(k)} r^{\alpha-k} \quad (k \geq 0).$$

Setzen wir das in (15) ein, so ergibt sich für die linke Seite der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \alpha^{(n)} r^{\alpha-n} + \frac{b_{n-1}}{r} \alpha^{(n-1)} r^{\alpha-(n-1)} + \dots + \frac{b_1}{r^{n-1}} \alpha r^{\alpha-1} + \frac{b_0}{r^n} r^\alpha \\ &= (\alpha^{(n)} + b_{n-1} \alpha^{(n-1)} + \dots + b_1 \alpha + b_0) r^{\alpha-n} \\ &= \text{inp}(\alpha) r^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$\text{inp}(\alpha) := \alpha^{(n)} + b_{n-1} \alpha^{(n-1)} + \dots + b_1 \alpha + b_0$$

das sogenannte **Indexpolynom** der Gleichung (15);  $\text{inp}(\cdot)$  besitzt den genauen Grad  $n$ . Die angesetzte Funktion (16) ist genau dann eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (15), wenn der zuletzt erhaltene Ausdruck

$$\text{inp}(\alpha) r^{\alpha-n}$$

identisch in  $r$  verschwindet, und das ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{inp}(\alpha) = 0 \quad (17)$$

ist. Hieraus folgt: Besitzt die **Indexgleichung** (17)  $n$  verschiedene reelle Lösungen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , so bilden die  $n$  (linear unabhängigen) Funktionen

$$Y_k(r) := r^{\alpha_k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

eine Basis des Lösungsraums  $\mathcal{L}$  von (15). Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$y(r) := c_1 r^{\alpha_1} + c_2 r^{\alpha_2} + \dots + c_n r^{\alpha_n} .$$

⑤ Die Eulersche Differentialgleichung

$$y''' + \frac{3}{r}y'' - \frac{3}{r^2}y' = 0$$

besitzt das Indexpolynom

$$\text{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1) - 3\alpha = \alpha^3 - 4\alpha = \alpha(\alpha+2)(\alpha-2)$$

mit Nullstellen  $\alpha_1 := 0$ ,  $\alpha_2 := 2$ ,  $\alpha_3 := -2$ . Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung lautet daher:

$$y(r) := c_1 + c_2 r^2 + c_3 \frac{1}{r^2} .$$

○

Wir untersuchen nicht, was bei komplexen Nullstellen des Indexpolynoms zu tun ist, gehen aber noch kurz auf den Fall mehrfacher Nullstellen ein. Die genauere Analyse liefert folgendes: Ist  $\alpha_0$  zum Beispiel eine zweifache Nullstelle des Indexpolynoms, so sind

$$Y_1(r) := r^{\alpha_0}, \quad Y_2(r) := r^{\alpha_0} \log r$$

zwei zugehörige linear unabhängige Lösungen von (15). Dies war aufgrund der Verwandtschaft von (1) und (15) zu erwarten.

⑥ Untersucht man stationäre Temperaturverteilungen auf einer Kreisscheibe oder auf Kreisringen, so wird man auf folgende Differentialgleichung geführt:

$$y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{k^2}{r^2}y = 0; \quad (18)$$

dabei ist der Parameter  $k$  eine beliebige natürliche Zahl. Das Indexpolynom

$$\text{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = \alpha^2 - k^2$$

besitzt für  $k > 0$  die zwei reellen Nullstellen  $\alpha_1 := k$ ,  $\alpha_2 := -k$ , und die allgemeine Lösung von (18) lautet in diesem Fall:

$$y(r) = c_1 r^k + c_2 \frac{1}{r^k} .$$

Ist jedoch  $k = 0$ , so besitzt das Indexpolynom die doppelte Nullstelle  $\alpha_0 := 0$ , und wir erhalten als allgemeine Lösung von (18):

$$y(r) = c_1 + c_2 \log r .$$

○

## Aufgaben

- Bestimme eine möglichst einfache lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten, welche die Funktion

$$f(x) := x e^{-2x} \cos x$$

als eine Lösung hat.

- Für diejenigen der folgenden Funktionen, die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sein können, gebe man je eine derartige Differentialgleichung an.

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\phi_1(t) := \cosh t$ ,                    | (b) $\phi_2(t) := t^{3/2} \quad (t > 0)$ , |
| (c) $\phi_3(t) := \sin(t + 1)$ ,                | (d) $\phi_4(t) := t + \cos t$ ,            |
| (e) $\phi_5(t) := t^{1/\log t} \quad (t > 0)$ . |  |

- Ⓜ Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

- |   |
|---|
| (a) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$ ,      |
| (b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^{2x}$ , |
| (c) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$ .    |

- Ⓜ Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - y = \cosh t$$

sowie die Lösung, die den Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$  genügt.

5. (M) Betrachte ein gedämpftes Federpendel mit Masse  $m := 2.00$  kg, Federkonstante  $f := 300$  N/m und Dämpfungskonstante  $b := 60$  kg/sec. Der Anfangsausschlag beträgt  $y(0) := 0.50$  m.
- (a) Wie groß darf die nach unten gerichtete Anfangsgeschwindigkeit  $v(0)$  höchstens sein, wenn kein Nulldurchgang eintreten soll?
- (b) Man untersuche und zeichne den Bewegungsverlauf für  $v(0) = -15.0$  m/sec.

6. (M) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen:

$$(a) \quad \ddot{y} - 4y = te^{-t}, \quad (b) \quad \ddot{y} + \omega^2 y = t^2(1 + \cos(\omega t)).$$

7. Für welche Werte des komplexen Parameters  $\alpha$  besitzt die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \alpha y = 0$$

nichttriviale  $2\pi$ -periodische Lösungen?

8. Ein Federpendel (Fig. 3.5.2) besitzt die Federkonstante  $f := 1$ , die Dämpfung  $b := 2$  und eine frei wählbare Masse  $m > 0$ . Ist  $m$  hinreichend groß, so führt das angestoßene und dann losgelassene Pendel gedämpfte Schwingungen aus. In welchem Bereich läßt sich die Schwingungsdauer  $T$  durch Wahl von  $m$  variieren? (*Hinweis:* Es geht um die Eigenwerte der Differentialgleichung  $m\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$ . Die Kreisfrequenz  $\omega$  und  $T$  sind verknüpft durch  $T \cdot \omega = 2\pi$ .)
9. Die Bevölkerung eines Dorfes hat sich von 1820 bis 1920 exponentiell auf 1000 Personen verdoppelt. Ab 1920 wurde dieses natürliche Wachstum überlagert durch einen jährlich konstanten Wanderungsgewinn, und 1970 waren es bereits 2000 Einwohner. Wieviele Personen sind in dieser Zeit jährlich zugezogen? (*Hinweis:* Betrachte die Einwohnerzahl als kontinuierliche Variable. Verwende die Angaben über die erste Phase zur Bestimmung der Wachstumskonstanten  $\alpha$  und setze hierauf die während der zweiten Phase geltende Differentialgleichung an.)

10. Betrachte den Oszillator

$$\ddot{y} + (2 + \cos \alpha + \sin \alpha) \dot{y} + 3y = 0$$

für verschiedene Werte des reellen Parameters  $\alpha$ .

- (a) Zeige: Sämtliche Lösungen sind gedämpfte harmonische Schwingungen, und das für jeden Wert von  $\alpha$ .
- (b) Lege  $\alpha$  so fest, daß diese Schwingungen für  $t \rightarrow \infty$  möglichst rasch abklingen.
11. Gesucht sind die sämtlichen für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell gedämpften Lösungen der Differentialgleichung  $\ddot{y} + iy = 0$ . ( $i^2 = -1$ )

12. (M) Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator befindet sich zunächst in Ruhestellung. In einem gewissen Moment wird eine auslenkende Kraft eingeschaltet, die mit der Zeit exponentiell nachläßt. Es geht also um das Anfangswertproblem

$$\ddot{y} + \omega^2 y = e^{-\delta t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Langfristig, das heißt: nach dem Einschwingvorgang, verbleibt eine stationäre harmonische Schwingung. Berechne deren (reelle) Amplitude.

13. Wird durch das Zentrum der Erde ein Tunnel gebohrt und läßt man einen Stein in diesen Tunnel fallen, so pendelt der Stein in dem Tunnel harmonisch hin und her (ist nicht zu beweisen). Man berechne die Schwingungsdauer  $T$ , ausgedrückt durch den Erdradius  $R$  ( $\doteq 6400$  km) und die Erdbeschleunigung  $g$  ( $\doteq 10$  m/sec<sup>2</sup>) und gebe auch einen ungefähren Zahlenwert in Stunden an. (*Hinweis:* Überlege, wie Amplitude, Schwingungsdauer und Beschleunigung im Kulminationspunkt aneinander gekoppelt sind.)
14. (M) Versuche einen naheliegenden Ansatz zur Lösung der inhomogenen Eulerschen Differentialgleichung

$$y'' - \frac{4}{r}y' + \frac{6}{r^2}y = r^5.$$

# 4

## Integralrechnung

### 4.1 Der Integralbegriff

Die “Integralrechnung” besteht eigentlich aus zwei Teilen: einem begrifflichen Teil und einem Kalkül. In diesem ersten Abschnitt geht es um eine allgemein verwendbare Auffassung des Integrals als Grenzwert von Riemannschen Summen, und im zweiten Abschnitt beweisen wir den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung, der die Integralberechnung in eine sozusagen algebraische Aufgabe verwandelt. Daraus ergibt sich dann ein Kalkül, eben die “Technik des Integrierens”. Diesen Kalkül behandeln wir in den Abschnitten 4.3–4.5, und in Abschnitt 4.6 wenden wir das bis dahin Gelernte auf Differentialgleichungen an.

#### Volumenmessung

Der Integralbegriff stützt sich ganz wesentlich auf die Volumenmessung im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Wir beginnen daher mit einigen Feststellungen betreffend das “ $n$ -dimensionale Maß”, von den Mathematikern **Lebesgue-Maß** genannt.

Ohne das weiter zu hinterfragen, gehen wir davon aus, daß jeder vernünftige Bereich (Menge)  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein wohlbestimmtes ( **$n$ -dimensionales**) **Maß** oder **Volumen**  $\mu(B) \geq 0$  besitzt. Wie man dieses Volumen im Einzelfall berechnet, werden wir noch sehen; für “einfache Körper” stehen uns natürlich die Formeln der Elementargeometrie zur Verfügung.

Bsp: (Fig. 4.1.1–2)

$$\mu([a, b]) = \mu(]a, b[) = b - a ,$$

$$D := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \} \quad \Rightarrow \quad \mu(D) = \pi ,$$

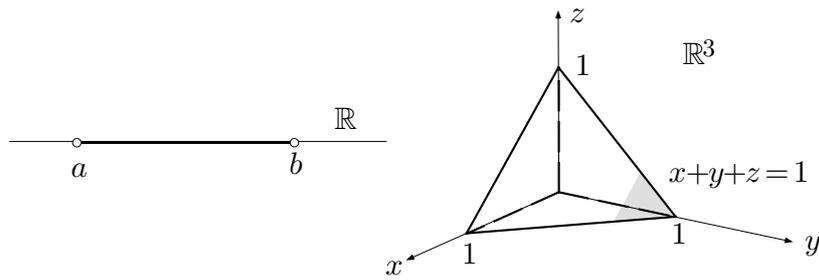


Fig. 4.1.1

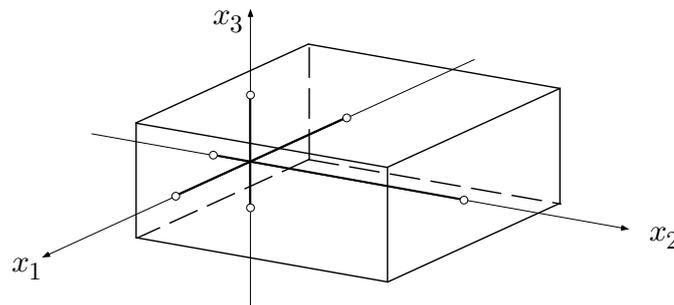


Fig. 4.1.2

$$B := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \} \Rightarrow \mu(B) = \frac{1}{6},$$

$$\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) = \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i).$$

Das Maß  $\mu$  besitzt folgende charakteristischen Eigenschaften:

- **Monotonie:**

$$B_1 \subset B_2 \quad \Longrightarrow \quad \mu(B_1) \leq \mu(B_2).$$

- **Additivität:** Für beliebige Mengen  $B_1, B_2$  gilt

$$\mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$$

(Fig. 4.1.3). Sind  $B_1$  und  $B_2$  disjunkt, so hat man sogar

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2).$$

- **Bewegungsinvarianz:** Wird  $B$  durch eine Bewegung des  $\mathbb{R}^n$  (Translation, Drehung, ...) in eine neue Lage  $B'$  gebracht, so ist  $\mu(B') = \mu(B)$ .

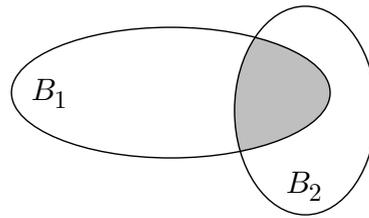


Fig. 4.1.3

Ist  $B \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mu(B) = 0$ , so nennt man  $B$  eine ( **$n$ -dimensionale**) **Nullmenge**. Nullmengen können bei der Integration vernachlässigt werden. Endlich viele Punkte bilden immer eine Nullmenge. Eine vernünftige ebene Kurve ist eine zweidimensionale Nullmenge. Wird diese Kurve aber als “eindimensionales Objekt” aufgefaßt, so hat sie eine durchaus interessante positive Länge. Analog ist eine vernünftige Fläche im  $\mathbb{R}^3$  eine dreidimensionale Nullmenge; als “zweidimensionales Objekt” aufgefaßt hat sie aber einen positiven Flächeninhalt. Allgemein ist der Rand  $\partial B$  eines vernünftigen Bereiches  $B \subset \mathbb{R}^n$  eine  $n$ -dimensionale Nullmenge, und es kommt für das Maß dieses Bereiches nicht darauf an, ob  $\partial B$  einbezogen ist oder nicht.

① Wir zeigen, daß sich der Einheitskreis  $\partial D \subset \mathbb{R}^2$  durch endlich viele Rechtecke beliebig kleiner Gesamtfläche überdecken läßt. — Betrachte für ein beliebiges  $n \geq 2$  das Rechteck  $R$  der Figur 4.1.4. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(R) &= 2 \sin \frac{\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{2n} \\ &\leq 4 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\pi^3}{n^3}. \end{aligned}$$

Da  $n$  derartige Rechtecke den Einheitskreis  $\partial D$  überdecken, ist

$$\mu(\partial D) \leq n \frac{\pi^3}{n^3} = \frac{\pi^3}{n^2},$$

und das kann nur dann für beliebige  $n$  zutreffen, wenn  $\mu(\partial D) = 0$  ist.  $\circ$

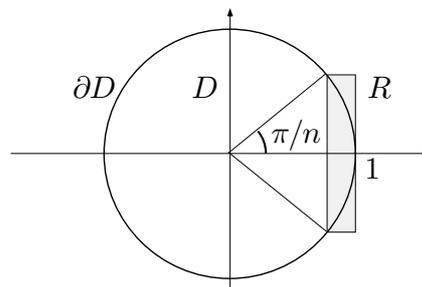


Fig. 4.1.4

Weiter: Stoßen zwei im übrigen disjunkte Bereiche  $B_1, B_2$  längs einer niedrigerdimensionalen “Seitenfläche” zusammen (Fig. 4.1.5), so sagen wir,  $B_1$  und  $B_2$  seien **fast disjunkt**. Es gilt dann immer noch

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) .$$

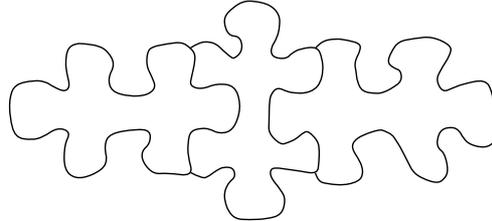


Fig. 4.1.5

## Die Idee des “Integrals”

Nun zum eigentlichen Problem! Es geht darum, gewisse analytische, geometrische oder physikalische Größen  $\Theta$  als “Integral” einer Funktion  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$  über einen Bereich  $B \subset \text{dom}(f)$  aufzufassen:

$$\Theta = \int_B f \, d\mu = \int_B f(x) \, d\mu(x) . \quad (1)$$

Die Funktion  $f$  ist als eine räumlich oder zeitlich (‘ $t$ ’ anstelle von ‘ $x$ ’) veränderliche “Intensität” zu interpretieren, und das Integral  $\Theta$  ist die von  $f$  auf  $B$  erzielte “Gesamtwirkung”. Wir geben einige Beispiele für derartige Größen  $\Theta$ :

- die Fläche zwischen der  $t$ -Achse und einer Kurve  $y = f(t)$  ( $a \leq t \leq b$ );
- das Volumen eines Erdhaufens auf dem Areal  $B \subset \mathbb{R}^2$ , bei gegebener variabler Schütthöhe  $z = f(x, y)$ ;
- die Länge einer Kurve  $\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) in der Ebene oder im Raum (“Längenintensität” ist die Absolutgeschwindigkeit  $v(t) := |\dot{\mathbf{x}}(t)|$ );
- das Volumen  $\mu(B)$  eines  $n$ -dimensionalen Bereiches  $B \subset \mathbb{R}^n$  (“Volumenintensität” ist die Funktion  $\equiv 1$ ).
- die Gesamtmasse eines Körpers  $B \subset \mathbb{R}^3$  von variabler Dichte  $\rho = \rho(\mathbf{x})$ , analog: die auf  $B$  sitzende Gesamtladung einer kontinuierlichen Ladungsverteilung;
- das Trägheitsmoment eines Körpers  $B \subset \mathbb{R}^3$  bezüglich einer körperfesten Achse  $a$ ;

- die Arbeit eines Vektorfeldes längs einer Kurve;
- der Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche.

Später wird es darum gehen, derartige Integrale in endlich vielen Schritten zu berechnen, wenn die Funktion  $f$  als Ausdruck und der Bereich  $B$  etwa durch Ungleichungen gegeben sind. Dies ist die “Technik des Integrierens”. Oft hilft sie allerdings nichts, und man ist auf numerische Methoden angewiesen.

Vom Ansatz her sollte das Integral (1) die folgenden Eigenschaften besitzen:

(a) **Linearität** bezüglich  $f$ :

$$\int_B (f_1 + f_2) d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B f_2 d\mu, \quad \int_B (\alpha f) d\mu = \alpha \int_B f d\mu,$$

(b) **Additivität** bezüglich  $B$ :

$$\mu(B_1 \cap B_2) = 0 \implies \int_{B_1 \cup B_2} f d\mu = \int_{B_1} f d\mu + \int_{B_2} f d\mu,$$

(c) Bezug zur Volumenmessung: Ist  $f(x) \geq 0$ , so gilt

$$\int_B f d\mu = \mu(K_{B,f}); \tag{2}$$

dabei bezeichnet

$$K_{B,f} := \{(\mathbf{x}, y) \mid \mathbf{x} \in B, 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(Fig. 4.1.9) den “**Kuchen**” mit “Grundfläche”  $B \subset \mathbb{R}^n$  und oberem Abschluß  $\mathcal{G}(f)$ .

Wendet man (c) auf die Funktion  $f(\mathbf{x}) \equiv 1$  an, so ergibt sich

$$(d) \quad \int_B 1 d\mu = \mu(B \times [0, 1]) = \mu(B) \cdot 1 = \mu(B),$$

und das ist nicht so banal, wie es aussieht: Von rechts nach links gelesen, stellt diese Formel das Volumen  $\mu(B)$  als Integral dar und ermöglicht damit, beliebige Volumina mithilfe des Integralkalküls zu berechnen.

## Riemannsche Summen

Vorderhand ist das Integral (1) noch eine sehr pauschale, für positive  $f$  durch (2) definierte Größe. Um nun an die "Feinstruktur" von (1) heranzukommen, betrachten wir Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  des Integrationsbereichs  $B \subset \mathbb{R}^n$  in endlich viele Teilbereiche  $B_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ), die untereinander höchstens "Seitenflächen" gemeinsam haben (Fig. 4.1.6). Wir schreiben dafür

$$\mathcal{Z}: \quad B = \bigcup_{k=1}^N B_k .$$

Für derartige Zerlegungen gilt

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^N \mu(B_k) .$$

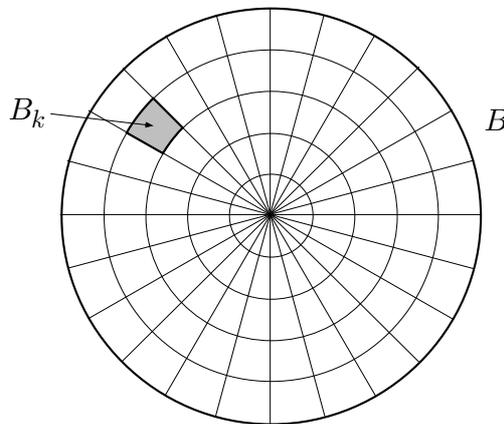


Fig. 4.1.6

Wir benötigen noch das folgende handliche Messinstrument: Für eine beliebige nichtleere Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt

$$\text{diam}(M) := \sup\{|x - x'| \mid x, x' \in M\}$$

(Fig. 4.1.7) der **Durchmesser** von  $M$ . Der Durchmesser eines Intervalls ist dessen Länge, der Durchmesser eines Kreises ist dessen Durchmesser, und ein Würfel der Kantenlänge  $a$  besitzt den Durchmesser  $\sqrt{3}a$ .

Wird ein Bereich  $B$  wie angegeben in Teilbereiche  $B_k$  zerlegt, so nennen wir

$$\max_{1 \leq k \leq N} \text{diam}(B_k) =: \delta(\mathcal{Z})$$

das **Korn** der betreffenden Zerlegung  $\mathcal{Z}$  (Fig. 4.1.8).

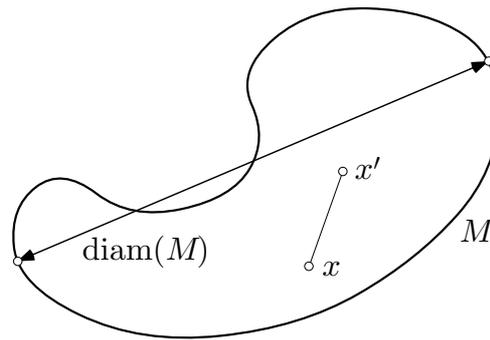


Fig. 4.1.7

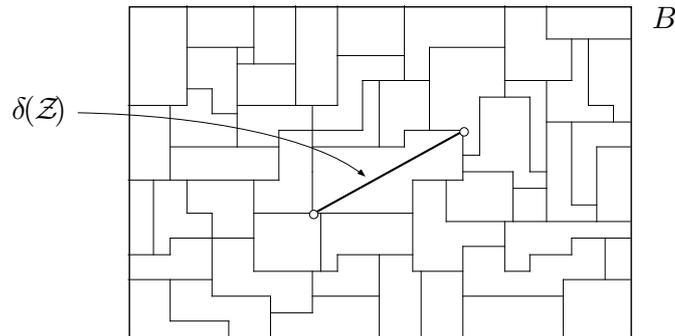


Fig. 4.1.8

Zur Veranschaulichung wählen wir im weiteren  $n := 2$ . Es sei also  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränkter ebener Bereich und

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mathbf{x} \mapsto y := f(\mathbf{x})$$

eine stetige Funktion, die wir der Einfachheit halber als lipstetig voraussetzen:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in B : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (3)$$

Der Graph  $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^3$  ist eine schlicht über  $B$  liegende Fläche, und  $\int_B f \, d\mu$  ist definitionsgemäß das Volumen ( $=: V$ ) des zwischen  $B$  und  $\mathcal{G}(f)$  eingeschlossenen Kuchens  $K_{B,f}$ . Um dieses Volumen approximativ zu berechnen, wählen wir eine ganz beliebige Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $B$  in kleine Teilbereiche  $B_k$  und in jedem Teilbereich einen "Meßpunkt"  $\mathbf{x}_k$ . Innerhalb eines einzelnen  $B_k$  ist  $f$  fast konstant, das heißt: Es gilt

$$\forall \mathbf{x} \in B_k : f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{x}_k).$$

Genauer: Besitzt die gewählte Zerlegung das Korn  $\delta(\mathcal{Z}) =: \delta$ , so sind die Distanzen innerhalb eines  $B_k$  höchstens gleich  $\delta$  (Fig. 4.1.10), und es gilt wegen (3):

$$\forall \mathbf{x} \in B_k : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k)| \leq C\delta$$

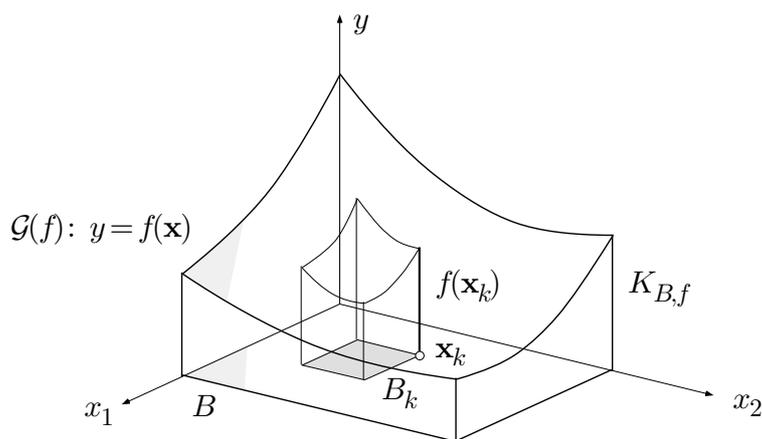


Fig. 4.1.9

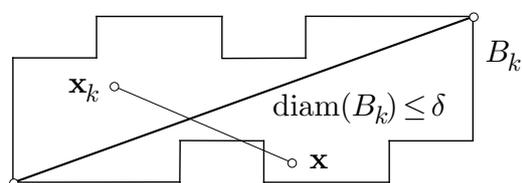


Fig. 4.1.10

bzw.

$$f(\mathbf{x}_k) - C\delta \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_k) + C\delta .$$

Bezeichnen wir das zu  $B_k$  gehörige Teilvolumen mit  $V_k$ , so liegt daher  $V_k$  zwischen den Volumina der beiden prismatischen Körper mit der Grundfläche  $B_k$  und der Höhe  $f(\mathbf{x}_k) - C\delta$  bzw.  $f(\mathbf{x}_k) + C\delta$  (Fig. 4.1.11). Es gilt somit approximativ

$$V_k \doteq f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \quad (4)$$

und genau

$$(f(\mathbf{x}_k) - C\delta) \mu(B_k) \leq V_k \leq (f(\mathbf{x}_k) + C\delta) \mu(B_k) .$$

Summieren wir dies über  $k$ , so ergibt sich wegen

$$\sum_{k=1}^N \mu(B_k) = \mu(B) , \quad \sum_{k=1}^N V_k = V$$

die folgende Eingabelung des Gesamtvolumens  $V$ :

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) - C\delta \mu(B) \leq V \leq \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) + C\delta \mu(B) ,$$

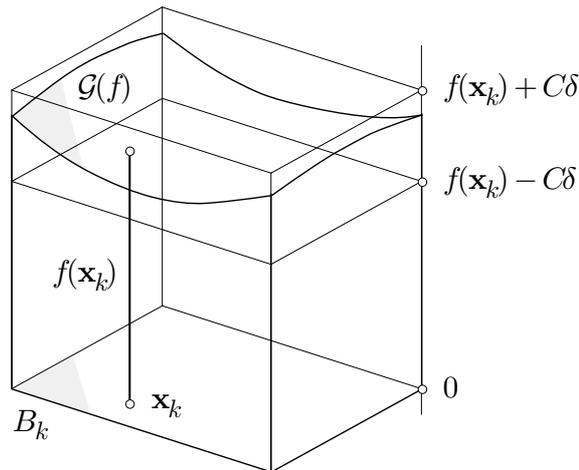


Fig. 4.1.11

was wir auch in der Form

$$\left| V - \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \right| \leq C\delta\mu(B)$$

schreiben können. Die letzte Beziehung läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die **Riemannsche Summe**

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k)$$

ist ein Näherungswert für das gesuchte Volumen  $V$  und damit für das angepeilte Integral  $\int_B f d\mu$ :

$$\int_B f d\mu \doteq \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k), \quad (5)$$

und zwar ist der Fehler  $\leq C\delta\mu(B)$ . Ist also eine Fehlerschranke (Toleranz)  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so müssen wir das Korn  $\delta$  der verwendeten Zerlegung  $\mathcal{Z}$  so klein wählen, daß  $C\delta\mu(B) \leq \varepsilon$  wird, und sind dann sicher, daß der Fehler in der Approximation (5) höchstens  $\varepsilon$  beträgt.

② Wie wir später zeigen, hat die Fläche  $A$  zwischen dem Intervall  $I := [1, 2]$  der  $x$ -Achse und der Kurve  $y = 1/x$  (Fig. 4.1.12) den Wert  $\log 2$ . Wir wollen diese Fläche mit einem Fehler  $\leq 10^{-2}$  berechnen und benötigen hierzu eine (auf  $I$  gültige) Lipschitz-Konstante  $C$  der Funktion  $f(x) := 1/x$ .

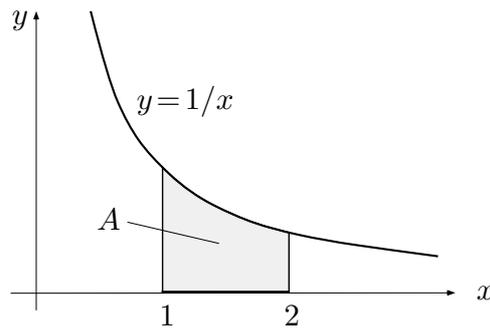


Fig. 4.1.12

Für  $x \geq 1$  ist  $|f'(x)| = 1/x^2 \leq 1$ ; somit gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Version (3.7):

$$\forall x, x' \geq 1: \quad |f(x) - f(x')| \leq |x - x'|,$$

und  $C := 1$  ist o.k. — Wir müssen nun das Korn  $\delta$  so klein wählen, daß

$$C \delta \mu(I) = 1 \cdot \delta \cdot 1 \leq 10^{-2}$$

wird. Es genügt daher, das Intervall  $I$  in hundert gleiche Teile

$$I_k := \left[ 1 + \frac{k-1}{100}, 1 + \frac{k}{100} \right] \quad (1 \leq k \leq 100)$$

zu teilen und als Meßpunkte zum Beispiel die rechten Endpunkte der  $I_k$  zu nehmen:

$$x_k := 1 + \frac{k}{100} \quad (1 \leq k \leq 100).$$

Wir haben dann

$$A \doteq \sum_{k=1}^{100} f(x_k) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{1 + k/100} \cdot \frac{1}{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{100 + k} \doteq 0.69065.$$

(Der Tabellenwert ist  $\log 2 = 0.69315\dots$ )

○

## Das Integral als Grenzwert von Riemannschen Summen

Wir wiederholen das (vor diesem Beispiel) zuletzt Gesagte noch einmal: Ist in der betrachteten Situation eine beliebig kleine Toleranz  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gilt für *jede* Zerlegung

$$\mathcal{Z}: \quad B = \bigcup_{k=1}^N B_k$$

mit einem Korn

$$\delta(\mathcal{Z}) \leq \delta_0 := \frac{\varepsilon}{C\mu(B)}$$

die Beziehung

$$\left| \int_B f d\mu - \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \right| \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Das ist aber nichts anderes als die verbale Beschreibung des Faktums

$$\int_B f d\mu = \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung, also der Grenzwert der Riemannschen Summen für immer feinere Zerlegungen, heißt **Riemannsches Integral der Funktion  $f$  über den Bereich  $B$** .

Aufgrund der vorangegangenen Überlegungen definieren wir nunmehr allgemein, das heißt: für beliebige beschränkte  $B \subset \mathbb{R}^n$  und beliebige  $f: B \rightarrow \mathbb{X}$ :

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) := \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k). \quad (7)$$

Der Übergang von den Riemannschen Summen zum Integral ist von den typographischen Metamorphosen

$$\sum_{k=1}^N \longrightarrow \int_B, \quad f(\mathbf{x}_k) \longrightarrow f(\mathbf{x}), \quad \mu(B_k) \longrightarrow d\mu(\mathbf{x})$$

begleitet. Der in der Analysis für manches herhaltende Buchstabe ‘ $d$ ’ vor einer Variablen will hier die Idee: “ein kleines Bißchen von dem Betreffenden” vermitteln —  $d\mu(\mathbf{x})$  also die Idee: “ein kleines Bißchen Volumen an der Stelle  $\mathbf{x}$ ”; man nennt das auch ein **Volumenelement**. Die folgenden einfacheren Schreibweisen sind allgemein üblich: Für Volumenelemente auf der Zahlengeraden  $\mathbb{R}^1$  schreibt man kurz  $dx$ ,  $dt$ , ... anstelle von  $d\mu(x)$ ,  $d\mu(t)$ , ...; “Flächenelemente” in  $\mathbb{R}^2$  werden oft mit  $dA$  bezeichnet (‘ $A$ ’ für englisch *area*; der Buchstabe  $F$  ist sonst schon überstrapaziert), und für dreidimensionale Volumenelemente schreibt man gern  $dV$ .

In dieser Weise angeregt kann man die Beziehung (4) umschreiben in

$$dV = f(\mathbf{x}) dA$$

und erhält direkt

$$V = \int dV = \int_B f(\mathbf{x}) dA. \quad (8)$$

Bei dem zuletzt vollzogenen ‘‘Kurzschluß’’ handelt es sich nicht um einen Beweis, sondern um eine von der Anschauung unterstützte Manipulation von Symbolen, die sich bewährt hat. Es ist eine Art Stenographie für den umständlicheren Vorgang mit den Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  und kann jederzeit in jenen zurückübersetzt werden. Wir werden im Gebrauch dieser Stenographie noch einige Übung erlangen.

Aus (7) folgt mit Satz (2.10): Ist  $\mathcal{Z}$  eine Folge von immer feineren Zerlegungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{Z}_n) = 0,$$

und wird für jedes  $n$  eine zu  $\mathcal{Z}_n$  gehörige Riemannsche Summe  $\Sigma_n$  berechnet, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}). \quad (9)$$

② (Forts.) Wir haben vorher einen Näherungswert für das Integral

$$A := \int_{[1,2]} \frac{1}{x} dx$$

bestimmt und wollen nun auch den exakten Wert kennenlernen. Hierzu verwenden wir eine geeignet gewählte Folge  $\mathcal{Z}$  von Zerlegungen des Intervalls  $[1, 2]$ , und zwar teilt die Zerlegung  $\mathcal{Z}_N$  das Intervall auf einer logarithmischen Skala in  $N$  gleiche Teile (Fig. 4.1.13). Wir setzen also

$$x_k := 2^{k/N} \quad (0 \leq k \leq N)$$

und erzeugen damit die ungleich langen Teilintervalle

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (1 \leq k \leq N).$$

Das Teilintervall  $I_k$  besitzt die Länge

$$\text{diam}(I_k) = \mu(I_k) = x_k - x_{k-1} = 2^{(k-1)/N} (2^{1/N} - 1) < 2 (2^{1/N} - 1).$$

Folglich ist das Korn  $\delta(\mathcal{Z}_N) < 2(2^{1/N} - 1)$ , und wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2^{1/N} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} (2^t - 1) = 0$$

gilt  $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{Z}_N) = 0$ , so daß wir (9) anwenden dürfen.

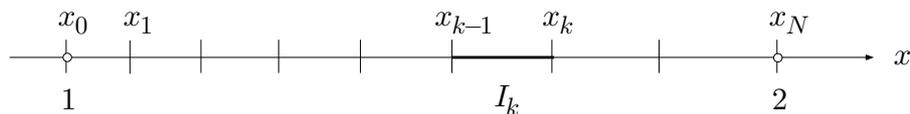


Fig. 4.1.13

Wir wählen als Meßpunkte die linken Endpunkte der  $I_k$  und berechnen die zugehörigen Riemannschen Summen  $\Sigma_N$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_N &= \sum_{k=1}^N f(x_{k-1}) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{x_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{x_k}{x_{k-1}} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^N (2^{1/N} - 1) = N (2^{1/N} - 1),\end{aligned}$$

denn alle  $N$  Summanden haben denselben Wert (das ist der Witz der gewählten Zerlegungen). Nach (9) erhalten wir daher

$$\begin{aligned}A &= \lim_{N \rightarrow \infty} (N (2^{1/N} - 1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\log 2/N} - 1}{1/N} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \log 2} - 1}{t} = \log 2,\end{aligned}$$

wie behauptet. ○

Wir haben in unseren Überlegungen vorausgesetzt, daß  $f$  stetig ist, ja sogar einer Lipschitz-Bedingung genügt. Das ist in Wirklichkeit nicht nötig. Für die Existenz des Grenzwerts (7) genügt es, wenn  $f$  beschränkt und **fast überall stetig** ist, das heißt: nur eine Nullmenge  $X \subset B$  von Unstetigkeitsstellen aufweist. Ein  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  darf also isolierte Sprungstellen haben, ein  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  längs einer Kurve sprunghaft von 1 auf 0 abfallen usw.

Um das einzusehen, überlegen wir folgendermaßen, wobei wir in Fig. 4.1.14 den eindimensionalen Fall  $B \subset \mathbb{R}$  darstellen: Es sei

$$\forall x \in B: \quad |f(x)| \leq M,$$

und es sei eine Fehlerschranke  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wird  $B$  hinreichend fein unterteilt, so ist das Gesamtmaß derjenigen  $B_k$ , die die Nullmenge  $X$  der Unstetigkeitsstellen treffen, kleiner als  $\varepsilon/(4M)$ . Die Schwankung von  $f$  auf einem derartigen "schlechten"  $B_k$  ist jedenfalls  $\leq 2M$ . Der von den schlechten  $B_k$  herrührende Volumenfehler (in der Figur durch die schmalen hohen Rechtecke repräsentiert) beträgt daher insgesamt höchstens

$$2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Auf der Vereinigung der übrigen (der "guten")  $B_k$  ist  $f$  stetig. Wenn man sie eventuell weiter unterteilt, kann man erreichen, daß die Schwankung von  $f$  in jedem einzelnen von ihnen  $\leq \varepsilon/(2\mu(B))$  wird. Der von einem guten  $B_k$  herrührende Volumenfehler beträgt dann höchstens

$$\frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \mu(B_k),$$

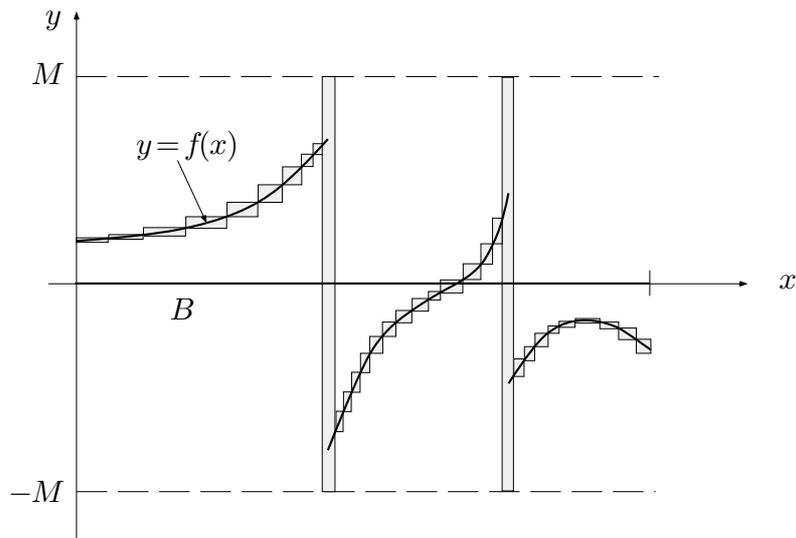


Fig. 4.1.14

so daß die guten  $B_k$  insgesamt höchstens

$$\frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \sum_{\text{gute } B_k} \mu(B_k) \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \mu(B) = \frac{\varepsilon}{2}$$

zum Gesamtfehler beitragen. (Dieser Beitrag wird in der Figur durch die Gesamtfläche der kleinen Rechtecke repräsentiert.)

Durch hinreichend feine Unterteilung können wir daher (6) garantieren, auch wenn  $f$  gewisse Unstetigkeitsstellen aufweist.

### Geometrische und physikalische Grössen, die sich als Integral auffassen lassen

Bevor wir eine allgemeine Methode zur Berechnung von Integralen angeben, wollen wir verschiedene der zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten geometrischen oder physikalischen Grössen tatsächlich als Integrale auffahren lassen.

- Ohne weiteres ist klar: Der zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen  $\mathcal{G}(f)$  einer Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eingeschlossene Flächeninhalt  $A$  ist darstellbar in der Form

$$A = \int_{[a,b]} f(x) dx .$$

Nimmt  $f$  beiderlei Vorzeichen an (Fig. 4.1.15), so werden in dem Integral

$$\int_{[a,b]} f(x) dx := \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(x_k) \mu(I_k)$$

die unterhalb der  $x$ -Achse liegenden Flächenstücke automatisch negativ gerechnet.

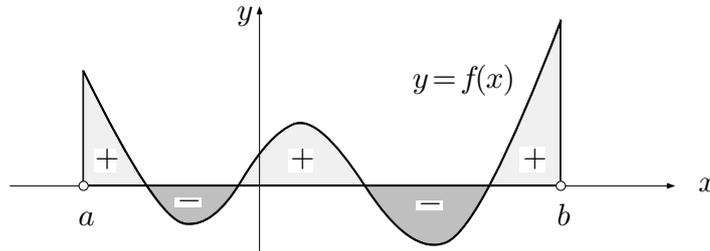


Fig. 4.1.15

Wir haben oben die approximative Beziehung (4) symbolisch umgewandelt in (8). Analog haben wir hier

$$A_k \doteq f(x_k) \mu(I_k)$$

(Figur 4.1.16 links) und abgekürzt

$$dA = f(x) dx$$

(Figur 4.1.16 rechts). Die letzte Formel ist nicht eine obskure Beziehung zwischen “unendlich kleinen Größen”, sondern — wie schon gesagt — ein Stenogramm für einen ausführlicheren Gedankengang.

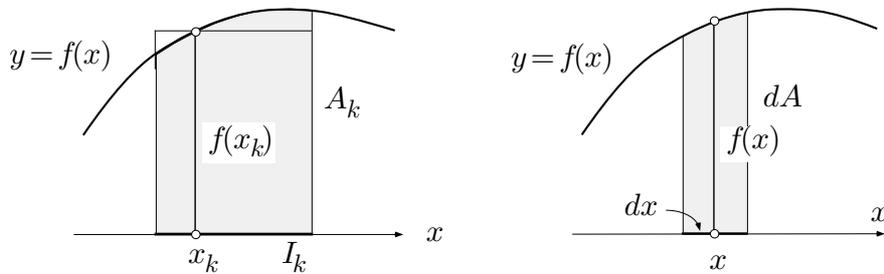


Fig. 4.1.16

- Wir betrachten weiter die Gesamtmasse eines dreidimensionalen Körpers  $B$  der variablen Dichte  $\rho(\cdot)$ . Wird  $B$  in sehr kleine Teilbereiche  $B_k$  zerlegt (Fig. 4.1.17), so ist  $\rho(\cdot)$  auf jedem einzelnen  $B_k$  fast konstant. Die Masse  $m_k$  von  $B_k$  ergibt sich somit approximativ zu

$$m_k \doteq \rho(\mathbf{x}_k) \mu(B_k), \quad (10)$$

wobei  $\mathbf{x}_k \in B_k$  ein beliebig gewählter Meßpunkt ist. Die Gesamtmasse  $m$  läßt sich daher wie folgt approximieren:

$$m = \sum_{k=1}^N m_k \doteq \sum_{k=1}^N \rho(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \doteq \int_B \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}),$$

und zwar ist der Fehler an beiden  $\doteq$ -Stellen umso kleiner, je feiner die Zerlegung  $\mathcal{Z}$  ist. In anderen Worten: “Im Limes” gilt das Gleichheitszeichen, und die gesuchte Gesamtmasse erscheint tatsächlich als Integral:

$$m = \int_B \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}). \quad (11)$$

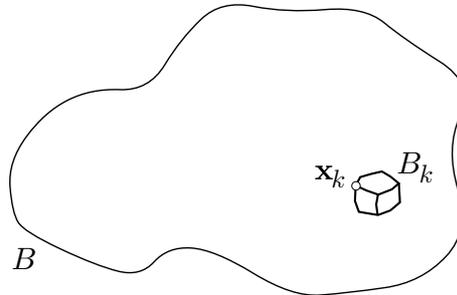


Fig. 4.1.17

Nach einiger Übung in diesen Dingen wird man ohne viel Federlesens anstelle von (10) schreiben:

$$dm = \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

(oder kürzer:  $dm = \rho dV$ ) und dann gleich zu (11) kommen.

- Eine Konfiguration von endlich vielen Punktmassen  $m_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) an den Stellen  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$  (Fig. 4.1.18) besitzt den Schwerpunkt

$$\mathbf{s} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^N m_k}.$$

Diese Formel ergibt sich aus der Momentenbedingung

$$\sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{s}) = \mathbf{0};$$

siehe dazu auch Beispiel 1.6.②).

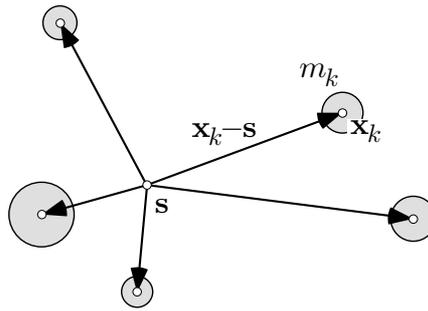


Fig. 4.1.18

Wir betrachten nun einen Bereich  $B \subset \mathbb{R}^n$ , den wir uns mit Masse der Dichte 1 belegt denken. Ein derartiger Bereich besitzt ebenfalls einen Schwerpunkt  $\mathbf{s}$ , und zwar hängt  $\mathbf{s}$  nur von der "Geometrie" von  $B$  ab. Um an diesen Schwerpunkt heranzukommen, zerlegen wir  $B$  in sehr kleine Teilbereiche  $B_k$ , die wir dann als Punktmassen der Masse  $\mu(B_k)$  an Stellen  $\mathbf{x}_k \in B_k$  auffassen können (Fig. 4.1.19). Wir schreiben nun für dieses Massensystem die Momentenbedingung an:

$$\sum_{k=1}^N \mu(B_k) (\mathbf{x}_k - \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

und bringen das auf die Form

$$\left( \sum_{k=1}^N \mu(B_k) \right) \mathbf{s} = \sum_{k=1}^N \mu(B_k) \mathbf{x}_k .$$

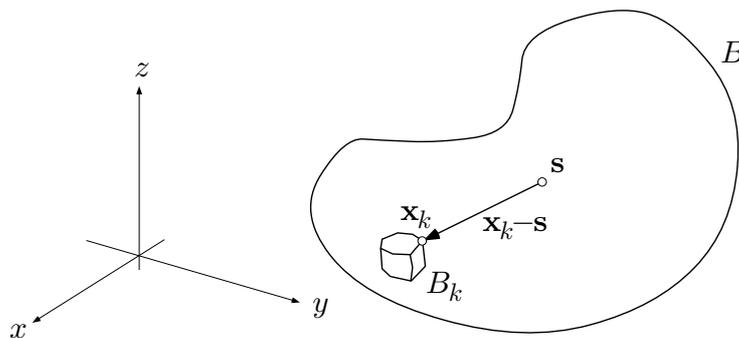


Fig. 4.1.19

Führen wir hier den Grenzübergang  $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$  durch, so ergibt sich

$$\mu(B) \mathbf{s} = \int_B \mathbf{x} d\mu(\mathbf{x}), \quad (12)$$

wobei hier rechter Hand die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$$

über  $B$  integriert wird. Der Anschaulichkeit halber denken wir uns das im  $(x, y, z)$ -Raum und schreiben  $dV$  anstelle von  $d\mu(\mathbf{x})$ . Indem wir (12) “koordinatenweise” lesen, erhalten wir dann für die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  des Schwerpunkts  $\mathbf{s}$ :

$$\xi = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x dV, \quad \eta = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y dV, \quad \zeta = \frac{1}{\mu(B)} \int_B z dV.$$

- Rotiert die in der  $(\rho, z)$ -Halbebene gezeichnete Kurve

$$\gamma: \quad \rho = f(z) \quad (a \leq z \leq b)$$

um die  $z$ -Achse (Fig. 4.1.20), so entsteht eine Rotationsfläche  $S$ .  $S$  ist Mantelfläche eines Rotationskörpers  $K$ , dessen Volumen  $V := \mu(K)$  nun berechnet werden soll.

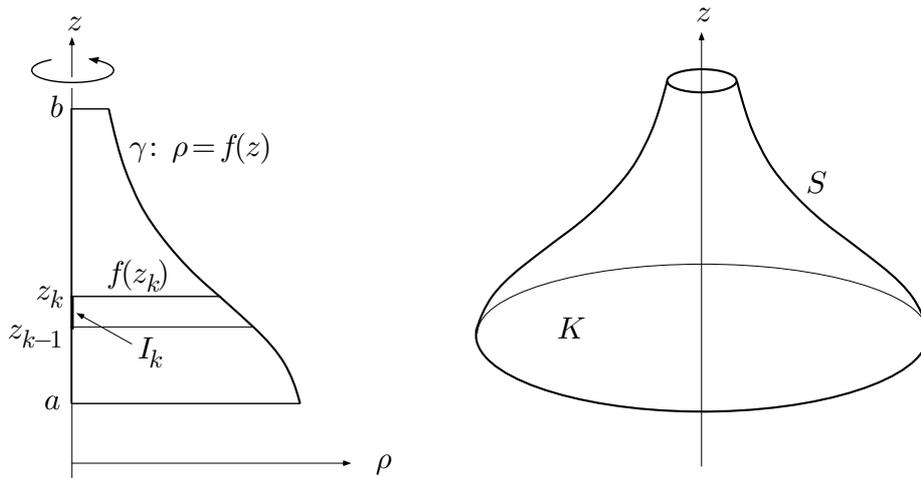


Fig. 4.1.20

Hierzu zerlegen wir das Intervall  $I := [a, b]$  in kleine Teilintervalle

$$I_k := [z_{k-1}, z_k] \quad (1 \leq k \leq N).$$

Die zwei Ebenen  $z = z_{k-1}$  und  $z = z_k$  schneiden aus  $K$  eine kreisrunde flache Scheibe heraus, deren Volumen  $V_k$  approximativ gegeben ist durch

$$V_k \doteq \pi (f(z_k))^2 (z_k - z_{k-1}) = \pi (f(z_k))^2 \mu(I_k).$$

Man könnte dies wie seinerzeit (4) durch eine Fehlerabschätzung präzisieren. Wir machen aber lieber gleich weiter und summieren über  $k$ ; es ergibt sich

$$V \doteq \pi \sum_{k=1}^N (f(z_k))^2 \mu(I_k) .$$

Der Grenzübergang  $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$  macht aus dem ‘ $\doteq$ ’ ein ‘ $=$ ’ und aus der rechten Seite ein Integral, und zwar erhalten wir die folgende Formel:

$$V = \pi \int_{[a,b]} (f(z))^2 dz .$$

Der schnellste Weg zu dieser Formel geht über

$$dV = \pi (f(z))^2 dz ,$$

was man direkt der Figur 4.1.21 entnimmt.

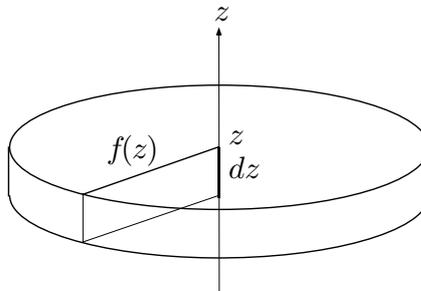


Fig. 4.1.21

- Wir betrachten noch einen Rotationskörper  $K$  in folgender Disposition: Gegeben ist eine positive Funktion

$$z = f(\rho) \quad (0 \leq \rho \leq R) ,$$

und  $K$  entsteht durch Rotation des Profils

$$P := \{ (\rho, z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq z \leq f(\rho) \}$$

um die  $z$ -Achse (Fig. 4.1.22).

Um das Volumen von  $K$  zu bestimmen, wählen wir von Anfang an den schnellen Weg. Wir betrachten also ein ‘‘infinitesimales’’ Teilintervall von  $I := [0, R]$  der Breite  $d\rho$  im Abstand  $\rho$  von der Achse. Der auf diesem Intervall stehende infinitesimale Streifen von  $P$  hat die Fläche

$$dA = f(\rho) d\rho$$

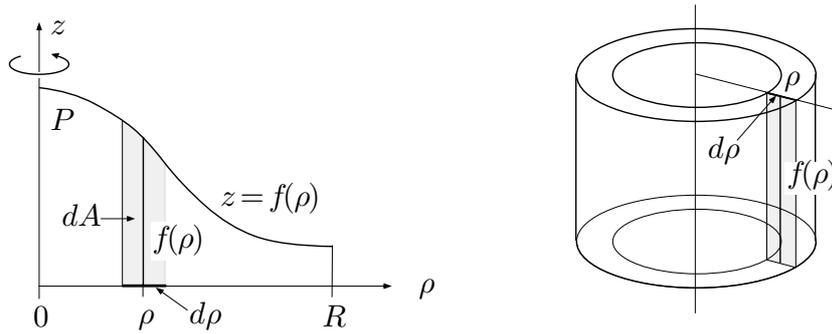


Fig. 4.1.22

und produziert bei der Rotation eine zylindrische Hülse vom Umfang  $2\pi\rho$  und somit vom Volumen

$$dV = 2\pi\rho dA = 2\pi\rho f(\rho) d\rho .$$

Für das Volumen von  $K$  erhalten wir daher die Formel

$$V = 2\pi \int_{[0,R]} \rho f(\rho) d\rho .$$

• Rotiert eine Punktmasse  $m$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse, so ist ihre Absolutgeschwindigkeit  $v$  gegeben durch  $v = \rho\omega$ , wobei  $\rho$  den Abstand von der Drehachse bezeichnet (Fig. 4.1.23), und deren kinetische Energie durch

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 . \quad (13)$$

Man nennt

$$\Theta := \rho^2 m$$

das **Trägheitsmoment** des rotierenden Massenpunktes bezüglich der  $z$ -Achse. Mit Hilfe dieses  $\Theta$  können wir anstelle von (13) schreiben:

$$T = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 .$$

Wir betrachten jetzt einen Körper  $K \subset \mathbb{R}^3$ , rotationssymmetrisch oder nicht, der zur Rotation mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse vorgesehen ist.  $K$  sei homogen mit Masse der Dichte  $m^*$  belegt. Ein Volumenelement  $d\mu(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  besitzt dann die Masse  $dm = m^* d\mu(\mathbf{x})$ , das Trägheitsmoment

$$d\Theta = \rho^2 dm = m^* \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

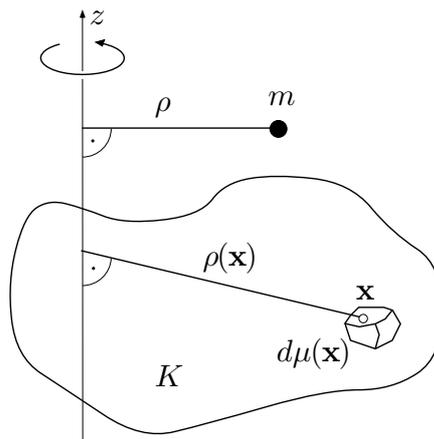


Fig. 4.1.23

und folglich bei der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  die kinetische Energie

$$dT = \frac{1}{2} \omega^2 d\Theta = \frac{1}{2} \omega^2 m^* \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) .$$

Die kinetische Gesamtenergie hat somit den Wert

$$T = \int dT = \frac{1}{2} \omega^2 m^* \int_K \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (14)$$

Die Größe

$$\begin{aligned} \Theta &:= m^* \int_K \rho^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \\ &= m^* \int_K (x^2 + y^2) dV \end{aligned}$$

(es ist ja  $\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) heißt **Trägheitsmoment** des Körpers  $K$  bezüglich der  $z$ -Achse. Mit dieser Abkürzung schreibt sich (14) in der Gestalt

$$T = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 ,$$

und der Vergleich mit (13) zeigt erstens: Das Trägheitsmoment ist das für die Drehbewegung maßgebende Analogon zur Masse, und zweitens: Die kinetische Energie ist, unabhängig von der Gestalt von  $K$ , proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

③ Es soll das das Trägheitsmoment eines Vollzylinders bezüglich seiner Achse berechnet werden. Gemeint ist ein Kreiszyylinder vom Radius  $R$ , der Höhe  $h$  und der Dichte  $m^* := 1$ ; Achse sei die  $z$ -Achse.

Betrachte ein infinitesimales Intervall  $d\rho$  im Abstand  $\rho$  von der  $z$ -Achse. Zu diesem Intervall gehört eine zylindrische Hülse (Fig. 4.1.24) vom Volumen

$$dV = 2\pi\rho \cdot h d\rho,$$

und alle Punkte dieser Hülse haben denselben Abstand  $\rho$  von der Drehachse. Die Hülse besitzt daher das Trägheitsmoment

$$d\Theta = \rho^2 dm = \rho^2 m^* dV = 2\pi h \rho^3 d\rho,$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Zylinders wird

$$\Theta = \int d\Theta = 2\pi h \int_{[0,R]} \rho^3 d\rho.$$

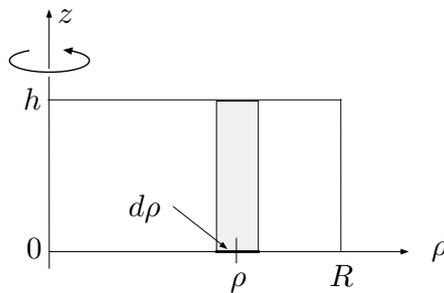


Fig. 4.1.24

Wir wollen nun dieses Integral tatsächlich ausrechnen. Hierzu teilen wir das Intervall  $I := [0, R]$  durch die Punkte

$$\rho_k := k \frac{R}{N} \quad (0 \leq k \leq N)$$

in  $N$  gleiche Teile  $I_k := [\rho_{k-1}, \rho_k]$  der Länge  $\mu(I_k) = R/N$  (Fig. 4.1.25). Die zu dieser Zerlegung von  $I$  gehörigen Riemannschen Summen  $\Sigma_N$  haben die Form

$$\Sigma_N = \sum_{k=1}^N f(\rho_k) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^N \rho_k^3 \cdot \frac{R}{N} = \left(\frac{R}{N}\right)^4 \sum_{k=1}^N k^3.$$

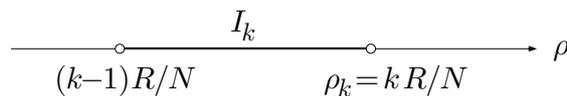


Fig. 4.1.25

Die Summe der ersten  $N$  Kubikzahlen ist (zufälligerweise) gleich dem Quadrat der Summe der ersten  $N$  Zahlen selber, das heißt: Es gilt

$$\sum_{k=1}^N k^3 = \left( \frac{N(N+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} N^4 \left( 1 + \frac{1}{N} \right)^2.$$

Damit ergibt sich

$$\Sigma_N = \frac{R^4}{4} \left( 1 + \frac{1}{N} \right)^2$$

und folglich wegen (9):

$$\int_{[0,R]} \rho^3 d\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N = \frac{R^4}{4},$$

so daß wir schließlich erhalten:

$$\Theta = \frac{\pi h R^4}{2}.$$

○

- Wir betrachten eine Kurve

$$\gamma: t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

in der Ebene, wobei wir die Funktion  $\mathbf{z}(\cdot)$  stetig differenzierbar voraussetzen wollen. Um an die Länge  $L(\gamma)$  dieser Kurve heranzukommen, gehen wir folgendermaßen vor:

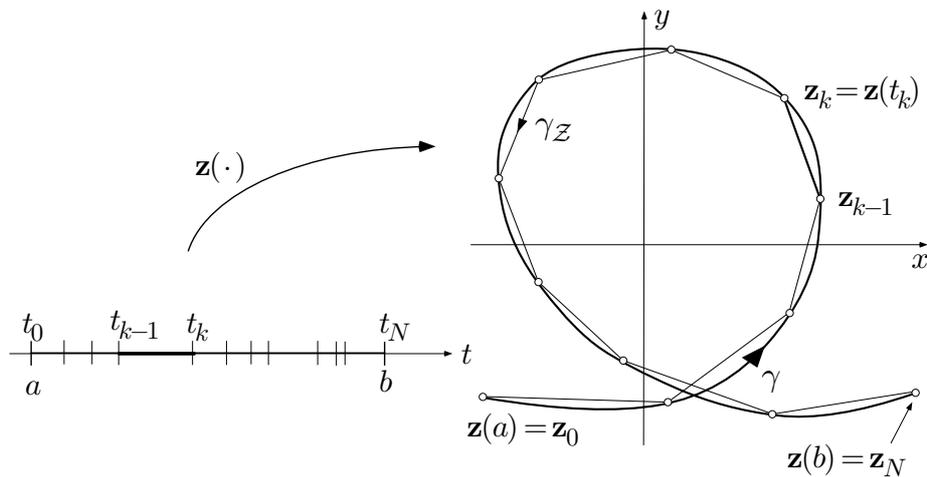


Fig. 4.1.26

Wir zerlegen das Intervall  $[a, b]$  durch Teilungspunkte

$$\mathcal{Z} : \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

in kleine Teilintervalle

$$I_k := [t_{k-1}, t_k] \quad (1 \leq k \leq N)$$

und verbinden die zu den  $t_k$  gehörigen Kurvenpunkte  $\mathbf{z}(t_k) =: \mathbf{z}_k$  der Reihe nach durch einen Streckenzug  $\gamma_{\mathcal{Z}}$  (Fig. 4.1.26). Die Länge  $L(\gamma_{\mathcal{Z}})$  dieses Streckenzugs ist ein Näherungswert für die gesuchte Länge  $L(\gamma)$ .

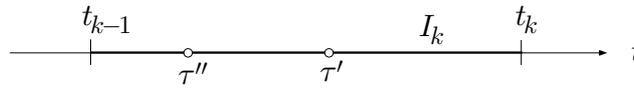


Fig. 4.1.27

Betrachten wir eine Teilstrecke

$$\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1} = (x(t_k) - x(t_{k-1}), y(t_k) - y(t_{k-1})),$$

so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Version **(3.6)**, Punkte  $\tau', \tau'' \in [t_{k-1}, t_k]$  (siehe die Fig. 4.1.27) mit

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tau')(t_k - t_{k-1}), \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = \dot{y}(\tau'')(t_k - t_{k-1}),$$

und wir erhalten für die Länge dieser Teilstrecke:

$$|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}| = \sqrt{\dot{x}^2(\tau') + \dot{y}^2(\tau'')}(t_k - t_{k-1}) = (\sqrt{\dot{x}^2(t_k) + \dot{y}^2(t_k)} + \Delta_k) \mu(I_k),$$

wobei der beim Ersatz  $\tau' \rightarrow t_k, \tau'' \rightarrow t_k$  eingebrachte Fehler  $\Delta_k$  mit  $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$  gegen 0 geht, da  $\dot{x}(\cdot)$  und  $\dot{y}(\cdot)$  stetig vorausgesetzt wurden. Wir erhalten daher unter Vernachlässigung der  $\Delta_k$ :

$$\begin{aligned} L(\gamma_{\mathcal{Z}}) &= \sum_{k=1}^N |\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}| \doteq \sum_{k=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(t_k) + \dot{y}^2(t_k)} \mu(I_k) \\ &\doteq \int_{[a,b]} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Das ist präzise folgendermaßen zu interpretieren: Ist eine Toleranz  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so haben alle der Kurve einbeschriebenen Streckenzüge  $\gamma_{\mathcal{Z}}$  mit hinreichend feinem Korn

$$\delta(\mathcal{Z}) := \max_{1 \leq k \leq N} (t_k - t_{k-1})$$

eine Länge  $L(\gamma_{\mathcal{Z}})$ , die sich von dem angeschriebenen Integral um weniger als  $\varepsilon$  unterscheidet. Wir definieren daher dieses Integral als **Länge der Kurve**  $\gamma$ :

$$L(\gamma) := \int_{[a,b]} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt . \quad (15)$$

Der von den obigen Überlegungen inspirierte formale Ausdruck

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

wird als **Linielement** bezeichnet.

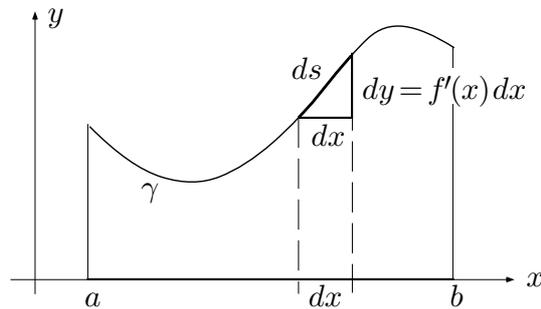


Fig. 4.1.28

Ist die Kurve  $\gamma$  als Graph einer Funktion vorgelegt:

$$\gamma: \quad y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) ,$$

so verwandeln wir das zunächst in die Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad x \mapsto (x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b)$$

mit der Variablen  $x$  als Parameter und wenden dann (15) an. Es ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx . \quad (16)$$

Die stenographische Herleitung dieser Formel erfolgt anhand der Figur 4.1.28, die unmittelbar das hier maßgebende Linielement

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

liefert.

## Aufgaben

1. (M) Berechne einen Näherungswert für das Integral

$$\int_0^2 e^{-t^2/2} dt$$

mit Hilfe einer Zerlegung des Intervalls  $[0, 2]$  in 20 gleiche Teile. Schätze den Fehler ab und vergleiche mit dem Tabellenwert.

2. Berechne die folgenden Integrale durch Betrachtung von Riemannschen Summen:

$$(a) \int_0^c x dx, \quad (b) \int_a^b e^{\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}_{\neq 0}.$$

Mit Hilfe von (b) lassen sich leicht auch die folgenden Integrale berechnen:

$$(c) \int_a^b \cos x dx, \quad (d) \int_a^b \sin x dx.$$

3. Berechne das Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiskegels  $K$  (Grundkreisradius  $R$ , Höhe  $h$ , Dichte  $m^* := 1$ ) bezüglich seiner Achse

- (a) mit Hilfe einer Zerlegung von  $K$  in flache zylindrische Scheiben,  
 (b) mit Hilfe einer Zerlegung von  $K$  in dünnwandige zylindrische Hülsen.

4. Über drei Einheitskreisen werden eine Halbkugel, ein Kreiskegel der Höhe 1 und ein Zylinder der Höhe 1 errichtet. Wird der Kegel auf die Spitze gestellt, so schneidet jede waagrechte Ebene die drei Körper in drei Kreisen, deren Flächeninhalte zueinander in einer einfachen Beziehung stehen. Aus diesem Sachverhalt läßt sich die Formel für das Kugelvolumen herleiten, wenn die entsprechenden Formeln für Kegel und Zylinder als bekannt vorausgesetzt werden.

5. Die Kurve

$$\gamma: \quad \rho = f(z) \quad (a \leq z \leq b)$$

erzeugt bei Rotation um die  $z$ -Achse eine Rotationsfläche  $S$ . Leite eine Formel her für den Flächeninhalt  $\omega(S)$ . (*Hinweis:* Zerlege  $S$  in "infinite-simale Lampenschirme".)

6. Besitzt der Bereich  $B \subset \mathbb{R}^2$  den Durchmesser  $\delta$ , so ist  $\mu(B) \leq \delta^2$ . Beweise dies und versuche, die Ungleichung noch zu verbessern:  $\mu(B) \leq c\delta^2$  für ein geeignetes  $c < 1$ .

7. Jemand zeichnet auf die 2-Sphäre vom Radius  $R$  mit Zentrum  $\mathbf{0}$  eine glatte Kurve  $\gamma$  der Länge  $L$ . Wird jeder Punkt von  $\gamma$  mit  $\mathbf{0}$  durch eine Strecke verbunden, so entsteht eine Fläche  $M$ .

- (a) Beschreibe  $M$  als Menge, d.h. in der Form  $M = \{\dots | \dots\}$ .  
 (b) Bestimme den Flächeninhalt von  $M$  oder begründe, warum die gemachten Angaben hierzu nicht ausreichen.

## 4.2 Hauptsätze

### Grundeigenschaften des Integrals, Mittelwertsatz

Das Riemannsche Integral 4.1.(7) besitzt offensichtlich die zu Beginn von Abschnitt 4.1 postulierten Eigenschaften (a)–(d). Wir dürfen daher ohne weiteren Beweis notieren:

$$(4.1)(a) \quad \int_B (f + g) d\mu = \int_B f d\mu + \int_B g d\mu ,$$
$$\int_B (\lambda f) d\mu = \lambda \int_B f d\mu \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \in \mathbb{C}) .$$

(b) Sind  $B_1$  und  $B_2$  fast disjunkt, so gilt

$$\int_{B_1 \cup B_2} f d\mu = \int_{B_1} f d\mu + \int_{B_2} f d\mu .$$

$$(c) \quad \int_B 1 d\mu = \mu(B) .$$

Weiter haben wir die folgenden Abschätzungen:

$$(4.2)(a) \quad \left| \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right| \leq \int_B |f(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) ;$$

(b) Gilt  $|f(\mathbf{x})| \leq M$  für alle  $\mathbf{x} \in B$ , so ist

$$\left| \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right| \leq M \mu(B) .$$

□ Die behaupteten Ungleichungen gelten für beliebige Riemannsche Summen:

$$\left| \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) \right| \leq \sum_{k=1}^N |f(\mathbf{x}_k)| \mu(B_k) \quad \left( \leq \sum_{k=1}^N M \mu(B_k) = M \mu(B) \right) ,$$

und folglich auch im Limes. □

Für reellwertige Funktionen gibt es den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**:

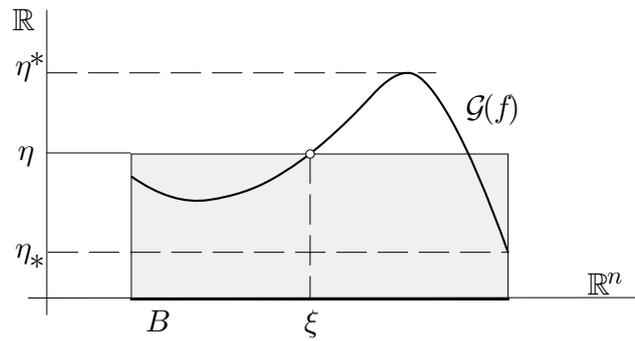


Fig. 4.2.1

(4.3) Nimmt die Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  jeden Wert zwischen  $\eta_* := \inf_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$  und  $\eta^* := \sup_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$  tatsächlich an, so gibt es einen Punkt  $\xi \in B$  mit

$$\int_B f \, d\mu = f(\xi) \mu(B) .$$

┌ Für alle  $\mathbf{x} \in B$  ist

$$\eta_* \leq f(\mathbf{x}) \leq \eta^*$$

(Fig. 4.2.1). Hieraus folgt

$$\int_B \eta_* \, d\mu(\mathbf{x}) \leq \int_B f(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) \leq \int_B \eta^* \, d\mu(\mathbf{x})$$

und somit

$$\eta_* \mu(B) \leq \int_B f \, d\mu \leq \eta^* \mu(B) .$$

Wegen  $\mu(B) > 0$  ist das äquivalent mit

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu =: \eta \in [\eta_*, \eta^*] .$$

Nach Voraussetzung über  $f$  gibt es jetzt einen Punkt  $\xi \in B$  mit  $f(\xi) = \eta$ ; dieses  $\xi$  genügt. ┘

## Das Integral als Funktion der oberen Grenze

Wir benötigen eine allgemeine Methode zur Berechnung von Integralen, wenn die zu integrierende Funktion  $f$  als Ausdruck und der Integrationsbereich  $B$

durch Ungleichungen gegeben sind. Im vorliegenden Abschnitt behandeln wir den eindimensionalen Fall. Hier führt die entscheidende Idee, das Integral

$$\int_{[a,x]} f(t) dt$$

als Funktion der oberen Grenze  $x$  zu betrachten, zum Hauptsatz der Infinitesimalrechnung und damit zum Kalkül mit Stammfunktionen. Später werden wir zeigen, daß sich bei Integralen über mehrdimensionale Bereiche die Dimension rekursiv erniedrigen läßt, so daß schließlich eine verschachtelte Folge von einfachen Integralen auszuwerten ist.

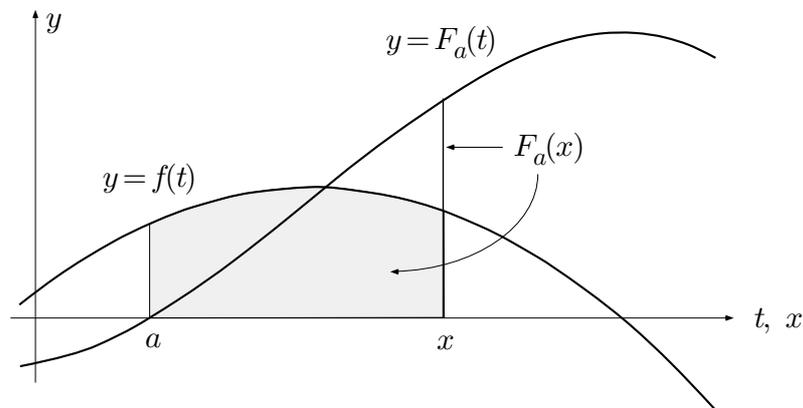


Fig. 4.2.2

Es seien also  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto y := f(t)$$

eine stetige Funktion und  $a \in I$  ein fest gewählter Punkt. Betrachte die auf ganz  $I$  definierte Funktion

$$F_a(x) := \begin{cases} \int_{[a,x]} f(t) dt & (x \geq a) \\ -\int_{[x,a]} f(t) dt & (x \leq a) \end{cases}$$

(Fig. 4.2.2). Man sagt, man habe  $f$  von  $a$  aus **aufintegriert**, und nennt  $F_a(\cdot)$  aus naheliegenden Gründen die zum Anfangspunkt  $a$  gehörige **Flächenfunktion** von  $f$ . Diese Funktion besitzt folgende charakteristische Eigenschaft (siehe die Fig. 4.2.3):

$$F_a(x_2) - F_a(x_1) = \int_{[x_1,x_2]} f(t) dt \quad (x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2). \quad (1)$$

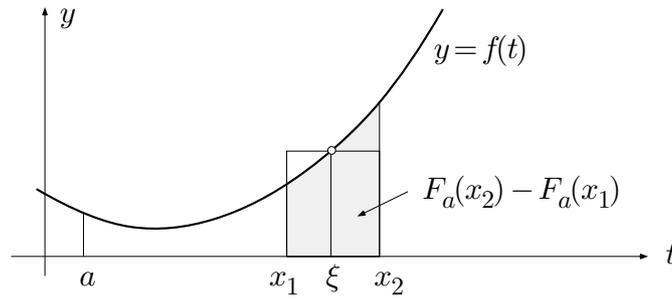


Fig. 4.2.3

□ Ist zum Beispiel  $a \leq x_1 < x_2$ , so folgt mit (4.1)(b):

$$\int_{[a, x_2]} f(t) dt = \int_{[a, x_1]} f(t) dt + \int_{[x_1, x_2]} f(t) dt,$$

und das heißt

$$F_a(x_2) = F_a(x_1) + \int_{[x_1, x_2]} f(t) dt.$$

Ähnlich schließt man in den Fällen  $x_1 < a \leq x_2$  und  $x_1 < x_2 \leq a$ . □

Wir wenden nun auf die rechte Seite von (1) den Mittelwertsatz (4.3) an: Es gibt einen Punkt  $\xi$  im Intervall  $[x_1, x_2]$  mit

$$F_a(x_2) - F_a(x_1) = f(\xi)(x_2 - x_1),$$

und das ist äquivalent mit

$$\frac{F_a(x_2) - F_a(x_1)}{x_2 - x_1} = f(\xi), \quad x_1 \leq \xi \leq x_2.$$

Lassen wir hier bei festem  $x_1 \in I$  den Punkt  $x_2$  von rechts gegen  $x_1$  streben, so strebt auch der Punkt  $\xi$  gegen  $x_1$ , und weil  $f$  dort stetig ist, folgt

$$F'_a(x_1+) = f(x_1).$$

Analog zeigt man  $F'_a(x_2-) = f(x_2)$ . Da  $x_1, x_2 \in I$  beliebig waren, haben wir damit allgemein bewiesen:

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

Dies ist der **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** (Version A):

(4.4) Die Ableitung der Flächenfunktion  $F_a(\cdot)$  ist die Ausgangsfunktion  $f(\cdot)$ ; in Formeln:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_{[a,x]} f(t) dt &= f(x) & (x \geq a), \\ \frac{d}{dx} \int_{[x,a]} f(t) dt &= -f(x) & (x \leq a).\end{aligned}$$

## Stammfunktionen

Ist eine stetige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $\rightarrow \mathbb{C}$ ) die Ableitung einer anderen Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $\rightarrow \mathbb{C}$ ), so heißt  $F$  eine **Stammfunktion** von  $f$  auf  $I$ . Die Menge aller Stammfunktionen von  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **unbestimmtes Integral** von  $f$  und wird mit

$$\int f(t) dt$$

bezeichnet. Diese Menge ist nicht leer: Man wähle einen Punkt  $a \in I$  und bilde die Flächenfunktion  $F_a(\cdot)$ . Wie wir gleich zeigen werden, stimmen die einzelnen Mitglieder der Funktionenschar  $\int f(t) dt$  bis auf eine additive Konstante überein. In diesem Zusammenhang hat sich folgende Schreibweise eingebürgert: Ist  $F_0$  eine beliebige Funktion bzw.  $F_0(t)$  ein Funktionsterm in der Variablen  $t$ , so bezeichnet

$$F_0 + \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad F_0(t) + \text{const.}$$

die Menge aller Funktionen bzw. Ausdrücke, die sich von  $F_0$  um eine konstante Funktion unterscheiden.

(4.5) Gilt  $F'_0 = f$ , so ist die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  gegeben durch  $F_0 + \text{const.}$ ; in Formeln:

$$F'_0 = f \quad \implies \quad \int f(t) dt = F_0 + \text{const.} .$$

□  $F_0$  ist nach Voraussetzung eine Stammfunktion von  $f$ . Dann sind auch alle Funktionen  $F_0 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , Stammfunktionen von  $f$ . Umgekehrt: Sei  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann ist

$$(F - F_0)' = f - f = 0,$$

und hieraus folgt mit Satz (3.8), daß  $F - F_0$  konstant ist. □

Satz (4.5) verwandelt jede Differentiationsregel in eine Integrationsregel, wie wir noch sehen werden.

$$\begin{aligned} \text{Bsp : } \quad \frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} &\quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + \text{const.}; \\ \sinh' = \cosh &\quad \Longrightarrow \quad \int \cosh t dt = \sinh t + \text{const.} . \end{aligned}$$

Wir kehren nunmehr zurück zum Problem der Berechnung von Riemannschen Integralen

$$\int_{[a,b]} f(t) dt$$

und bringen den **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** auf folgende anwendungsorientierte Form B:

(4.6) *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $\rightarrow \mathbb{C}$ ) eine stetige Funktion, und es sei  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $\rightarrow \mathbb{C}$ ) eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt*

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

┌ Da sich verschiedene Stammfunktionen von  $f$  nur um eine additive Konstante unterscheiden, hat hier die Differenz rechter Hand für alle Stammfunktionen denselben Wert, und wir dürfen annehmen,  $F$  sei die in Satz (4.5) als Stammfunktion erwiesene Flächenfunktion

$$F_a(x) := \int_{[a,x]} f(t) dt \quad (x \geq a) .$$

Für diese gilt aber wegen  $F_a(a) = 0$  tatsächlich

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a) . \quad \text{┐}$$

Satz (4.6) stellt ein Riemannsches Integral, das heißt: einen Grenzwert von Riemannschen Summen, als Differenz von Funktionswerten einer Stammfunktion dar und macht damit die Berechnung derartiger Integrale einem allgemeinen und letzten Endes algebraischen Kalkül zugänglich. Das Problem ist damit auf eine andere Ebene geschoben worden: Wir müssen nicht mehr mit irgendwelchen Tricks einen Grenzwert ausrechnen (siehe die Beispiele 4.1.② und 4.1.③); dafür entsteht neu die Aufgabe, zu einem gegebenen Funktionsterm  $f(t)$  eine Stammfunktion  $F(t)$  zu finden.

Da im Zusammenhang mit Integralen immer wieder Differenzen  $F(b) - F(a)$  berechnet werden müssen, hat sich dafür die bequeme Schreibweise

$$F(b) - F(a) =: F(t) \Big|_a^b \quad (\text{o. ä.})$$

eingebürgert. Will man ausdrücken, daß diese Differenz für eine (unter Umständen noch nicht bekannte) Stammfunktion von  $f$  berechnet werden soll, so schreibt man dafür

$$\int_a^b f(t) dt .$$

Dieser Ausdruck ist das **bestimmte Integral der Funktion  $f$  von  $a$  bis  $b$** .

Wir wiederholen: Unter dem *unbestimmten* Integral

$$\int f(t) dt$$

versteht man die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  auf einem vereinbarten Intervall  $I$ ; das *bestimmte* Integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

hingegen ist die für irgendeine Stammfunktion  $F$  von  $f$  berechnete Differenz  $F(b) - F(a)$ , und zwar ist das auch für  $b < a$  definiert.

Aufgrund dieser Vereinbarungen erhält Satz (4.6) die (nur scheinbar tautologische) Form

(4.6')

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad (a \leq b) .$$

Angesichts dieser Formel benutzen wir für Riemannsche Integrale über ein Intervall  $[a, b]$  die Schreibweise

$$\int_{[a,b]} f(t) dt$$

nicht mehr, sondern wir schreiben dafür ebenfalls

$$\int_a^b f(t) dt ,$$

wie das ja allgemein üblich ist.

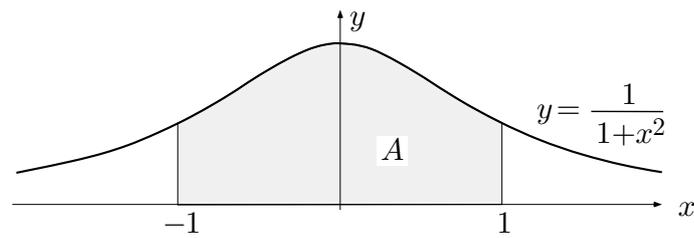


Fig. 4.2.4

① Wir berechnen erstens den Flächeninhalt  $A$  unter der Kurve

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(Fig. 4.2.4). — Es ergibt sich

$$A = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Zweitens soll die Länge der sogenannten **Kettenlinie**

$$\gamma: \quad y = \cosh x \quad (-a \leq x \leq a)$$

(Fig. 4.2.5) berechnet werden. — Nach 4.1.(16) ist

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + \cosh^2 x} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_{-a}^a \cosh x dx = \sinh x \Big|_{-a}^a = 2 \sinh a. \end{aligned}$$

○

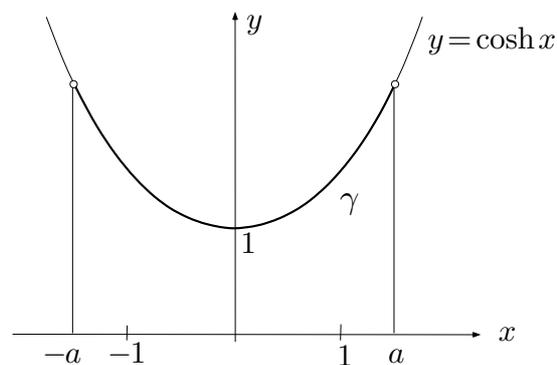


Fig. 4.2.5

## Aufgaben

1. Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige  $2\pi$ -periodische Funktion. Unter welcher Bedingung sind die Stammfunktionen von  $f$  ebenfalls  $2\pi$ -periodisch? Man zeige, daß die gefundene Bedingung notwendig und hinreichend ist.
2. (a)  $\textcircled{M}$  Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(t) := \frac{\sin t}{t} \quad (t \neq 0), \quad f(0) := 1 .$$

- (b) Überlege: Die zugehörige Flächenfunktion

$$F(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

nimmt auf  $\mathbb{R}$  ein globales Maximum  $M$  und ein globales Minimum  $-M$  an.

- (c) Finde einen Ausdruck für  $M$  und beweise  $M < 2$ . (*Hinweis:* Beweise und verwende die Ungleichung  $\sin t < t \cos(t/2)$  ( $0 < t < \pi$ ).

3. Es bezeichne  $L$  die Flächenfunktion

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x \geq 1) .$$

Zeige:  $L$  genügt der Funktionalgleichung

$$L(uv) \equiv L(u) + L(v) \quad (u \geq 1, v \geq 1) .$$

Dabei dürfen nur allgemeine Eigenschaften des Flächeninhalts (Zerlegungsadditivität, Verhalten gegenüber Streckung in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung usw.), nicht aber anderweitig bekannte Eigenschaften des Logarithmus verwendet werden. Figur!

### 4.3 Technik des Integrierens

Wir stehen vor der Aufgabe, eine als Ausdruck gegebene Funktion, zum Beispiel

$$f(t) := \sqrt{t^2 + 1},$$

**unbestimmt zu integrieren**, das heißt: einen Funktionsterm  $F(t)$  anzugeben, dessen Ableitung  $F'(t)$ , gerechnet nach den Regeln von Abschnitt 3.1, mit  $f(t)$  übereinstimmt. Diese Aufgabe ist nicht immer lösbar; es gibt nämlich elementare Funktionen,

$$\text{Bsp :} \quad \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t}, \quad e^{-t^2/2}, \quad \frac{\sin t}{t}, \quad \frac{t}{\log t},$$

deren Stammfunktionen nicht elementar sind. Die angeführten Beispiele sind real: Das Integral  $\int \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t} dt$  wird für die Bogenlänge der Ellipse benötigt; Integrale  $\int e^{-t^2/2} dt$  spielen eine prominente Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie, und  $\sin t/t$  ist eine Standardfunktion in der Theorie der Signalverarbeitung. Bezeichnet  $\pi(t)$  die Anzahl der Primzahlen  $\leq t$ , so gilt

$$\pi(t) = \frac{t}{\log t} (1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Wir stellen im folgenden einige Regeln zusammen, mit denen man in den meisten Fällen durchkommt. Es gibt aber auch umfangreiche Integraltafeln, zum Beispiel

*I. S. Gradshteyn + I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. 4<sup>th</sup> ed., 1965 (Academic Press).*

#### Grundformeln

Die nachstehenden Formeln lassen sich ohne weiteres mit Hilfe von Satz (4.5), das heißt: durch Ableiten der rechten Seite verifizieren:

- $$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \text{const.} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1).$$
- $$\int t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \text{const.} \quad (t > 0; \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1).$$
- $$\int e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + \text{const.} \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0).$$

- $\int \cosh t \, dt = \sinh t + \text{const.}, \quad \int \sinh t \, dt = \cosh t + \text{const.} .$
- $\int \cos t \, dt = \sin t + \text{const.}, \quad \int \sin t \, dt = -\cos t + \text{const.} .$
- $\int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \arctan t + \text{const.} .$
- $\int \frac{1}{1-t^2} \, dt = \text{artanh } t + \text{const.} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} + \text{const.} \quad (-1 < t < 1) .$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \arcsin t + \text{const.} .$
- $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \, dt = \text{arcosh } t + \text{const.} = \log(t + \sqrt{t^2-1}) + \text{const.} \quad (t > 1) .$
- $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt = \text{arsinh } t + \text{const.} = \log(t + \sqrt{t^2+1}) + \text{const.} .$

(4.7) Ist  $f(t) \neq 0$  auf dem Intervall  $I$ , so gilt dort

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = \log |f(t)| + \text{const.} .$$

┌ Nach Voraussetzung über  $f$  gibt es ein festes  $\sigma \in \{-1, 1\}$  mit  $|f(t)| \equiv \sigma f(t)$ . Die Ableitung der Funktion

$$F(t) := \log |f(t)| = \log(\sigma f(t))$$

ist somit nach der Kettenregel gegeben durch

$$\begin{aligned} F'(t) &= \log'(\sigma f(t)) \cdot \sigma f'(t) = \frac{1}{\sigma f(t)} \sigma f'(t) \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

① Es gilt

$$\int \frac{1}{t} \, dt = \begin{cases} \log t + \text{const.} & (\text{auf } \mathbb{R}_{>0}) , \\ \log(-t) + \text{const.} & (\text{auf } \mathbb{R}_{<0}) . \end{cases}$$

Die Sinusfunktion ist auf dem Intervall  $]0, \pi[$  positiv; folglich gilt dort

$$\int \cot t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = \log(\sin t) + \text{const.} .$$

Analog: Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  positiv; folglich gilt dort

$$\int \tan t \, dt = - \int \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt = -\log(\cos t) + \text{const.} .$$

○

Wir benötigen weiter gewisse Regeln, die gestatten, kompliziertere Ausdrücke auf einfachere zurückzuführen. Folgendes ist fast selbstverständlich:

$$\int (f(t) + g(t)) \, dt = \int f(t) \, dt + \int g(t) \, dt ,$$

$$\int (\lambda f(t)) \, dt = \lambda \int f(t) \, dt ;$$

dabei haben wir allerdings stillschweigend benutzt, daß man Funktionenscharen  $F_0 + \text{const.}$  wie einzelne Funktionen sinnvoll addieren und mit Skalaren multiplizieren kann. Im gleichen Zug notieren wir auch noch die Regeln

$$\int \text{Re } f(t) \, dt = \text{Re} \int f(t) \, dt , \quad \int \text{Im } f(t) \, dt = \text{Im} \int f(t) \, dt .$$

## Partielle Integration

Aus der Formel für die Ableitung eines Produkts ergibt sich der Satz über die **partielle Integration**:

$$(4.8)(a) \quad \int u(t)v'(t) \, dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) \, dt ,$$

$$(b) \quad \int_a^b u(t)v'(t) \, dt = u(t)v(t) \Big|_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) \, dt .$$

□ Aus  $(uv)' = u'v + uv'$  folgt mit Satz (4.5):

$$\int (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) \, dt = u(t)v(t) + \text{const.} .$$

Hier darf man die linke Seite aufspalten und den einen Summanden nach rechts bringen. ┘

Die folgenden Beispiele zeigen die praktische Anwendung der partiellen Integration. Das Ziel ist immer, rechter Hand ein Integral zu bekommen, das einfacher ist, als das Ausgangsintegral war. Dabei erweist es sich als zweckmäßig,

im Ausgangsintegral den Faktor, der im Verlauf der Rechnung *differenziert* wird, mit einem nach unten weisenden Pfeil ‘ $\downarrow$ ’ und den Faktor, der *integriert* wird, mit einem nach oben weisenden Pfeil ‘ $\uparrow$ ’ zu bezeichnen.

② Bei Integralen vom Typus

$$\int t^n e^{\lambda t} dt, \quad \int t^n \cos t dt, \quad \int t^n \sin t dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

läßt sich der auftretende Exponent durch partielle Integration um eins erniedrigen und somit rekursiv auf 0 bringen:

$$\begin{aligned} \int \underset{\downarrow}{t^n} \underset{\uparrow}{e^{\lambda t}} dt &= t^n \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} - \int n t^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} t^n e^{\lambda t} - \frac{n}{\lambda} \int t^{n-1} e^{\lambda t} dt . \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für die beiden anderen Typen. ○

③ Um das Integral  $\int \log t dt$  zu berechnen, führen wir formal einen Faktor 1 ein und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int \log t dt &= \int \underset{\uparrow}{1} \underset{\downarrow}{\log t} dt = t \log t - \int t \frac{1}{t} dt = t \log t - t + \text{const.} \\ &= t(\log t - 1) + \text{const.} . \end{aligned} \quad \text{○}$$

④ Um das unbestimmte Integral

$$J := \int e^{\alpha t} \cos(\beta t) dt$$

zu berechnen, werden wir zweimal hintereinander partiell integrieren; wir dürfen dabei  $\alpha \neq 0$  voraussetzen:

$$\begin{aligned} J &= \int \underset{\uparrow}{e^{\alpha t}} \underset{\downarrow}{\cos(\beta t)} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \int \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (-\beta) \sin(\beta t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t) - \int \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha t} \beta \cos(\beta t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha t} \left( \alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t) \right) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} J . \end{aligned}$$

Der Mißerfolg ist nur scheinbar: Wir können nach J auflösen und erhalten

$$\int e^{\alpha t} \cos(\beta t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t)) . \quad (1)$$

Das ganze nochmal von vorn, aber einfacher: Aus

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t} dt = \frac{1}{\alpha+i\beta} e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{(\alpha+i\beta)t}$$

folgt durch Trennung von Real- und Imaginärteil sofort (1) sowie zusätzlich

$$\int e^{\alpha t} \sin(\beta t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin(\beta t) - \beta \cos(\beta t)) .$$

○

⑤ Wir wollen die Zahlen

$$c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

berechnen. Zunächst ist

$$c_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1 .$$

Um eine Rekursionsformel für die  $c_n$  zu erhalten, schreiben wir

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \cos t dt \\ &\quad \downarrow \quad \uparrow \\ &= \cos^{n-1} t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1) \cos^{n-2} t (-\sin t) \sin t dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t (1 - \cos^2 t) dt \\ &= (n-1)(c_{n-2} - c_n) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $nc_n = (n-1)c_{n-2}$ , das heißt:

$$c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2} \quad (n \geq 2) . \quad (2)$$

Ist  $n$  gerade, das heißt  $n = 2m$ , so endet der iterative Abstieg bei 0, und wir erhalten

$$c_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot c_0$$

oder andersherum:

$$c_{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2m-1}{2m} \quad (m \geq 1) .$$

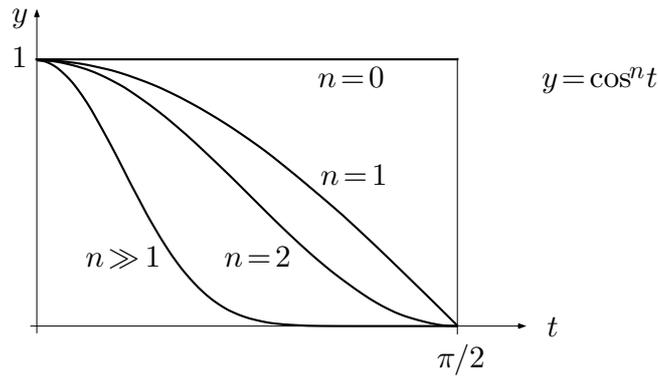


Fig. 4.3.1

Ist jedoch  $n$  ungerade, das heißt  $n = 2m + 1$ , so ergibt sich in analoger Weise

$$c_{2m+1} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m+1} \quad (m \geq 1).$$

Mit Hilfe der  $c_n$  können wir noch eine "klassische" Darstellung der Zahl  $\pi$  herleiten. Aus den Ungleichungen

$$\cos^{2m} t \geq \cos^{2m+1} t \geq \cos^{2m+2} t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

(Fig. 4.3.1) und (2) folgt

$$c_{2m} \geq c_{2m+1} \geq c_{2m+2} = \frac{2m+1}{2m+2} c_{2m}.$$

Wir dividieren mit  $c_{2m}$  und erhalten

$$1 \geq \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \geq \frac{2m+1}{2m+2} = 1 - \frac{1}{2m+2};$$

somit gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} = 1. \quad (3)$$

Nun ist aber

$$\frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1},$$

so daß (3) die folgende Produktdarstellung von  $\pi/2$  nach sich zieht:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots$$

Dies ist das sogenannte **Wallische Produkt**. Für die numerische Berechnung von  $\pi$  taugt es natürlich nicht. Man braucht es zum Beispiel, um die Konstante  $\sqrt{2\pi}$  in die Stirlingsche Formel für  $n!$  hineinzuzaubern.  $\bigcirc$

## Substitution

Die Kettenregel liefert fürs Integrieren zwei Varianten der sogenannten **Substitution**. Die erste Substitutionsregel ist anwendbar auf Integranden, die schon von vorneherein als Opfer der Kettenregel erkennbar sind.

Bsp: Die Funktion

$$g(t) := (\sin^3 t + e^{\sin t}) \cos t$$

ist offensichtlich die Ableitung der Funktion

$$G(t) := \frac{1}{4} \sin^4 t + e^{\sin t} .$$

$$(4.9)(a) \quad \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \left( \int f(x) dx \right)_{x:=\phi(t)} ,$$

$$(b) \quad \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx .$$

Hier liefert (a) die in der Variablen  $t$  ausgedrückten Stammfunktionen des Integranden, während (b) von bestimmten Integralen handelt. Bei bestimmten Integralen entfällt die Rücktransformation auf die Ausgangsvariable, dafür sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren. — Um Ausdrücke der Form  $f(\phi(t)) \phi'(t)$  zu integrieren, hat man nach Satz (4.9) folgendermaßen vorzugehen:

(a) *Unbestimmtes Integral*

1. Substituiere formal  $\phi(t) := x$ ,  $\phi'(t) dt := dx$ .
2. Integriere unbestimmt nach  $x$ .
3. Ersetze  $x$  wieder durch  $\phi(t)$ .

(b) *Bestimmtes Integral*

1. Substituiere formal  $\phi(t) := x$ ,  $\phi'(t) dt := dx$ .
2. Ersetze die  $t$ -Grenzen  $a$ ,  $b$  durch die  $x$ -Grenzen  $\phi(a)$ ,  $\phi(b)$ .
3. Integriere.

□ (Beweis von (4.9)) Es sei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ . Dann ist  $F(\phi(t))$  eine Stammfunktion von  $f(\phi(t)) \phi'(t)$ . Somit sind beide Seiten von (a) gleich

$$F(\phi(t)) + \text{const.}$$

und beide Seiten von (b) gleich

$$F(\phi(b)) - F(\phi(a)) .$$

□

⑥ Bei dem unbestimmten Integral

$$J := \int \frac{3t + 2}{(3t^2 + 4t + 2)^{5/2}} dt$$

erkennen wir  $\phi(t) := 3t^2 + 4t + 2$ ,  $\phi'(t) = 6t + 4$  und substituieren daher

$$3t^2 + 4t + 2 := x, \quad (6t + 4) dt := dx. \quad (4)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \left( \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^{5/2}} \right)_{x:=3t^2+4t+2} = \left( \frac{1}{2} \frac{-2/3}{x^{3/2}} \right)_{x:=3t^2+4t+2} + \text{const.} \\ &= -\frac{1}{3(3t^2 + 4t + 2)^{3/2}} + \text{const.} . \end{aligned}$$

Bei dem bestimmten Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{3t + 2}{(3t^2 + 4t + 2)^{5/2}} dt$$

liefert dieselbe Substitution (4) die zu den  $t$ -Grenzen  $-1$  und  $1$  gehörigen  $x$ -Grenzen  $1$  und  $9$ , so daß wir folgendes erhalten:

$$\int_{-1}^1 \frac{3t + 2}{(3t^2 + 4t + 2)^{5/2}} dt = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{dx}{x^{5/2}} = \frac{1}{2} \frac{-2/3}{x^{3/2}} \Big|_1^9 = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{27} - 1 \right) = \frac{26}{81} .$$

○

⑦ Das Integral

$$J := \int (\cos t + \cos^3 t) dt$$

hat auf den ersten Blick nicht die hier benötigte Form. Nun ist aber

$$J = \int (1 + \cos^2 t) \cos t dt = \int (2 - \sin^2 t) \cos t dt ,$$

und wir sehen, daß die Substitution

$$\sin t := x, \quad \cos t dt := dx \quad (5)$$

zum Ziel führt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \left( \int (2 - x^2) dx \right)_{x:=\sin t} = \left( 2x - \frac{x^3}{3} \right)_{x:=\sin t} + \text{const.} \\ &= 2 \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + \text{const.} . \end{aligned}$$

Der fortgeschrittene Rechner wird natürlich die Klammern  $(\dots)_{x:=\sin t}$  unterdrücken.

Wenden wir dieselbe Substitution (5) auf das bestimmte Integral

$$J_0 := \int_{\pi/6}^{\pi} (\cos t + \cos^3 t) dt$$

an, so ergeben sich die  $x$ -Grenzen  $\sin(\pi/6) = 1/2$  und  $\sin \pi = 0$ , und wir erhalten

$$J_0 = \int_{1/2}^0 (2 - x^2) dx = \left( 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1/2}^0 = - \left( 1 - \frac{1}{24} \right) = -\frac{23}{24} .$$

○

Die zweite Substitutionsregel ist wesentlich flexibler als die erste. Sie bezieht sich auf ganz beliebige Integrale

$$\int f(x) dx$$

und verwandelt sie mit Hilfe einer willkürlich gewählten Substitutionsfunktion  $x := \phi(t)$  in

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt .$$

Dieser Ausdruck sieht nur komplizierter aus als der vorangehende, wenn man ihn mit allgemeinen Funktionen  $f$  und  $\phi$  aufschreibt. In Wirklichkeit ist es gerade das Ziel der ganzen Operation, durch geschickte Wahl der Substitutionsfunktion  $\phi$  dafür zu sorgen, daß das neue Integral einfacher wird. Dabei gibt es noch eine Nebenbedingung: Die Substitutionsfunktion muß in dem erforderlichen  $t$ -Intervall invertierbar sein, so daß man die Substitutionsgleichung  $x := \phi(t)$  nach  $t$  auflösen, das heißt:  $t$  durch  $x$  ausdrücken kann. — Die Regel lautet:

**(4.10)** *Ist die Funktion  $\phi$  in dem erforderlichen  $t$ -Intervall invertierbar, so gilt*

$$(a) \quad \int f(x) dx = \left( \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \right)_{t := \phi^{-1}(x)} ,$$

$$(b) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt .$$

Hier bezieht sich wieder (a) auf unbestimmte und (b) auf bestimmte Integrale. Bei bestimmten Integralen entfällt wiederum die Rücktransformation auf die Ausgangsvariable, dafür sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren. Nach vollzogener Substitution kann man sowohl das Ausgangsintegral wie die Substitutionsfunktion vergessen und braucht nur noch das erhaltene Integral über das  $t$ -Intervall mit Endpunkten  $\phi^{-1}(a)$ ,  $\phi^{-1}(b)$  zu betrachten. — Um einen Ausdruck  $f(x)$  gemäß (4.10) zu integrieren, hat man folgendermaßen vorzugehen:

(a) *Unbestimmtes Integral*

1. Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion  $\phi$ .
2. Substituiere formal  $x := \phi(t)$ ,  $dx := \phi'(t)dt$ .
3. Integriere unbestimmt nach  $t$ .
4. Drücke  $t$  wieder durch  $x$  aus.

(b) *Bestimmtes Integral*

1. Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion  $\phi$ .
2. Substituiere formal  $x := \phi(t)$ ,  $dx := \phi'(t)dt$ .
3. Ersetze die  $x$ -Grenzen  $a$ ,  $b$  durch die  $t$ -Grenzen  $\phi^{-1}(a)$ ,  $\phi^{-1}(b)$ .
4. Integriere.

□ (Beweis von (4.10)) Es sei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ . Dann ist  $F(\phi(t))$  eine Stammfunktion von  $f(\phi(t))\phi'(t)$ . Die linke Seite von (a) ist folglich gleich  $F(x) + \text{const.}$ , die rechte gleich

$$(F(\phi(t)) + \text{const.})_{t:=\phi^{-1}(x)} = F(\phi(\phi^{-1}(x))) + \text{const.}$$

Somit stellen beide Seiten von (a) die gleichen Funktionen von  $x$  dar. Weiter hat die linke Seite von (b) den Wert  $F(b) - F(a)$ , die rechte Seite den Wert  $F(\phi(\phi^{-1}(b))) - F(\phi(\phi^{-1}(a)))$ , was natürlich dasselbe ist. □

⑧ Als erstes berechnen wir das unbestimmte Integral

$$J_x := \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Es liegt nahe, zunächst die Exponentialfunktion wegzuschaffen mit Hilfe des Ansatzes

$$e^x := t, \tag{6}$$

der aber, wohlgermerkt, die Rücksubstitution  $t = \phi^{-1}(x)$  ausdrückt. Wir benötigen aber auch explizit die eigentliche Substitutionsfunktion  $x = \phi(t)$ ; es ergibt sich

$$x = \log t, \quad dx = \frac{1}{t}dt,$$

und wir erhalten

$$J_x = \left( \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt \right)_{t:=e^x} .$$

Damit stehen wir vor der Aufgabe, das “metamorphe” Integral

$$J_t := \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt$$

weiter zu behandeln. Hierzu “substituieren wir die Wurzel”, das heißt: Wir setzen

$$\sqrt{1+t} := u, \quad (7)$$

wobei dies wiederum die Rücksubstitution  $u = \psi^{-1}(t)$  ausdrückt. Die (nicht zu umgehende!) Auflösung nach  $t$  liefert

$$t = u^2 - 1, \quad dt = 2u du,$$

und es ergibt sich

$$J_t = \left( \int \frac{1}{u} \frac{1}{u^2 - 1} 2u du \right)_{u:=\sqrt{1+t}} .$$

Wir verbleiben mit dem Integral

$$\begin{aligned} J_u &= \int \frac{2}{u^2 - 1} du = \int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \log |u-1| - \log |u+1| + \text{const.} = \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \text{const.} \end{aligned}$$

und haben nun die Rücksubstitutionen vorzunehmen. Es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} J_t &= (J_u)_{u:=\sqrt{1+t}} = \log \left| \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} \right| + \text{const.}, \\ J_x &= (J_t)_{t:=e^x} = \log \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + \text{const.} . \end{aligned}$$

Wäre von Anfang an nur nach dem Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

gefragt worden, so hätten dieselben Substitutionen zu dem folgenden Rechenablauf geführt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2}{u^2-1} du = \log \frac{u-1}{u+1} \Big|_{\sqrt{2}}^2 \\ &= \log \frac{2-1}{2+1} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \log \frac{1}{3} + \log \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \right) \\ &= \log \left( 1 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \right) = 0.6641 ; \end{aligned}$$

dabei haben wir die  $t$ -Grenzen mit (6) erhalten:

$$e^0 = 1, \quad e^{\log 3} = 3,$$

und die  $u$ -Grenzen mit (7):

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{1+3} = 2.$$

○

⑨ Es sei  $a < b$ . Zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} dx$$

verwenden wir die lineare Substitution

$$x := \frac{a+b}{2} + t \frac{b-a}{2}, \quad dx := \frac{b-a}{2} dt;$$

dem  $x$ -Intervall  $[a, b]$  entspricht dabei das  $t$ -Intervall  $[-1, 1]$  (Fig. 4.3.2).  
Damit wird

$$(b-x)(x-a) = \left(\frac{b-a}{2} - t \frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{b-a}{2} + t \frac{b-a}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (1-t^2).$$

Das vorgelegte Integral geht damit über in

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (1-t^2)}} \frac{b-a}{2} dt = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^1 = \pi$$

und hat überraschenderweise einen von  $a$  und  $b$  unabhängigen Wert. (Strenggenommen handelt es sich um ein "uneigentliches Integral" (s.u.), da der Integrand unbeschränkt ist.) ○

## Integration der rationalen Funktionen

Im Sinne einer Einführung behandeln wir Integrale der Form

$$J := \int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} dx, \quad B, C, b, c \in \mathbb{R}.$$

Zunächst prüfen wir, ob der Nenner

$$Q(x) := x^2 + bx + c$$

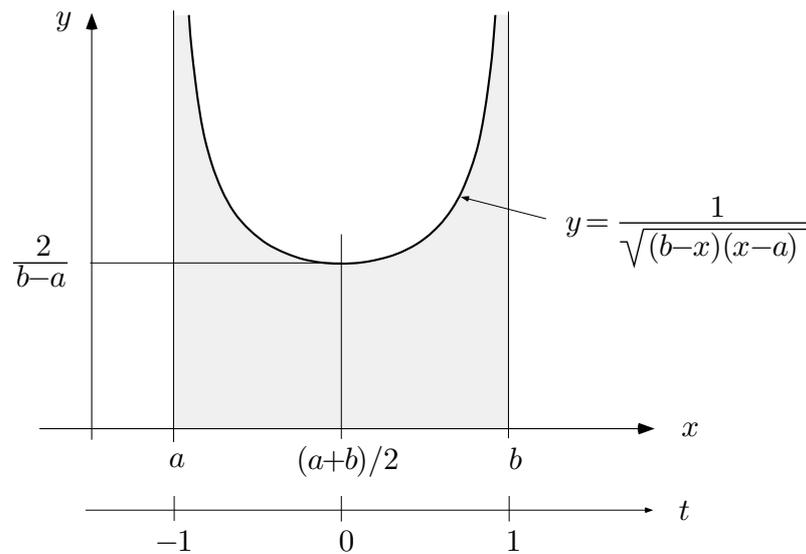


Fig. 4.3.2

reelle Nullstellen  $\alpha_{1,2} := (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$  besitzt. Wenn ja, so gilt

$$Q(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) .$$

Sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  verschieden, so können wir den folgenden Ansatz zur **Partialbruchzerlegung** des Integranden machen:

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} \equiv \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} . \quad (8)$$

Hier sind  $B$  und  $C$  gegeben,  $A_1$  und  $A_2$  noch zu bestimmen. Wir bringen die rechte Seite von (8) ebenfalls auf den Generalnenner  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$  und erhalten den Zähler

$$A_1(x - \alpha_2) + A_2(x - \alpha_1) = (A_1 + A_2)x - A_1\alpha_2 - A_2\alpha_1 .$$

Die Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  sind nun so festzulegen, daß dieser Zähler identisch in  $x$  mit dem Zähler links in (8) übereinstimmt. Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_2 = B \\ -\alpha_2 A_1 - \alpha_1 A_2 = C \end{array} \right\} ,$$

aus dem  $A_1$  und  $A_2$  berechnet werden können. (Hier wird benutzt, daß  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  ist.) Ist das geschehen, so hat man

$$J = \int \left( \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} \right) dx = A_1 \log |x - \alpha_1| + A_2 \log |x - \alpha_2| + \text{const.} .$$

Besitzt  $Q(x)$  eine zweifache reelle Nullstelle  $\alpha$ , so lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung folgendermaßen:

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2} \equiv \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_1}{x - \alpha},$$

und er führt auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \quad \quad \quad = B \\ -\alpha A_1 + A_2 = C \end{array} \right\},$$

das offensichtlich lösbar ist. Man erhält in diesem Fall

$$J = -\frac{A_2}{x - \alpha} + A_1 \log |x - \alpha| + \text{const.} .$$

Besitzt jedoch das Nennerpolynom  $Q(x)$  zwei konjugiert komplexe Nullstellen

$$\zeta := \beta + i\gamma, \quad \bar{\zeta} := \beta - i\gamma, \quad \gamma \neq 0,$$

so sieht die Sache wesentlich anders aus. Es gilt dann

$$Q(x) = (x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = (x - \beta - i\gamma)(x - \beta + i\gamma) = (x - \beta)^2 + \gamma^2. \quad (9)$$

Der Integrand läßt sich daher folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \frac{Bx + C}{Q(x)} &= \frac{B}{2} \frac{2(x - \beta)}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} + \frac{B\beta + C}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} \\ &= \frac{B}{2} \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B\beta + C}{(x - \beta)^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Den ersten Summanden rechts integrieren wir nun nach (4.4) und erhalten einen Logarithmus:

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = \log Q(x) + \text{const.}$$

( $Q(x)$  ist nach Voraussetzung positiv definit). Der zweite Summand in (10) liefert hingegen einen Arcustangens: Mit Hilfe der Substitution

$$\frac{x - \beta}{\gamma} := t, \quad x = \gamma t + \beta, \quad dx = \gamma dt$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} dx &= \frac{1}{\gamma^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x - \beta}{\gamma}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\gamma^2} \left( \int \frac{\gamma dt}{1 + t^2} \right)_{t=(x-\beta)/\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x - \beta}{\gamma} + \text{const.} . \end{aligned} \quad (11)$$

⑩ Es soll das Integral

$$J := \int_{-1}^{11} \frac{x+5}{x^2-6x+25} dx$$

berechnet werden. Der Nenner

$$Q(x) := x^2 - 6x + 25 = (x-3)^2 + 16$$

besitzt keine reellen Nullstellen. Wir zerlegen daher das Integral nach (10) folgendermaßen:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{11} \frac{2x-6}{x^2-6x+25} dx + \int_{-1}^{11} \frac{8}{(x-3)^2+16} dx .$$

Gehen wir weiter vor, wie abgemacht, so ergibt sich

$$J = \frac{1}{2} \log(x^2 - 6x + 25) \Big|_{-1}^{11} + \int_{-1}^{11} \frac{1/2}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} dx .$$

Hier hat der ausintegrierte Teil den Wert  $\frac{1}{2} \log \frac{80}{32}$ . Im letzten Integral substituieren wir  $(x-3)/4 := t$ , was auf

$$x = 4t + 3, \quad dx = 4 dt$$

führt und die  $t$ -Grenzen  $-1$  und  $2$  liefert. Dieses Integral hat folglich den Wert

$$\int_{-1}^2 \frac{2dt}{t^2+1} = 2 \arctan t \Big|_{-1}^2 = 2(\arctan 2 + \arctan 1),$$

und es ergibt sich definitiv

$$J = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + 2(\arctan 2 + \arctan 1) = 4.2432 .$$

○

Grundsätzlich läßt sich *jede* rationale Funktion

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)} := \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$$

mit reellen Koeffizienten  $a_i, b_i$  elementar integrieren, und zwar geschieht das mit Hilfe einer additiven Zerlegung von  $R(x)$  in einfachere rationale Funktionen, die sich leicht einzeln integrieren lassen. Die Existenz dieser sogenannten **Partialbruchzerlegung** ist eine rein algebraische Tatsache, die wir hier nicht

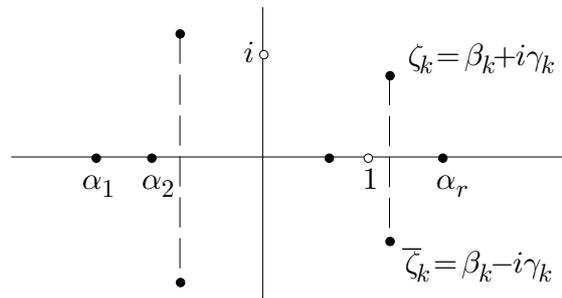


Fig. 4.3.3

beweisen. Wir erläutern hingegen das Vorgehen zur praktischen Herstellung dieser Zerlegung im konkreten Fall.

*Schritt 1:* Ist  $m \geq n$ , so führe man die Polynomdivision

$$p(x) : q(x) = \dots$$

aus, bis ein Rest  $r(x)$  vom Grad  $< n$  bleibt. Ist  $p_*(x)$  das bei der Division rechter Hand aufgebaute Polynom, so gilt

$$R(x) = p_*(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Was folgt, bezieht sich auf den “echt gebrochenen” Teil  $r(x)/q(x)$ .

*Schritt 2:* Das Nennerpolynom  $q(x)$  besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra  $r$  verschiedene reelle Nullstellen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  mit zugehörigen Vielfachheiten  $l_1, \dots, l_r$ , ferner  $s$  verschiedene Paare

$$\zeta_k = \beta_k + i\gamma_k, \quad \bar{\zeta}_k = \beta_k - i\gamma_k \quad (1 \leq k \leq s)$$

von nichtreellen Nullstellen mit zugehörigen Vielfachheiten  $m_k$  (Fig. 4.3.3); dabei ist natürlich

$$l_1 + \dots + l_r + 2m_1 + \dots + 2m_s = n.$$

(Damit ist der schlimmstmögliche Fall einkalkuliert. Im täglichen Leben sind die meisten Vielfachheiten = 1.) Infolgedessen läßt sich  $q(x)$  wie folgt als Produkt von Linearfaktoren und reell-irreduziblen quadratischen Faktoren darstellen:

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{l_1} \dots (x - \alpha_r)^{l_r} (Q_1(x))^{m_1} \dots (Q_s(x))^{m_s}.$$

Je zwei Linearfaktoren  $(x - \zeta_k), (x - \bar{\zeta}_k)$  lassen sich nämlich gemäß (9) zu einem reellen quadratischen Faktor

$$Q_k(x) := (x - \zeta_k)(x - \bar{\zeta}_k) = (x - \beta_k)^2 + \gamma_k^2 = x^2 + b_k x + c_k$$

zusammenfassen.

**Schritt 3:** Jeder Faktor der Form  $(x - \alpha)^l$  gibt Anlaß zu einem zugehörigen **Hauptteil**

$$\frac{A_l}{(x - \alpha)^l} + \frac{A_{l-1}}{(x - \alpha)^{l-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - \alpha}$$

in der Partialbruchzerlegung von  $R(x)$ , und jeder einfache quadratische Faktor

$$Q(x) = (x - \beta)^2 + \gamma^2 = x^2 + bx + c$$

gibt Anlaß zu einem zugehörigen Hauptteil

$$\frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}.$$

(Der Fall mehrfacher komplexer Nullstellen wird hier nicht weiterverfolgt.)

**Schritt 4:** Man schreibe alle aufgrund der Produktdarstellung des Nennerpolynoms  $q(x)$  erforderlichen Hauptteile bzw. Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  an und bringe die Summe aller dieser Partialbrüche auf den Generalnenner  $q(x)$ . Man erhält einen "großen" Bruch  $\tilde{r}(x)/q(x)$ , und zwar erscheinen die eingeführten Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in den Koeffizienten des Zählerpolynoms  $\tilde{r}(x)$ .

Nun sollte ja

$$\frac{\tilde{r}(x)}{q(x)} \equiv \frac{r(x)}{q(x)}$$

sein, und dies ist nur möglich, wenn die Zählerpolynome identisch in  $x$  übereinstimmen. Der hierfür angestrebte Koeffizientenvergleich liefert die zur Festlegung der Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  notwendigen Gleichungen. Wenn man alles richtig gemacht hat, besitzt dieses Gleichungssystem genau eine Lösung, denn die Partialbruchzerlegung ist eindeutig bestimmt.

Ⓜ Es soll das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} dx$$

berechnet werden. Der Integrand ist bereits echt gebrochen, und

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

ist die reelle Zerlegung des Nenners. Wir haben daher anzusetzen:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Bringen wir hier die rechte Seite auf den Generalnenner  $x^3 - 1$ , so erhalten wir für die Zählerpolynome folgende Relation:

$$x^2 + 1 \stackrel{!}{=} A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1),$$

und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich für die Konstanten  $A, B, C$  das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{r} 1 = A + B \\ 0 = A - B + C \\ 1 = A - C \end{array} \right\}$$

mit der Lösung  $A = 2/3, B = 1/3, C = -1/3$ . Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \right).$$

Für die Integration ist der zweite Partialbruch nach (10) weiter aufzuteilen; es ergibt sich

$$J = \frac{1}{3} \int \left( \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx. \quad (12)$$

Wir berechnen vorweg mit Hilfe von (11) das Integral

$$J_3 := \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

und erhalten

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \text{const.}$$

Aus (12) ergibt sich daher im ganzen

$$J = \frac{1}{3} \log((x - 1)^2 \sqrt{x^2 + x + 1}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \text{const.},$$

wobei die große Klammer mit Hilfe der Funktionalgleichung des Logarithmus zustandegekommen ist.  $\bigcirc$

⑫ Wir betrachten weiter das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{4x^5}{x^4 - 2x^2 + 1} dx .$$

Da der Integrand nicht echt gebrochen ist, führen wir erst die Polynomdivision

$$\frac{(4x^5)}{8x^3 - 4x} : (x^4 - 2x^2 + 1) = 4x$$

aus und erhalten

$$R(x) = 4x + \frac{8x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 1} .$$

Weiter gilt

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2 ; \quad (13)$$

somit lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Teils von  $R(x)$ :

$$\frac{8x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{x + 1} .$$

Wir bringen wiederum die rechte Seite auf den Generalnenner (13) und setzen das resultierende Zählerpolynom gleich dem Zählerpolynom links:

$$8x^3 - 4x \stackrel{!}{=} A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1)^2 + C(x - 1)^2 + D(x + 1)(x - 1)^2 .$$

Nach Aufbereitung der rechten Seite liefert der Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{rclclcl} 8 & = & & B & & + D \\ 0 & = & A & + B & + C & - D \\ -4 & = & 2A & - B & - 2C & - D \\ 0 & = & A & - B & + C & + D \end{array} \right\}$$

mit der Lösung  $A = 1$ ,  $B = 4$ ,  $C = -1$ ,  $D = 4$ . Damit wird

$$R(x) = 4x + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{4}{x - 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{4}{x + 1} ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} J &= \int R(x) dx = 2x^2 - \frac{1}{x - 1} + 4 \log |x - 1| + \frac{1}{x + 1} + 4 \log |x + 1| + \text{const.} \\ &= 2x^2 - \frac{2}{x^2 - 1} + 4 \log |x^2 - 1| + \text{const.} . \end{aligned}$$

○

Ist  $\alpha$  eine *einfache* reelle Nullstelle des Nennerpolynoms  $q(\cdot)$ :

$$R(x) = \frac{r(x)}{(x - \alpha)\hat{q}(x)}, \quad \hat{q}(\alpha) \neq 0,$$

so läßt sich der Koeffizient  $A$  des zugehörigen Hauptteils

$$\frac{A}{x - \alpha}$$

ohne Auflösung eines Gleichungssystems bestimmen. Zum Beweis fassen wir alle andern Partialbrüche von  $R(x)$  wieder zusammen und erhalten die Identität

$$\frac{r(x)}{(x - \alpha)\hat{q}(x)} \equiv \frac{A}{x - \alpha} + \frac{\hat{r}(x)}{\hat{q}(x)}.$$

Dies ist äquivalent mit

$$r(x) \equiv A\hat{q}(x) + \hat{r}(x)(x - \alpha).$$

Setzt man hier  $x := \alpha$ , so folgt

$$r(\alpha) = A\hat{q}(\alpha)$$

und somit

$$A = \frac{r(\alpha)}{\hat{q}(\alpha)}.$$

In Worten: Um den Koeffizienten über  $x - \alpha$  zu erhalten, blende man den Faktor  $x - \alpha$  aus dem Nenner von  $R(x)$  aus und evaluiere das Übrige an der Stelle  $x := \alpha$ .

⑬ Für die Funktion

$$R(x) := \frac{x^2 - 2}{(x + 1)x(x - 1)} = \frac{A_{-1}}{x + 1} + \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x - 1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \left. \frac{x^2 - 2}{x(x - 1)} \right|_{x:=-1} = -\frac{1}{2}, \\ A_0 &= \left. \frac{x^2 - 2}{(x + 1)(x - 1)} \right|_{x:=0} = 2, \\ A_1 &= \left. \frac{x^2 - 2}{(x + 1)x} \right|_{x:=1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int R(x) dx &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{4}{x} - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (4 \log |x| - \log |x + 1| - \log |x - 1|) + \text{const.} \\ &= \log(x^2 / \sqrt{|x^2 - 1|}) + \text{const.} . \end{aligned}$$

○

### Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen

Wir behandeln zum Schluß einige Typen von unbestimmten Integralen, die sich durch geeignete Substitutionen in Integrale von rationalen Funktionen verwandeln und damit elementar auswerten lassen. Die zugelassenen Integranden sind Ausdrücke der folgenden Art, wobei jeweils  $R(u)$  eine rationale Funktion von einer und  $R(u, v)$  eine rationale Funktion von zwei Variablen bezeichnet:

- (a)  $R(e^t)$  und  $R(\cosh t, \sinh t)$ ,
- (b)  $R(\cos t, \sin t)$ ,
- (c)  $R(x, \sqrt{Q(x)})$ ,  $Q(x) := ax^2 + bx + c$ ,
- (d)  $R(\sqrt{ax + b})$ .

Zu (a): Integrale

$$\int R(e^t) dt$$

werden mit der naheliegenden Substitution

$$e^t := u \quad \left( \Rightarrow \quad t = \log u, \quad dt = \frac{1}{u} du \right) \quad (14)$$

in Integrale von rationalen Funktionen übergeführt:

$$\int R(e^t) dt = \left( \int R(u) \frac{1}{u} du \right)_{u:=e^t} .$$

Ein Integral  $\int R(\cosh t, \sinh t) dt$  läßt sich nach Definition von  $\cosh$  und  $\sinh$  in ein Integral  $\int R_1(e^t) dt$  verwandeln.

⑭ Bei dem “uneigentlichen Integral” (s.u.)

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^{2t} + 1} e^t dt$$

(Fig. 4.3.4) verwenden wir die erste Substitutionsregel (4.9):

$$e^t := u, \quad e^t dt := du .$$

Die  $u$ -Grenzen sind 0 und  $\infty$ , und es ergibt sich

$$J = \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2 + 1} du = 2 \arctan u \Big|_0^{\infty} = 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi .$$

○

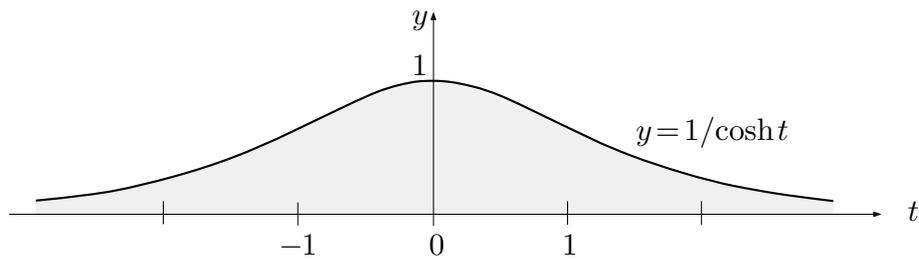


Fig. 4.3.4

Zu (b): Bei Integralen vom Typ

$$\int R(\cos t, \sin t) dt$$

würde an sich die Substitution  $e^{it} := z$  (vgl. (14)) naheliegen. Um Schwierigkeiten mit dem “Logarithmus im Komplexen” zu vermeiden, verwendet man stattdessen die reelle Substitution

$$\tan \frac{t}{2} := \tau \quad (\Rightarrow \quad t = 2 \arctan \tau) .$$

Wegen

$$\cos t = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \sin t = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}, \quad dt = \frac{2}{1 + \tau^2} d\tau$$

wird dadurch das gegebene Integral in ein “rationales Integral”  $\int R_1(\tau) d\tau$  verwandelt. Es ist aber ratsam, erst nach irgendwelchen Hintertürchen auszuspähen und diesen letzten Ausweg wenn immer möglich zu vermeiden, da sich die auftretenden Grade dabei gerne verdoppeln.

⑮ Es soll das unbestimmte Integral

$$J := \int \frac{dt}{\cos t}$$

berechnet werden. Die angegebene Methode liefert

$$J = \left( \int \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2} \frac{2}{1 + \tau^2} d\tau \right)_{\tau := \tan(t/2)} = \left( \log \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right)_{\tau := \tan(t/2)} + \text{const.},$$

wobei wir zuletzt eine “Grundformel” benutzt haben. Mit Hilfe des Additionstheorems des Tangens erhalten wir hieraus

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \log \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{const.} .$$

○

Sehr oft geht es um bestimmte Integrale über eine Vollperiode  $[0, 2\pi]$ :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt .$$

Hierfür stellt die komplexe Analysis eine besonders elegante Methode zur Verfügung (Stichwort: *Residuensatz*), und zwar bildet gerade die oben verworfene Substitution  $e^{it} := z$  dazu den Schlüssel.

Zu (c): Um ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

zu berechnen, müssen wir erst den auftretenden Radikanden

$$Q(x) := ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

auf eine Normalform bringen — gemeint ist vor allem: auf eine Form *ohne linearen Term*. Dies leistet die sogenannte **quadratische Ergänzung**:

$$Q(x) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right).$$

Die lineare Substitution  $x + \frac{b}{2a} := y$  macht aus  $Q(x)$  die neue quadratische Funktion

$$Q_*(y) = |a| (\pm y^2 \pm \rho^2), \quad (15)$$

wobei wir noch zur Abkürzung

$$\left| \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right| =: \rho^2$$

gesetzt haben und im weiteren  $\rho > 0$  annehmen wollen. Welche Vorzeichen jeweils in (15) erscheinen, hängt von den Vorzeichen von  $a$  und von  $4ac - b^2$  ab. Wenn nötig, läßt sich  $Q_*(y)$  mit der weiteren Substitution  $y := \rho u$  auf die folgende allereinfachste Form bringen:

$$Q_{**}(u) = A (\pm u^2 \pm 1), \quad A > 0 .$$

Aufgrund dieser Vorbemerkungen, müssen wir uns nur mit den folgenden drei Arten von Integralen befassen:

(ca)  $\int R(y, \sqrt{y^2 + \rho^2}) dy,$

(cb)  $\int R(y, \sqrt{y^2 - \rho^2}) dy,$

(cc)  $\int R(y, \sqrt{\rho^2 - y^2}) dy;$

dabei ist  $\rho > 0$ . Das nächste Ziel ist, die Variable  $y$  so zu substituieren, daß sowohl  $y$  (und  $dy$ ) wie der Wurzelausdruck nützliche Funktionen der neuen Variablen  $t$  werden. Dies leistet im Fall (ca) die Substitution

$$y := \rho \sinh t ;$$

man hat dann nämlich

$$dy = \rho \cosh t dt$$

und vor allem

$$\sqrt{y^2 + \rho^2} = \sqrt{\rho^2(\sinh^2 t + 1)} = \rho \cosh t .$$

Im Fall (cb) führt die Substitution

$$y := \rho \cosh t$$

in analoger Weise auf

$$dy = \rho \sinh t dt , \quad \sqrt{y^2 - \rho^2} = \rho \sinh t .$$

In beiden Fällen erhält man als neuen Integranden einen rationalen Ausdruck in  $\cosh t$  und  $\sinh t$ , der vielleicht ohne weiteres unbestimmt integriert, schlimmstenfalls aber immer noch in einen rationalen Ausdruck in  $e^t$  umgeformt und nach (a) weiterbehandelt werden kann.

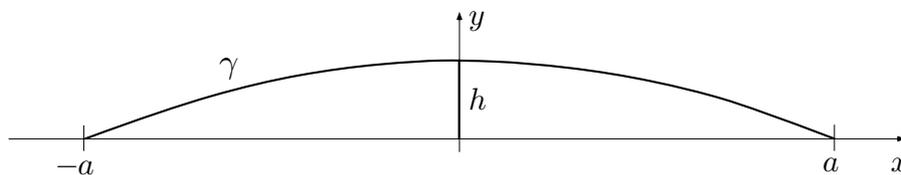


Fig. 4.3.5

⑩ Es soll die Länge eines Parabelbogens  $\gamma$  der Spannweite  $2a$  und der lichten Höhe  $h$  (Fig. 4.3.5) berechnet werden. — Die Gleichung der Parabel lautet offenbar

$$y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (=: f(x)) ,$$

und wir erhalten nach 4.1.(16):

$$L(\gamma) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^4} x^2} dx .$$

Die Substitution

$$\frac{2h}{a^2} x := \sinh t, \quad dx := \frac{a^2}{2h} \cosh t dt$$

führt auf

$$L(\gamma) = \frac{a^2}{2h} \int_{-\tau}^{\tau} \cosh t \cosh t dt ;$$

dabei ist  $\tau := \operatorname{arsinh}(2h/a)$ . Wie man leicht verifiziert, gilt

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\cosh t \sinh t + t) + \text{const.} ; \quad (16)$$

folglich ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \frac{a^2}{4h} (\cosh t \sinh t + t) \Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{a^2}{2h} (\cosh \tau \sinh \tau + \tau) \\ &= \frac{a^2}{2h} \left( \sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^2}} \frac{2h}{a} + \operatorname{arsinh} \frac{2h}{a} \right) = \sqrt{a^2 + 4h^2} + \frac{a^2}{2h} \operatorname{arsinh} \frac{2h}{a} . \end{aligned} \quad \circ$$

Im Fall (cc) lautet die treffende Substitution natürlich

$$y := \rho \sin t ;$$

sie liefert

$$dy = \rho \cos t dt, \quad \sqrt{\rho^2 - y^2} = \rho \cos t .$$

Der neue Integrand ist folglich ein rationaler Ausdruck in  $\cos t$  und  $\sin t$ , der vielleicht ohne weiteres integriert und jedenfalls nach (b) weiterbehandelt werden kann.

⑰ Es sei

$$B := \{ (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

die vierdimensionale Vollkugel vom Radius  $a$  im  $(w, x, y, z)$ -Raum. Wir wollen das (vierdimensionale) Volumen  $\mu(B)$  berechnen. Hierzu fassen wir  $B$  als Rotationskörper bezüglich der  $z$ -Achse auf und zerlegen das Intervall  $[-a, a]$  der  $z$ -Achse in kleine Teilintervalle

$$I_k := [z_{k-1}, z_k] \quad (1 \leq k \leq N) .$$

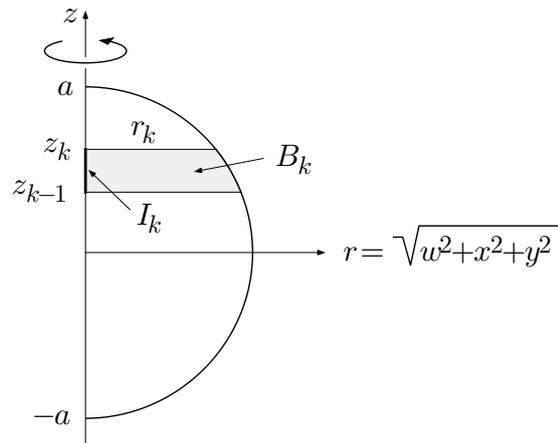


Fig. 4.3.6

Die zwei Ebenen  $z = z_{k-1}$  und  $z = z_k$  schneiden aus  $B$  eine kugelrunde flache Scheibe  $B_k$  vom Radius  $r_k = \sqrt{a^2 - z_k^2}$  und der Höhe  $z_k - z_{k-1}$  heraus (Fig. 4.3.6). Das vierdimensionale Volumen von  $B_k$  ist daher approximativ gegeben durch

$$\mu(B_k) \doteq \frac{4\pi}{3} r_k^3 (z_k - z_{k-1}) = \frac{4\pi}{3} (a^2 - z_k^2)^{3/2} \mu(I_k),$$

und wir erhalten durch Summation über  $k$ :

$$\mu(B) \doteq \frac{4\pi}{3} \sum_{k=1}^N (a^2 - z_k^2)^{3/2} \mu(I_k).$$

Hier steht rechter Hand eine zu dem  $z$ -Intervall  $[-a, a]$  gehörige Riemannsche Summe. Der Grenzübergang  $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$  liefert somit die Formel

$$\mu(B) = \frac{4\pi}{3} \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^{3/2} dz.$$

Substituieren wir, wie abgemacht,

$$z := a \sin t, \quad dz = a \cos t dt,$$

so sind die neuen Grenzen gerade  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$ , und wir erhalten

$$\mu(B) = \frac{4\pi}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a \cos t)^3 a \cos t dt = \frac{8\pi}{3} a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt.$$

Das letzte Integral ist die Zahl  $c_4$  aus Beispiel (5); wir haben sie dort berechnet zu  $c_4 = 3\pi/16$ . Damit ergibt sich schließlich

$$\mu(B) = \frac{\pi^2}{2} a^4.$$

○

Zu (d): Bei Integralen der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx$$

“substituiere man die Wurzel”, das heißt: Man setze

$$\sqrt{ax+b} := u,$$

wobei diese Relation letzten Endes die Rücksubstitution  $u = \phi^{-1}(x)$  ausdrückt. Damit wird

$$x = \frac{1}{a}(u^2 - b), \quad dx = \frac{2}{a} u du,$$

und man erhält einen rationalen Integranden in der Variablen  $u$ .

⑱ Um das Integral

$$J := \int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{5-x}}$$

zu berechnen, setzen wir

$$\sqrt{5-x} := u.$$

Dies führt auf

$$x = 5 - u^2, \quad dx = -2u du$$

sowie auf die  $u$ -Grenzen  $\sqrt{5-1} = 2$ ,  $\sqrt{5-4} = 1$ , und es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} J &= \int_2^1 \frac{-2u du}{(5-u^2)u} = \int_1^2 \frac{2}{5-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_1^2 \left( \frac{1}{\sqrt{5}+u} + \frac{1}{\sqrt{5}-u} \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\log(\sqrt{5}+u) - \log(\sqrt{5}-u)) \Big|_1^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{(3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0.8608. \end{aligned}$$

○

### \* Anwendung: Das arithmetisch-geometrische Mittel

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Anwendung des bisher Gelernten, die über den Rahmen eines instruktiven Beispiels hinausgeht. Es handelt sich vielmehr um ein klassisches Stück Mathematik, genaugenommen: um eine bahnbrechende Leistung des zweiundzwanzigjährigen Gauß.

Es seien zwei Zahlen  $a$  und  $b$ ,  $a \geq b > 0$ , gegeben. Beginnend mit

$$a_0 := a, \quad b_0 := b$$

bildet man sukzessiv arithmetische Mittel  $a_n$  und geometrische Mittel  $b_n$  nach der folgenden Rekursionsvorschrift:

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}. \quad (17)$$

Bsp:

$a_n$	$b_n$
2	1
1.5	1.414
1.4571	1.4564
1.456791048	1.456791014

Experimente mit verschiedenen Anfangswerten  $a$  und  $b$  zeigen, daß die beiden Folgen  $a_n$  und  $b_n$  jeweils äußerst schnell gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. In der Tat gilt allgemein

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2},$$

das heißt: Es liegt quadratische Konvergenz vor.

Bei vielen Iterationsprozessen hängt der Grenzwert nicht von den Anfangswerten ab, hier aber schon. Wir stehen damit vor der Aufgabe, den Grenzwert  $M(a, b)$ , genannt das **arithmetisch-geometrische Mittel** (abgekürzt: **AGM**) von  $a$  und  $b$ , als Funktion der Variablen  $a$  und  $b$  darzustellen.

Wie Gauß 1799 als erster gezeigt hat, läßt sich das AGM von zwei Zahlen  $a$  und  $b$  durch ein Integral ausdrücken. Es gilt nämlich

$$M(a, b) = \frac{1}{T(a, b)}, \quad (18)$$

und zwar ist  $T(a, b)$  das folgende (elliptische, also nicht elementare) Integral:

$$T(a, b) := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Die beiden Darstellungen von  $T(a, b)$  gehen durch die Substitution  $t = b \tan \theta$  auseinander hervor; wir überlassen die Details dem Leser. — Den Schlüssel zu der behaupteten Formel (18) bildet die folgende Invarianzeigenschaft des Integrals  $T(a, b)$ :

$$T(a, b) = T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \quad (a \geq b > 0). \quad (19)$$

Wir nehmen für den Moment an, (19) sei bewiesen. Aufgrund der Rekursionsvorschrift (17) gilt dann

$$T(a, b) = T(a_n, b_n) \quad \forall n,$$

so daß wir die folgende Kette von Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 \cos^2 \theta + M^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{M} = \frac{1}{M}; \end{aligned}$$

dabei haben wir zur Abkürzung  $M(a, b) =: M$  gesetzt. Aus (19) folgt also (18), so daß wir nur noch (19) beweisen müssen.

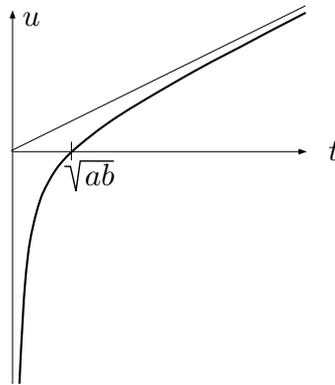


Fig. 4.3.7

□ Die Substitutionsgleichung

$$\frac{1}{2} \left( t - \frac{ab}{t} \right) =: u \quad (0 < t < \infty)$$

(Fig. 4.3.7) liefert die Formeln

$$\begin{aligned} t &= u + \sqrt{ab + u^2} \quad (-\infty < u < \infty), \\ dt &= \left( 1 + \frac{u}{\sqrt{ab + u^2}} \right) du = \frac{t}{\sqrt{ab + u^2}} du; \end{aligned}$$

dabei steht das letzte ‘t’ als Abkürzung für den Ausdruck  $u + \sqrt{ab + u^2}$ . Wir merken uns noch die folgende Beziehung zwischen den beiden Variablen  $t$  und  $u$ :

$$t^2 = ab + 2ut. \quad (20)$$

Führen wir diese Substitution in  $T(a, b)$  tatsächlich durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{(a^2 + ab + 2ut)(b^2 + ab + 2ut)}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + ab}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + ab}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Hier wurde das  $t$  im Zähler in den Radikanden  $R$  hineingezogen; es ist also

$$\begin{aligned} R &:= \left( \frac{a(a+b)}{t} + 2u \right) \left( \frac{b(a+b)}{t} + 2u \right) \\ &= \frac{ab}{t^2} (a+b)^2 + \frac{2u}{t} (a+b)^2 + 4u^2 = \frac{ab + 2ut}{t^2} (a+b)^2 + 4u^2 \\ &= 4 \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right); \end{aligned}$$

dabei haben wir zuletzt wieder (20) benützt. Tragen wir den erhaltenen Wert von  $R$  in (21) ein, so folgt

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4 \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (ab + u^2)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (ab + u^2)}} = T \left( \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right). \quad \square \end{aligned}$$

## Aufgaben

1. Leite ein verkoppeltes Paar von Rekursionsformeln her für die Größen

$$c_n := \int_0^{\pi/2} t^n \cos t \, dt, \quad s_n := \int_0^{\pi/2} t^n \sin t \, dt$$

und berechne die numerischen Werte  $c_0, \dots, c_4, s_0, \dots, s_4$ . Oder einfacher: Bestimme eine Rekursionsformel für die komplexen Größen

$$e_n := \int_0^{\pi/2} t^n e^{it} \, dt.$$

2. Es sei

$$C_n := \int_0^{\log 2} \cosh^n t \, dt \quad (n \geq 0).$$

Bestimme  $C_0$ ,  $C_1$  sowie eine Rekursionsformel für die  $C_n$ . (*Hinweis:* ‘cosh’, nicht ‘cos’!)

3. (M) Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int \sin^2 t e^{-t} \, dt, \quad (b) \int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} \, dt \quad (t^2+1 =: u),$$

$$(c) \int \sinh t \cos t \, dt, \quad (d) \int \frac{dt}{1+\cos t} \, dt \quad (\tan \frac{t}{2} =: u),$$

$$(e) \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}} \, dt \quad (t := \sin^2 u), \quad (f) \int t^3 \arctan t \, dt$$

und bringe das Resultat, wenn nötig, auf eine typographisch akzeptable Form.

4. (M) Es sei  $\gamma$  der Graph der Funktion

$$f(x) := \frac{x^2}{8} - \log x \quad (1 \leq x \leq 2).$$

Berechne die Länge  $L(\gamma)$ .

5. (M) Berechne die folgenden bestimmten Integrale

$$(a) \int_{11}^{13} \frac{3t-5}{7t+9} \, dt, \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+1} \, dt,$$

$$(c) \int_0^1 x \arcsin x \, dx \quad (x := \sin t), \quad (d) \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t}) \, dt,$$

$$(e) \int_0^1 (\arcsin y)^2 \, dy, \quad (f) \int_{-1}^1 \frac{dx}{6-x-x^2}$$

und bringe das Resultat, wenn nötig, auf eine typographisch akzeptable Form.

6. Bestimme den Schwerpunkt einer Halbkugel.

7. Berechne mit Hilfe der in Aufgabe 4.1.5 gefundenen Formel die Oberfläche des Rotationsellipsoids mit den Halbachsen  $a, a, b$ .

8. Aus einem Stück Draht läßt sich gemäß Fig. 4.3.8 ein Kreisel herstellen. Wie groß muß der Winkel zwischen den beiden Speichen gewählt werden, damit das Ding möglichst rund läuft? (*Hinweis:* Man muß dafür sorgen, daß der Schwerpunkt auf der Achse liegt. Hierzu benötigt man 1 kleine Figur, 1 Zeile Rechnung, 1 Wert aus dem Taschenrechner.)

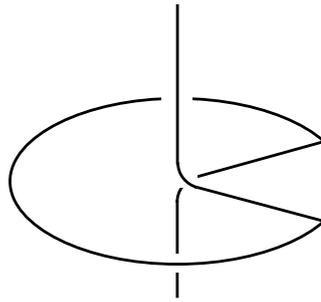


Fig. 4.3.8

9. (M) Bestimme die Partialbruchzerlegung der folgenden Funktionen:

(a)  $\frac{x^3}{(x-a)^2}$ ,      (b)  $\frac{1}{x^6-1}$ ,

(c)  $\frac{36}{x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2}$ ,      (d)  $\frac{t}{t^3+t^2-t-1}$

und bringe das Resultat, wenn nötig, auf eine typographisch akzeptable Form.

10. Wieviele unbestimmte Koeffizienten sind für die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$R(x) := \frac{(2x^2-1)^2(3x^3+1)^3}{(x^2-x+17)(x-2)^3(x-1)(x+4)}$$

insgesamt vorzusehen (inklusive die Koeffizienten eines allfälligen polynomialen Anteils)?

11. (M) Die Funktionen  $u \mapsto \frac{e^u}{u}$  und  $x \mapsto \sqrt{1+x^4}$  besitzen keine elementaren Stammfunktionen. Berechne die folgenden Integrale, so weit sie elementar sind:

(a)  $\int \frac{\log x}{x} dx$ ,      (b)  $\int \frac{x}{\log x} dx$ ,

(c)  $\int \frac{1}{x \log x} dx$ ,      (d)  $\int x \sqrt{1+x^4} dx$ ,

(e)  $\int \sqrt{1+e^{4t}} dt$ .

## 4.4 Uneigentliche Integrale

### Problemstellung

Sind der Bereich  $B \subset \mathbb{R}^n$  oder die Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  unbeschränkt, so erstreckt sich der Kuchen  $K_{B,f} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (Fig. 4.1.9) ins Unendliche, und sein Volumen wird jedenfalls problematisch. Auch die Riemannschen Summen

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k)$$

machen Mühe, von deren Grenzwert für  $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$  gar nicht zu reden. Trotzdem ist es in vielen derartigen Fällen möglich, dem Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

einen einleuchtenden Sinn und Wert zuzuweisen. Wir haben im vorangehenden Abschnitt schon einige derartige “uneigentliche Integrale” angetroffen. Ihr Wert ist oft eine interessante universelle Konstante, weil hier die betreffende Funktion bis an die natürlichen Grenzen ihres Definitionsbereichs integriert wird.

Bsp:  $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$

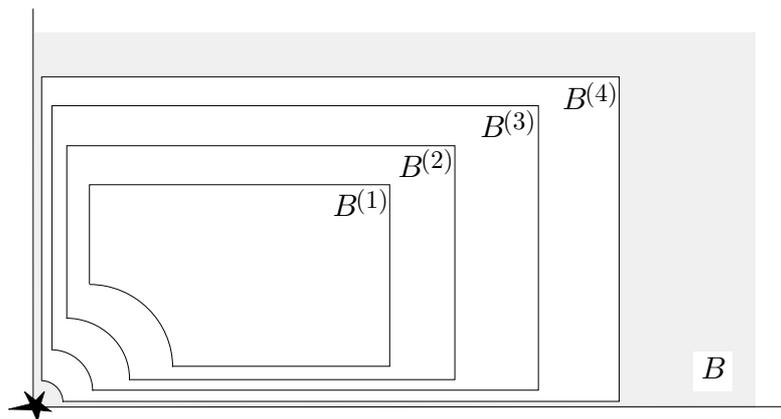


Fig. 4.4.1

Das folgende Vorgehen liegt nahe: Man betrachtet eine **Ausschöpfung** von  $B$  durch eine wachsende Folge von (beschränkten) Teilbereichen  $B^{(n)}$  (siehe die Fig. 4.4.1) — in der Praxis wählt man allerdings eine kontinuierliche Schar derartiger Teilbereiche — mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)} := \bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)} = B,$$

und zwar soll für jedes  $n$  das Integral

$$\int_{B^{(n)}} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

als Grenzwert von Riemannschen Summen definiert sein und sich mit den Methoden der Abschnitte 4.3 und 4.5 berechnen lassen.

In einem zweiten Schritt betrachtet man den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B^{(n)}} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) =: \int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

dieser Integrale und spricht dann vom **uneigentlichen Integral** von  $f$  über  $B$ . Ist dieser Grenzwert vorhanden und endlich, so heißt das uneigentliche Integral **konvergent**, in allen anderen Fällen **divergent**. Infolgedessen gibt es für uneigentliche Integrale wie für unendliche Reihen Konvergenzkriterien. Wir beschränken uns auf zwei Vergleichskriterien; sie beziehen sich auf die folgenden beiden Arten von Integralen:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt, \quad \int_0^b g(t) dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^b g(t) dt$$

(Fig. 4.4.2); dabei soll  $g$  für  $t \rightarrow 0+$  gegen  $\infty$  streben.

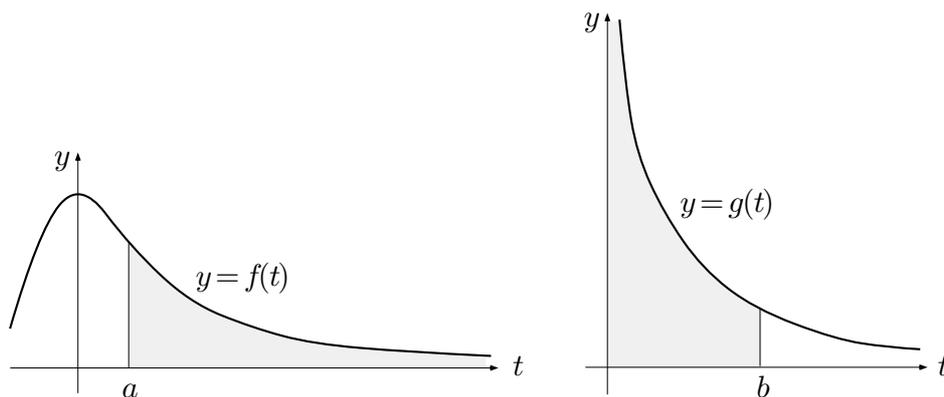


Fig. 4.4.2

## Zwei einfache Konvergenzkriterien

(4.11) (a) Nimmt  $|f(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$  mindestens so rasch ab wie  $1/t^\alpha$  mit einem geeigneten  $\alpha > 1$ , das heißt: Gilt für ein  $C$  und ein  $\alpha > 1$  die Abschätzung

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^\alpha} \quad (t > t_0),$$

so ist das uneigentliche Integral  $\int_a^\infty f(t) dt$  (absolut) konvergent.

(b) Ist jedoch für ein geeignetes  $C > 0$  durchwegs

$$f(t) \geq \frac{C}{t} \quad (t > t_0),$$

so ist das Integral  $\int_a^\infty f(t) dt$  divergent.

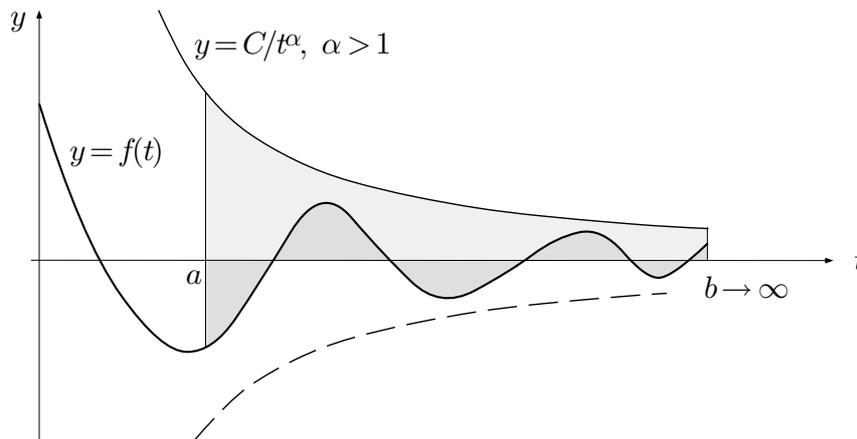


Fig. 4.4.3

□ Ist  $\alpha > 1$ , so gilt

$$\int_1^b \frac{C}{t^\alpha} dt = \frac{-C}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \Big|_1^b = \frac{C}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right)$$

und somit

$$\int_1^\infty \frac{C}{t^\alpha} dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{C}{t^\alpha} dt = \frac{C}{\alpha-1}.$$

Andererseits ist

$$\int_1^b \frac{C}{t} dt = C \log t \Big|_1^b = C \log b$$

und somit

$$\int_1^{\infty} \frac{C}{t} dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{C}{t} dt = \infty .$$

Der auf ein beliebiges  $f$  bezügliche Teil der Behauptung wird durch die Figuren 4.4.3 und 4.4.4 plausibel.  $\square$

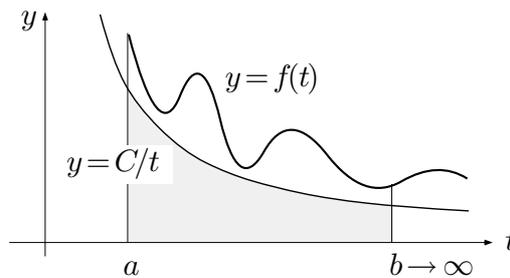


Fig. 4.4.4

① Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (= \pi)$$

haben wir in Beispiel 4.3.⑭ berechnet; das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

werden wir noch berechnen, und für das Integral

$$\int_1^{\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt, \quad (1)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$  eine gegebene Zahl, schließen wir folgendermaßen: Auch wenn  $\lambda$  noch so groß ist, immer gibt es ein  $t_0$  mit

$$e^t > t^{\lambda+2} \quad (t > t_0),$$

und das heißt

$$f(t) := t^{\lambda} e^{-t} < \frac{1}{t^2} \quad (t > t_0).$$

Die Integrale (1) sind daher für beliebiges (festes)  $\lambda$  konvergent. — Das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2 + 4}{(1 + 4t^2)^{3/2}} dt$$

hingegen ist divergent: Schreiben wir

$$f(t) := \frac{t^2 + 4}{(1 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{t} \frac{1 + 4/t^2}{(4 + 1/t^2)^{3/2}},$$

so strebt der zweite Faktor rechter Hand mit  $t \rightarrow \infty$  gegen  $1/8$ . Somit gilt für alle hinreichend großen  $t$ :

$$f(t) \geq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{t}. \quad \bigcirc$$

Bei den uneigentlichen Integralen der folgenden Art sind jedoch die für Konvergenz benötigten Exponenten  $\beta$  ausdrücklich  $< 1$ :

**(4.12)** (a) Geht  $g(t)$  für  $t \rightarrow 0+$  höchstens so rasch gegen  $\infty$  wie  $1/t^\beta$  mit einem geeigneten  $\beta < 1$ , das heißt: Gilt für ein  $C$  und ein  $\beta < 1$  die Abschätzung

$$0 \leq g(t) \leq \frac{C}{t^\beta} \quad (0 < t < t_0),$$

so ist das uneigentliche Integral  $\int_0^b g(t) dt$  konvergent.

(b) Ist jedoch für ein geeignetes  $C > 0$  durchwegs

$$g(t) \geq \frac{C}{t} \quad (0 < t < t_0),$$

so ist das Integral  $\int_0^b g(t) dt$  divergent.

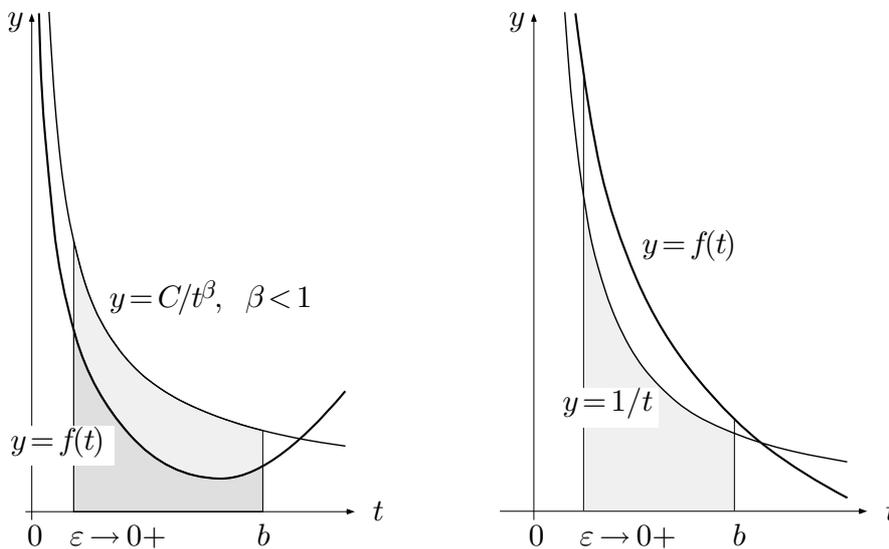


Fig. 4.4.5

□ Ist  $\beta < 1$ , so gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t^{\beta}} = \frac{-C}{\beta-1} \frac{1}{t^{\beta-1}} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{C}{1-\beta} (1 - \varepsilon^{1-\beta})$$

und somit

$$\int_0^1 \frac{C}{t^{\beta}} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t^{\beta}} dt = \frac{C}{1-\beta}.$$

Andererseits ist

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t} dt = C \log t \Big|_{\varepsilon}^1 = -C \log \varepsilon$$

und somit

$$\int_0^1 \frac{C}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{C}{t} dt = \infty.$$

Der auf ein beliebiges  $g$  bezügliche Teil der Behauptung wird durch die Figur 4.4.5 plausibel. ┘

② In Beispiel 4.3.⑨ wurde das uneigentliche Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

berechnet und damit automatisch als konvergent erwiesen. Hier noch ein a priori Konvergenzbeweis mit Hilfe von (4.12):



Fig. 4.4.6

Ist  $x \leq \frac{a+b}{2}$  (Fig. 4.4.6), so gilt  $b-x \geq \frac{b-a}{2} =: C$ . Damit haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{C(x-a)}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{1/2}} \quad (a < x \leq \frac{a+b}{2}),$$

und das ist für die Konvergenz des Integrals an der unteren Grenze hinreichend. Analog schließt man bei  $b$ . ○

### Anwendung: Die Gammafunktion

③ Die Fakultätfunktion (Fig. 4.4.7) ist für natürliche Zahlen  $n$  rekursiv definiert durch

$$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1)! \quad (n \geq 1).$$

Es liegt nahe, nach einer “natürlichen” Fortsetzung dieser Funktion auf nicht-ganze Werte der unabhängigen Variablen zu fragen. Lineare Interpolation ist nicht sehr inspiriert. Jedenfalls wird man auf der Funktionalgleichung

$$x! = x \cdot (x-1)! \quad (x > 0)$$

bestehen. Diese Bedingung reicht aber zur Festlegung der gesuchten Funktion nicht aus; denn im  $x$ -Intervall  $]-1, 0[$  können wir noch beliebige “Anfangswerte” wählen.

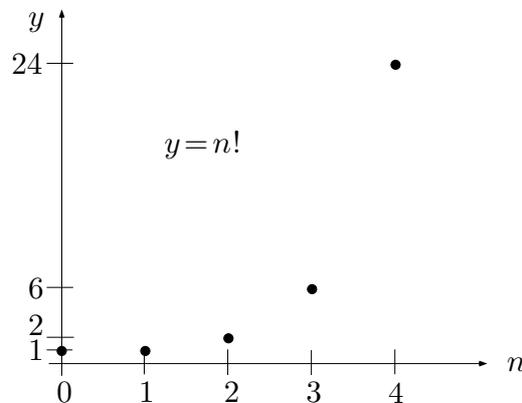


Fig. 4.4.7

Die “richtige” Fortsetzung der Fakultätfunktion ist vor allen noch möglichen durch eine gewisse Konvexitätsbedingung ausgezeichnet (ihr Logarithmus ist konvex). In erster Linie besitzt sie aber eine einfache Integraldarstellung, der wir noch kurz nachgehen. Seit Euler definiert man die **Gammafunktion** durch

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\alpha > 0). \quad (2)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein **Integral mit einem Parameter**: Integriert wird nach  $t$ , der Wert des Integrals hängt aber vom Wert des während der Integration festgehaltenen Parameters  $\alpha$  ab. Wir haben in Beispiel ① gezeigt, daß das Integral jedenfalls an der oberen Grenze konvergiert. Ist  $0 < \alpha < 1$ , so ist das Integral auch an der unteren Grenze als uneigentliches Integral anzusehen, konvergiert aber nach (4.12)(a), denn es gilt

$$t^{\alpha-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-\alpha}} \quad (t > 0),$$

und der Exponent  $1 - \alpha$  ist  $< 1$ .

Die Gammafunktion ist eine der wichtigsten nichtelementaren Funktionen (das Integral (2) läßt sich für unbestimmtes  $\alpha$  nicht elementar auswerten) und tritt in den verschiedensten Zusammenhängen auf. Wir beweisen darüber:

$$(4.13)(a) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0),$$

$$(b) \quad \Gamma(n + 1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Gammafunktion ist also in der Tat die Lösung des angezogenen Fortsetzungsproblems, abgesehen von dem lästigen Shift  $n \rightsquigarrow n + 1$ .

□ In der nachfolgenden Rechnung müßten strenggenommen Integrale von  $\varepsilon$  bis  $b$  betrachtet werden; anschließend wäre der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0+$ ,  $b \rightarrow \infty$  durchzuführen. — Es gilt

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty \underset{\downarrow}{t^\alpha} \underset{\uparrow}{e^{-t}} dt = -t^\alpha e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Wegen  $\alpha > 0$  ist nämlich

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha e^{-t} = 0,$$

das heißt: Der “ausintegrierte Teil” liefert keinen Beitrag.

Weiter ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1 = 0!.$$

Für den Induktionsbeweis von (b) nehmen wir an, (b) sei richtig für  $n$ . Dann folgt mit (a):

$$\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n + 1) = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!,$$

und (b) ist damit auch für  $n + 1$  als richtig erwiesen. ┘

Wie wir noch zeigen werden, ist  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Der Graph der Gammafunktion sieht somit aus, wie in der Figur 4.4.8 dargestellt. ○

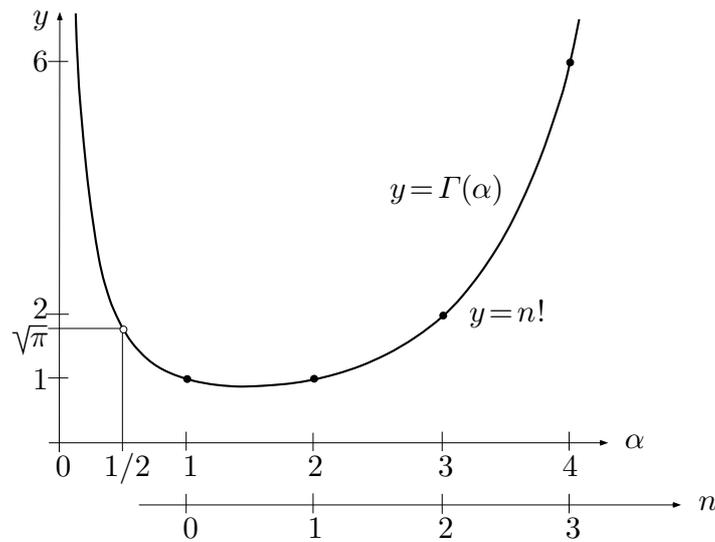


Fig. 4.4.8

## Aufgaben

1. (M) Konvergieren oder divergieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Die Antwort ist zu begründen. Im Fall der Konvergenz bestimme man den Wert des Integrals.

(a)  $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^3}$ , (b)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$ .

2. Berechne die Länge der logarithmischen Spirale  $r(\phi) := ae^{q\phi}$  vom Ursprung bis zum Punkt  $(a, 0)$ .

3. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale von Hand und, so weit möglich, mit Hilfe von (M) :

(a)  $\int_{-\infty}^\infty \exp(3t - e^t) dt$  ( $e^t := u$ ), (b)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{3x^2 + 4x + 5}$ ,

(c)  $\int_0^{5/4} \frac{dx}{|1-x^2|^{1/2}}$ , (d)  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3} + t^{3/4}}$ .

4. Auf der Grundrißebene steht eine unendlich lange kreiszylindrische Blechröhre, deren Achse mit der  $z$ -Achse zusammenfällt und die die konstante Flächendichte  $\sigma$  aufweist. Man berechne die Gravitationswirkung dieser Röhre im Ursprung, in anderen Worten: die Beschleunigung, mit der ein dort befindlicher Probekörper nach oben gesogen wird. (Gravitationskonstante :=  $\gamma$ )

## 4.5 Mehrfache Integrale

Es sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter, insbesondere beschränkter, mehrdimensionaler Bereich und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist das Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

erklärt als Grenzwert von Riemannschen Summen

$$\sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_k) \mu(B_k) .$$

Wir benötigen eine allgemeine Methode, um derartige Integrale zu berechnen, wenn  $f$  durch einen Ausdruck in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und  $B$  durch Ungleichungen gegeben sind.

Bsp:

$$\int_B (xy + yz + zx) dV, \quad B := \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, |x + y + z| \leq 1 \}$$

(Der Bereich  $B$  ist ein durch zwei parallele Schnitte schief abgeschnittener Rotationszylinder.)

### Den Kuchen in Scheiben schneiden

Es sei zunächst

$$Q := [a, b] \times [c, d]$$

ein Rechteck in der  $(x, y)$ -Ebene und  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (fast überall) stetig. Wir interpretieren das Integral  $\int_Q f d\mu$  als Volumen des Kuchens

$$K_{Q,f} := \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y) \} .$$

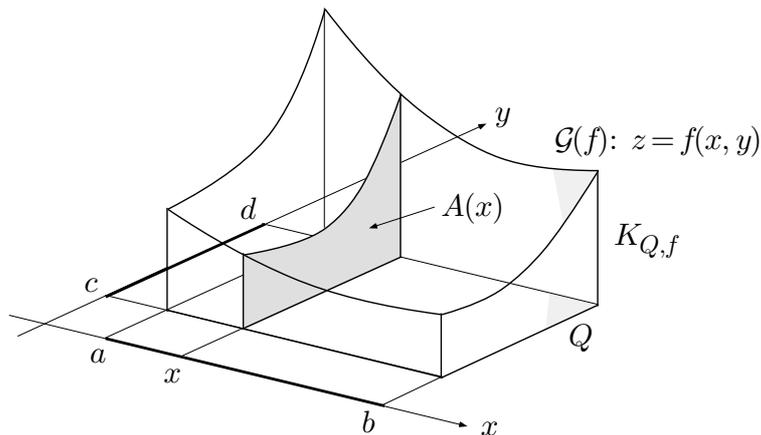


Fig. 4.5.1

Jede Ebene  $x = \text{const.}$  schneidet  $K_{Q,f}$  in einem Flächenstück, dessen Form und Inhalt natürlich von der gewählten Schnittstelle  $x \in [a, b]$  abhängen. Der Fig. 4.5.1 entnimmt man, daß sich der Inhalt  $A(x)$  dieses Flächenstücks als Integral bezüglich der Variablen  $y$  auffassen läßt:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy . \quad (1)$$

Die Variable  $x$  ist hier während der Integration *als Konstante zu behandeln*. Wir zerlegen nun das  $x$ -Intervall  $[a, b]$  durch Teilungspunkte

$$\mathcal{Z} : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

in kleine Teilintervalle  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ . Die Ebenen  $x = x_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) zerlegen dann den Kuchen  $K_{Q,f}$  in flache Teilkörper (Fig. 4.5.2), die angenähert prismatisch sind mit Grundfläche  $A(x_k)$  und Höhe  $x_k - x_{k-1} = \mu(I_k)$ . Das Volumen  $V_k$  eines derartigen Teilkörpers ist folglich näherungsweise gegeben durch

$$V_k \doteq A(x_k) \mu(I_k) .$$

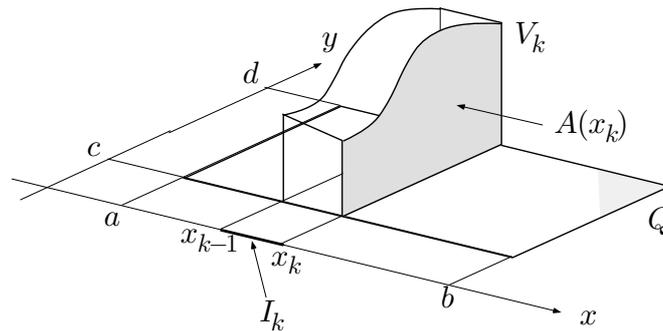


Fig. 4.5.2

Für das gesuchte Gesamtvolumen des Kuchens  $K_{Q,f}$  erhalten wir damit die Näherungsformel

$$\int_Q f d\mu = \sum_{k=1}^N V_k \doteq \sum_{k=1}^N A(x_k) \mu(I_k) . \quad (2)$$

Die letzte Summe ist eine Riemannsche Summe für das Integral

$$\int_a^b A(x) dx .$$

Ersetzen wir sie also durch dieses Integral, so geht (2) über in

$$\int_Q f \, d\mu \doteq \int_a^b A(x) \, dx ,$$

und mit (1) erhalten wir schließlich

$$\int_Q f \, d\mu \doteq \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx .$$

Da die betrachteten Approximationen durch Verfeinerung der Zerlegung  $\mathcal{Z}$  beliebig genau gemacht werden können, trifft hier in Wirklichkeit das Gleichheitszeichen zu. Damit haben wir gezeigt:

**(4.14)** *Ist  $Q := [a, b] \times [c, d]$  ein Rechteck in der  $(x, y)$ -Ebene, so gilt*

$$\int_Q f(x, y) \, d\mu(x, y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx .$$

Aus Symmetriegründen gilt dann natürlich auch

$$\int_Q f(x, y) \, d\mu(x, y) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy .$$

Die Aufgabe, eine Funktion von zwei Variablen über ein Rechteck zu integrieren, ist damit zurückgeführt auf zwei hintereinandergeschaltete Integrationen, bei denen nur je *eine* Variable betroffen ist. Für diese beiden einfachen Integrale stehen die Methoden des Abschnitts 4.3 zur Verfügung.

Es ist üblich, bei mehrfachen Integralen die Klammern um innere Integrale wegzulassen. Wir verabreden also für das folgende die Abkürzung

$$\left( \int \dots dx \right) =: \int \dots dx .$$

① Es soll das Volumen  $\mu(K)$  des Körpers

$$K := \{ (x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z(x+y) \leq 1 \}$$

berechnet werden. —  $K$  ist offensichtlich der Kuchen  $K_{Q,f}$  zu

$$Q := [1, 2] \times [1, 3], \quad f(x, y) := \frac{1}{x+y} ;$$

somit läßt sich das Volumen  $\mu(K)$  in folgender Weise als Integral darstellen:

$$\mu(K) = \int_Q \frac{1}{x+y} d\mu(x,y) = \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{x+y} dy dx .$$

Während der Evaluation des inneren Integrals ist  $x$  als Konstante zu behandeln. Man erhält

$$\int_1^3 \frac{1}{x+y} dy = \log(x+y) \Big|_{y=1}^{y=3} = \log(x+3) - \log(x+1)$$

und somit weiter

$$\mu(K) = \int_1^2 (\log(x+3) - \log(x+1)) dx .$$

Substituieren wir hier einmal  $x+3 := t$  und einmal  $x+1 := t$ , so kommt (siehe Beispiel 4.3.③):

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \int_4^5 \log t dt - \int_2^3 \log t dt = t(\log t - 1) \Big|_4^5 - t(\log t - 1) \Big|_2^3 \\ &= 5(\log 5 - 1) - 4(\log 4 - 1) - 3(\log 3 - 1) + 2(\log 2 - 1) \\ &= \log \frac{5^5}{2^6 \cdot 3^3} = 0.5925 . \end{aligned}$$

○

② Wir berechnen das Integral

$$J := \int_W \cos(x+y+z) dV$$

über den Würfel  $W := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^3$  im  $(x, y, z)$ -Raum. Satz (4.14) läßt sich natürlich sinngemäß auf die dreidimensionale Situation übertragen: Es gilt

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y+z) dz dy dx .$$

Für das innerste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y+z) dz &= \sin(x+y+z) \Big|_{z=-\pi/2}^{z=\pi/2} \\ &= \sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(x+y) ; \end{aligned}$$

dabei haben wir die Identität

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \alpha \quad (3)$$

benutzt. Wir berechnen nun das nächstäußere Integral, wobei wir den eben erhaltenen (von  $x$  und  $y$  abhängigen) Wert des innersten Integrals einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos(x+y) dy &= 2 \sin(x+y) \Big|_{y=-\pi/2}^{y=\pi/2} \\ &= 2 \left( \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right) = 4 \cos x, \end{aligned}$$

zuletzt wieder nach (3). Damit ergibt sich schließlich

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos x dx = 4 \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8. \quad \circ$$

### Integrale über allgemeine ebene Bereiche

Ist der Integrationsbereich  $B$  kein achsenparalleles Rechteck bzw. kein Quader, so wird die Berechnung des Integrals

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

wesentlich aufwendiger, da die Information über die genaue geometrische Gestalt von  $B$  an geeigneter Stelle in die Rechnung einzubringen ist.

Wir wollen einen beschränkten Bereich  $B$  der  $(x, y)$ -Ebene  **$y$ -einfach** nennen, wenn er sich mit Hilfe von zwei stetigen Funktionen  $\phi(\cdot)$  und  $\psi(\cdot)$  in der Form

$$B = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x) \} \quad (4)$$

darstellen läßt (Fig. 4.5.3). Analog ist

$$B = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y) \} \quad (5)$$

ein  **$x$ -einfacher Bereich**.

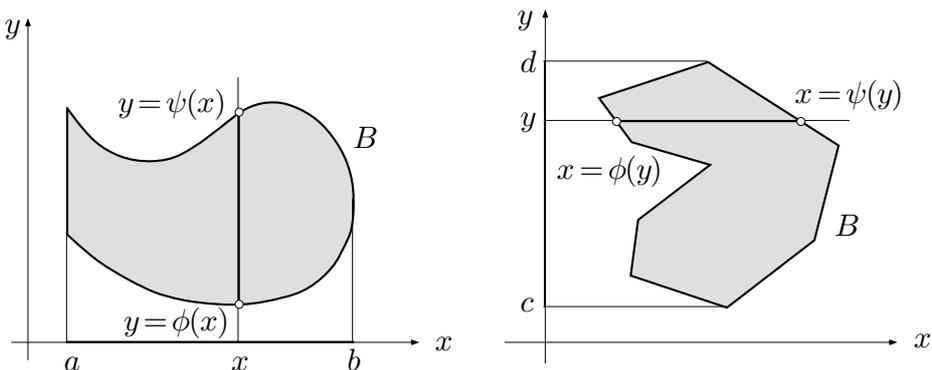


Fig. 4.5.3

Komplizierte Bereiche zerlege man in einfache. Über einfache Bereiche integriert man wie folgt:

(4.15) Ist der Bereich  $B$  gegeben durch (4) bzw. durch (5), so gilt

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (6)$$

bzw.

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_c^d \left( \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

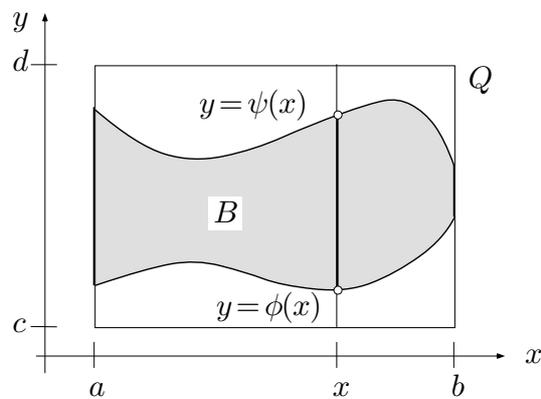


Fig. 4.5.4

□ Aus Symmetriegründen genügt es, (6) zu beweisen. Hierzu legen wir  $B$  in ein Rechteck

$$Q := [a, b] \times [c, d]$$

(Fig. 4.5.4) und erweitern  $f$  zu einer Funktion  $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ , indem wir  $f$  außerhalb  $B$  gleich 0 setzen. Die erweiterte Funktion ist auf der unteren und der oberen Begrenzung von  $B$  unstetig. Da diese Linien eine zweidimensionale Nullmenge bilden, können wir das in Kauf nehmen. Es gilt

$$\int_B f d\mu = \int_Q \tilde{f} d\mu$$

und für jedes feste  $x$ :

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy .$$

Aufgrund von Satz (4.14) läßt sich somit folgende Kette von Gleichungen bilden:

$$\begin{aligned} \int_B f \, d\mu &= \int_Q \tilde{f}(x, y) \, d\mu(x, y) = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

③ Der Bereich

$$B := \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, y^2 \leq x \}$$

(Fig. 4.5.5) ist sowohl  $y$ -einfach wie  $x$ -einfach; das Integral

$$J := \int_B xy^2 \, d\mu(x, y)$$

läßt sich daher auf zwei Arten berechnen.

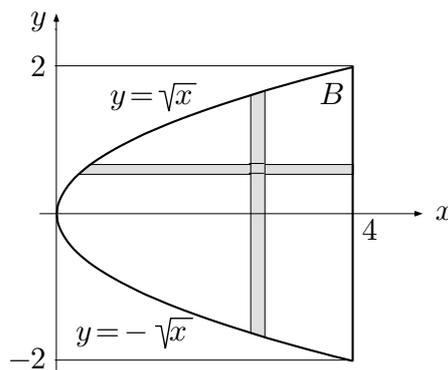


Fig. 4.5.5

(a) 
$$J = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 \, dy \, dx .$$

Das innere Integral hat den Wert

$$x \frac{y^3}{3} \Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} = \frac{2}{3} x^{5/2} ;$$

damit ergibt sich

$$J = \int_0^4 \frac{2}{3} x^{5/2} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^4 = \frac{512}{21} .$$

(b) 
$$J = \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 xy^2 dx dy .$$

Hier hat das innere Integral den Wert

$$\frac{x^2}{2} y^2 \Big|_{x=y^2}^{x=4} = 8y^2 - \frac{y^6}{2} ,$$

und wir erhalten

$$J = \int_{-2}^2 \left( 8y^2 - \frac{y^6}{2} \right) dy = \left( \frac{8}{3} y^3 - \frac{1}{14} y^7 \right) \Big|_{-2}^2 = 2 \left( \frac{8}{3} 2^3 - \frac{1}{14} 2^7 \right) = \frac{512}{21} . \quad \circ$$

④ Ein sechskantiger Bleistift der Dicke 2 wird mit Fräswinkel  $45^\circ$  kegelförmig angespitzt. Wie groß ist das weggefräste Volumen  $V$ ? — Es genügt, ein Sechstel

$$B := \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$$

der Stirnfläche zu betrachten (Fig. 4.5.6). Bei einem Fräswinkel von  $45^\circ$  wird von der Faser durch den Punkt  $(x, y) \in B$  ein Stück der Länge  $\sqrt{x^2 + y^2}$  weggefräst. Das gesuchte Volumen ist daher gegeben durch

$$V = 6 \int_B \sqrt{x^2 + y^2} d\mu(x, y) = 6 \int_0^1 \int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx . \quad (7)$$

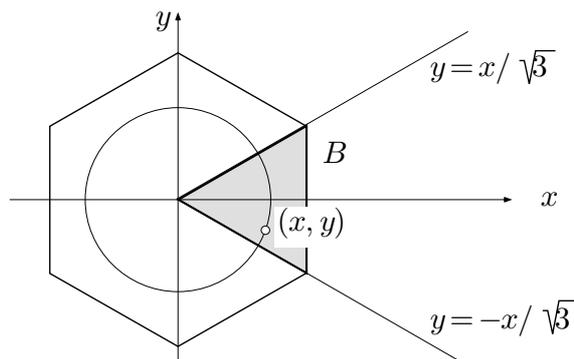


Fig. 4.5.6

Während der Berechnung des inneren Integrals ( $=: J(x)$ ) ist  $x$  als Konstante zu behandeln. Wir substituieren

$$y = x \sinh t \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha),$$

wobei  $\alpha$  so festzulegen ist, daß  $x \sinh \alpha = x/\sqrt{3}$  wird; mithin ist

$$\sinh \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

unabhängig von  $x$ . Weiter gilt

$$dy = x \cosh t \, dt, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x \cosh t,$$

und wir erhalten

$$J(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} x \cosh t \cdot x \cosh t \, dt = x^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cosh^2 t \, dt.$$

Nun ist nach 4.3.(16)

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cosh^2 t \, dt &= \frac{1}{2} (\cosh t \sinh t + t) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \cosh \alpha \sinh \alpha + \alpha \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} + \log \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \right) \end{aligned}$$

und somit

$$J(x) = x^2 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3 \right).$$

Setzen wir das in (7) ein, so ergibt sich schließlich

$$V = 6 \int_0^1 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3 \right) x^2 \, dx = 6 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3 \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + \log 3 = 2.4319.$$

Es scheint, daß man einen Bleistiftspitzer auch zur Berechnung von Logarithmen verwenden kann.  $\bigcirc$

## Integrale über räumliche Bereiche

Wir können uns nun auch an Integrale über beliebige *räumliche* Bereiche heranwagen. Es sei  $B \subset \mathbb{R}^3$  ein derartiger Bereich und  $B'$  die Projektion von  $B$  auf die  $(x, y)$ -Ebene;  $B'$  ist ein ebener Bereich. Wir nennen  $B$   **$z$ -einfach**, wenn sich  $B$  mit Hilfe von zwei stetigen Funktionen

$$\phi(\cdot, \cdot), \quad \psi(\cdot, \cdot) : \quad B' \rightarrow \mathbb{R}$$

in der Form

$$B = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \} \quad (8)$$

schreiben läßt (Fig. 4.5.7). Ist zum Beispiel

$$B := \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \}$$

die Vollkugel vom Radius  $a$ , so ist

$$B' = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \}$$

eine Kreisscheibe, und man hat

$$B = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \} .$$

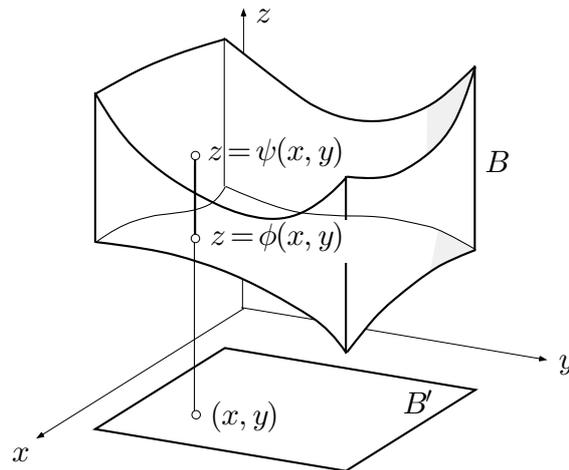


Fig. 4.5.7

Die folgende Formel reduziert ein Integral über den räumlichen Bereich  $B$  in der erwarteten Weise. Das äußere Integral über den ebenen Bereich  $B'$  ist nach Satz (4.15) weiterzubehandeln; im Ganzen sind also drei Integrationen erforderlich.

(4.16) Ist der  $z$ -einfache Bereich  $B$  gegeben durch (8), so gilt

$$\int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) = \int_{B'} \left( \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d\mu(x, y) .$$

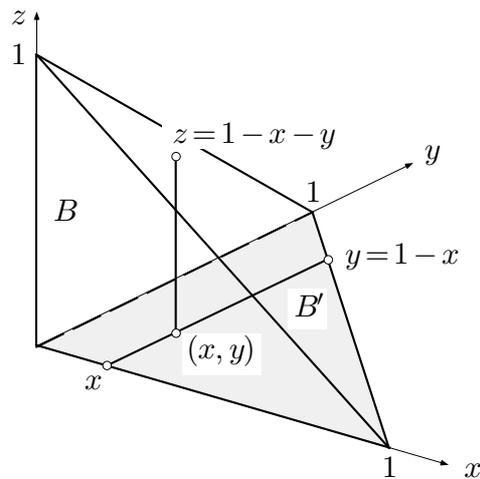


Fig. 4.5.8

⑤ Es soll das Trägheitsmoment  $\Theta$  des mit Masse der Dichte 1 belegten Oktaeders

$$P := \{ (x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1 \}$$

bezüglich der  $z$ -Achse bestimmt werden, also das Integral

$$\Theta := \int_P (x^2 + y^2) d\mu(x, y, z).$$

Aus verschiedenen Symmetriegründen ist

$$\Theta = 8 \int_B (x^2 + y^2) d\mu(x, y, z) = 16 \int_B x^2 d\mu(x, y, z),$$

wobei  $B$  den im ersten Oktanten gelegenen Teil von  $P$  bezeichnet (Fig. 4.5.8). Der Figur entnimmt man folgende Beschreibungen von  $B$  und von  $B'$ :

$$\begin{aligned} B &= \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', 0 \leq z \leq 1 - x - y \}, \\ B' &= \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Theta = 16 \int_{B'} \left( \int_0^{1-x-y} x^2 dz \right) d\mu(x, y).$$

Das innere Integral ( $=: J(x, y)$ ) berechnet sich zu

$$J(x, y) = x^2 z \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} = x^2(1-x-y),$$

und es folgt weiter nach (4.15):

$$\Theta = 16 \int_{B'} x^2(1-x-y) d\mu(x, y) = 16 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2(1-x-y) dy dx .$$

Wir berechnen auch hier zuerst das innere Integral ( $=: \bar{J}(x)$ ):

$$\bar{J}(x) = -\frac{x^2}{2}(1-x-y)^2 \Big|_{y=0}^{y=1-x} = \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 ;$$

damit ergibt sich schließlich

$$\Theta = 8 \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 8 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \dots = \frac{4}{15} .$$

○

⑥ Es soll der Schwerpunkt des Körpers

$$K := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in [0, 2], xyz \leq 1\}$$

(Fig. 4.5.9) bestimmt werden. — Wir fassen  $K$  auf als Restkörper

$$K = W \setminus B \tag{9}$$

mit

$$W := [0, 2]^3, \quad B := \{(x, y, z) \in W \mid xyz > 1\} .$$

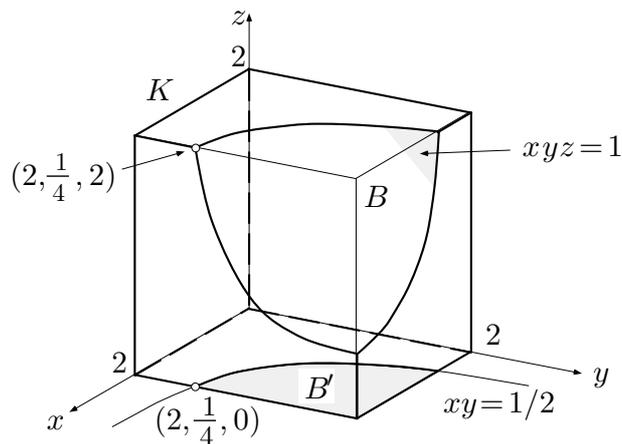


Fig. 4.5.9

Es genügt, die  $x$ -Koordinate  $\xi$  des Schwerpunkts zu bestimmen. Die Momentengleichung 4.1.(12) lautet:

$$\xi \int_K 1 \, d\mu(x, y, z) = \int_K x \, d\mu(x, y, z),$$

oder wegen (9):

$$\xi \left( \int_W d\mu - \int_B d\mu \right) = \int_W x \, d\mu - \int_B x \, d\mu.$$

Die Integrale über  $W$  können "im Kopf" evaluiert werden; beide haben den Wert 8. Damit ergibt sich

$$\xi = \frac{8 - \int_B x \, d\mu}{8 - \int_B d\mu}. \quad (10)$$

Die Reduktion des Bereichs  $B$  ist einfacher als diejenige von  $K$ . Der Figur entnimmt man

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', \frac{1}{xy} \leq z \leq 2 \right\}$$

mit

$$B' = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 2, \frac{1}{2x} \leq y \leq 2 \right\}.$$

Im Hinblick auf (10) betrachten wir jetzt für  $\sigma := 0$  und  $\sigma := 1$  das Integral

$$\begin{aligned} J_\sigma &= \int_B x^\sigma \, d\mu(x, y, z) = \int_{B'} \left( \int_{1/(xy)}^2 x^\sigma \, dz \right) d\mu(x, y) \\ &= \int_{B'} x^\sigma \left( 2 - \frac{1}{xy} \right) d\mu(x, y) = \int_{1/4}^2 x^\sigma \left( \int_{1/(2x)}^2 \left( 2 - \frac{1}{xy} \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Für das innere Integral ( $=: \bar{J}(x)$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{J}(x) &= \left( 2y - \frac{1}{x} \log y \right) \Big|_{y=1/(2x)}^{y=2} = 4 - \frac{1}{x} \log 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \log(2x) \\ &= 4 - \frac{1}{x} (1 + 2 \log 2) - \frac{1}{x} \log x. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$J_\sigma = \int_{1/4}^2 x^\sigma \left( 4 - \frac{1}{x} (1 + 2 \log 2) - \frac{1}{x} \log x \right) dx, \quad (11)$$

wobei wir noch die Abkürzung

$$\log 2 =: \beta$$

eingeführt haben. Wir setzen zunächst  $\sigma := 0$  und haben dann

$$\begin{aligned} \int_B d\mu = J_0 &= \int_{1/4}^2 \left( 4 - \frac{1}{x}(1 + 2\beta) - \frac{1}{x} \log x \right) dx \\ &= \left( 4x - (1 + 2\beta) \log x - \frac{1}{2} (\log x)^2 \right) \Big|_{1/4}^2 \\ &= 7 - (1 + 2\beta)(\beta - (-2\beta)) - \frac{1}{2}(\beta^2 - (-2\beta)^2) = 7 - 3\beta - \frac{9}{2}\beta^2. \end{aligned}$$

Setzen wir in (11)  $\sigma := 1$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_B x d\mu = J_1 &= \int_{1/4}^2 \left( 4x - (1 + 2\beta) - \log x \right) dx \\ &= \left( 2x^2 - 2\beta x - x \log x \right) \Big|_{1/4}^2 \\ &= 8 - \frac{1}{8} - 2\beta \cdot \frac{7}{4} - 2\beta + \frac{1}{4}(-2\beta) = 8 - \frac{1}{8} - 6\beta. \end{aligned}$$

Damit sind die beiden in (10) auftretenden Integrale berechnet, und wir erhalten

$$\xi = \frac{\frac{1}{8} + 6\beta}{1 + 3\beta + \frac{9}{2}\beta^2} = 0.8173.$$

○

## Integration in Polarkoordinaten

Oft treten Kreissektoren, Kreisringe und ähnliche Gebilde (Fig. 4.5.10) als Integrationsbereiche auf. Die Beschreibung und vor allem die Reduktion derartiger Bereiche in kartesischen Koordinaten ist aufwendig und schleppt im allgemeinen Wurzelausdrücke in die Rechnung ein. Noch schlimmer ist es, wenn eine Funktion über eine Kugel zu integrieren ist. In kartesischen Koordinaten sieht das folgendermaßen aus:

$$\int_{-a}^a \left( \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left( \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

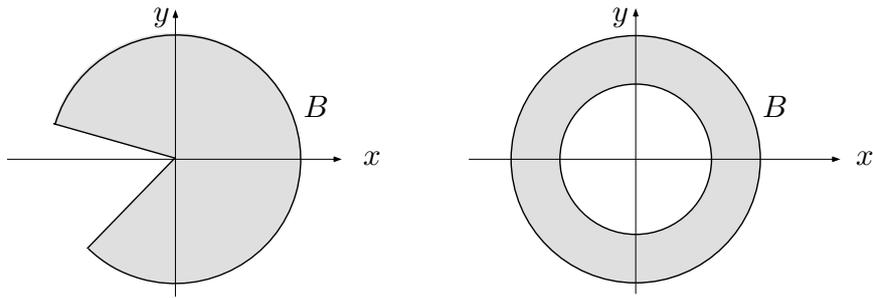


Fig. 4.5.10

Die Rechnung wird wesentlich vereinfacht, wenn man die richtigen Koordinaten verwendet, in den angeführten Beispielen also Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten. Der Integrationsbereich ist dann ein Rechteck in der  $(r, \phi)$ -Hilfsebene bzw. ein Quader im  $(r, \phi, \theta)$ -Hilfsraum.

Es sei also  $B$  ein Bereich in der  $(x, y)$ -Ebene und  $\tilde{B}$  die Beschreibung von  $B$  in Polarkoordinaten (Fig. 4.5.11). Man kann  $\tilde{B}$  als “Phantombereich” in der  $(r, \phi)$ -Hilfsebene auffassen. Weiter ist eine Funktion

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

gegeben; auf Polarkoordinaten umgerechnet erscheint diese Funktion in der Form

$$\tilde{f} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, \phi) \mapsto \tilde{f}(r, \phi) := f(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Die Funktion  $\tilde{f}$  wird gelegentlich als **Pullback** von  $f$  auf den Phantombereich  $\tilde{B}$  bezeichnet. Gefragt wird nach wie vor nach dem Integral

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y).$$

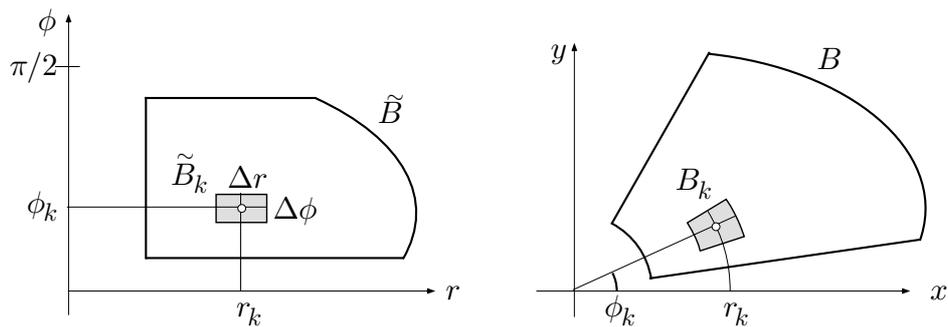


Fig. 4.5.11

Wir approximieren dieses Integral durch Riemannsche Summen, wobei wir als Teilbereiche  $B_k$  kleine Kreisring-Sektoren wählen. Ist  $r_k$  der mittlere Radius von  $B_k$  und  $\phi_k$  der zur Symmetrieachse von  $B_k$  gehörige Polarwinkel (Fig. 4.5.12), so gilt

$$\mu(B_k) = r_k \Delta\phi \cdot \Delta r = r_k \mu(\tilde{B}_k),$$

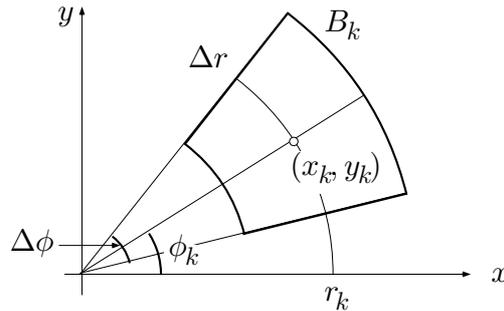


Fig. 4.5.12

wobei  $\tilde{B}_k$  das zu  $B_k$  gehörige "Phantomrechteck" in der  $(r, \phi)$ -Hilfsebene darstellt. Als Meßpunkt  $(x_k, y_k) \in B_k$  wählen wir den Punkt mit Polarkoordinaten  $r_k, \phi_k$  und erhalten dann nacheinander

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) d\mu(x, y) &\doteq \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) \mu(B_k) = \sum_{k=1}^N \tilde{f}(r_k, \phi_k) r_k \mu(\tilde{B}_k) \\ &\doteq \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(r, \phi) r d\mu(r, \phi), \end{aligned}$$

denn die letzte Summe läßt sich als Riemannsche Summe für die Funktion

$$g(r, \phi) := \tilde{f}(r, \phi) \cdot r$$

und den Bereich  $\tilde{B}$  auffassen. Durch Verfeinerung der Einteilung kann die Genauigkeit dieser Kette von Approximationen beliebig gesteigert werden. Hieraus folgt: Die endständigen Integrale haben in Wirklichkeit denselben Wert. Wir haben bewiesen:

**(4.17)** *Es sei  $B$  ein Bereich in der  $(x, y)$ -Ebene und  $\tilde{B}$  seine Beschreibung in Polarkoordinaten; weiter sei  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $\tilde{f}$  ihr Ausdruck in Polarkoordinaten. Dann gilt*

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(r, \phi) r d\mu(r, \phi).$$

Ist insbesondere  $B$  ein  $r$ -einfacher Sektor, das heißt:

$$\tilde{B} = \{(r, \phi) \mid \alpha \leq \phi \leq \beta, p(\phi) \leq r \leq q(\phi)\}$$

(Fig. 4.5.13), so gilt

$$\int_B f(x, y) d\mu(x, y) = \int_\alpha^\beta \int_{p(\phi)}^{q(\phi)} \tilde{f}(r, \phi) r dr d\phi .$$

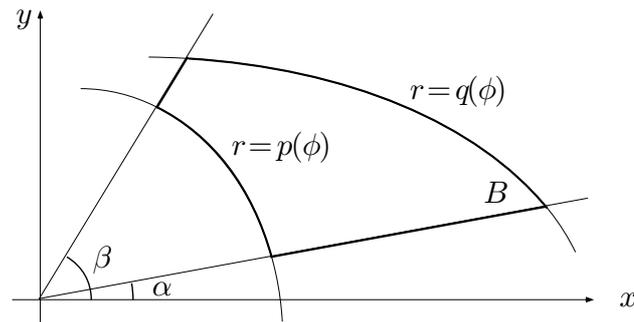


Fig. 4.5.13

⑦ Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := e^{-x^2 - y^2}$$

auf den Bereichen

$$B_R := \{(x, y) \mid x, y \geq 0; x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad Q_R := [0, R]^2$$

(Fig. 4.5.14). Gemäß (4.17) ist

$$\int_{B_R} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}_R} \tilde{f}(r, \phi) r d\mu(r, \phi) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\phi .$$

Das innere Integral hat den Wert

$$-\frac{1}{2}e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{1}{2}(1 - e^{-R^2}),$$

unabhängig von  $\phi$ . Damit ergibt sich

$$\int_{B_R} f d\mu = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) .$$

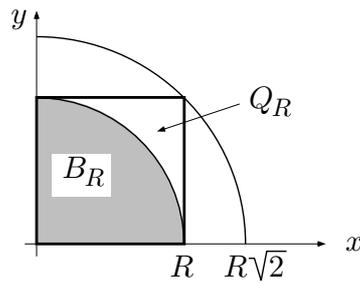


Fig. 4.5.14

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} f \, d\mu &= \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx = \int_0^R e^{-x^2} \left( \int_0^R e^{-y^2} \, dy \right) dx \\ &= \left( \int_0^R e^{-x^2} \, dx \right)^2, \end{aligned}$$

denn das innere Integral hängt nicht von  $x$  ab.

Da  $f$  durchwegs positiv ist, gilt

$$\int_{B_R} f \, d\mu \leq \int_{Q_R} f \, d\mu \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}} f \, d\mu.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq \left( \int_0^R e^{-x^2} \, dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}),$$

und der Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  liefert

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Wir haben also dieses uneigentliche Integral ausrechnen können, obwohl uns die Stammfunktionen von  $e^{-x^2}$  nicht zur Verfügung stehen. Zum Schluß verwandeln wir dieses Integral durch die Substitution

$$x := t^{1/2} \quad (0 \leq t < \infty), \quad dx := \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$$

in das Integral

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

und erhalten den früher versprochenen Gammawert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

○

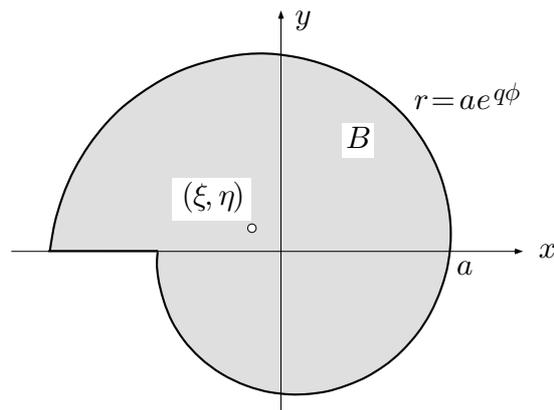


Fig. 4.5.15

⑧ Der in Fig. 4.5.15 dargestellte Exzenter  $B$  besitzt folgende Beschreibung in Polarkoordinaten:

$$\tilde{B} = \{(r, \phi) \mid -\pi \leq \phi \leq \pi, 0 \leq r \leq ae^{q\phi}\}. \quad (12)$$

Es soll der Schwerpunkt  $(\xi, \eta)$  von  $B$  bestimmt werden. — Zur Vereinfachung der Rechnung schreiben wir

$$x + iy =: z, \quad \xi + i\eta =: \zeta$$

und erhalten folgende komplexe Version der Momentengleichung:

$$\zeta \int_B d\mu(x, y) = \int_B z d\mu(x, y).$$

Somit ist

$$\zeta = \frac{J_1}{J_0} \quad (13)$$

mit

$$J_0 := \int_B d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}} r d\mu(r, \phi),$$

$$J_1 := \int_B z d\mu(x, y) = \int_{\tilde{B}} re^{i\phi} r d\mu(r, \phi),$$

wobei wir die beiden Integrale gemäß (4.17) auf Polarkoordinaten umgeschrieben haben.

Aufgrund von (12) ist

$$J_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{ae^{q\phi}} r dr d\phi.$$

Das innere Integral hat den Wert

$$\frac{r^2}{2} \Big|_{r:=0}^{r:=ae^{q\phi}} = \frac{a^2}{2} e^{2q\phi} ;$$

somit ergibt sich

$$J_0 = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2q\phi} d\phi = \frac{a^2}{4q} e^{2q\phi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a^2}{2q} \sinh(2q\pi) .$$

Zweitens hat man

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi} \left( \int_0^{ae^{q\phi}} r^2 dr \right) d\phi .$$

Das innere Integral hat hier den Wert

$$\frac{r^3}{3} \Big|_0^{ae^{q\phi}} = \frac{a^3}{3} e^{3q\phi} ,$$

und es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(3q+i)\phi} d\phi = \frac{a^3}{3(3q+i)} e^{(3q+i)\phi} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{a^3(3q-i)}{3(9q^2+1)} (-e^{3q\pi} + e^{-3q\pi}) = \frac{2a^3 \sinh(3q\pi)}{3(9q^2+1)} (-3q+i) . \end{aligned}$$

Setzen wir die für  $J_0$  und  $J_1$  erhaltenen Werte in (13) ein, so folgt

$$\zeta = \frac{4aq}{3(9q^2+1)} \frac{\sinh(3q\pi)}{\sinh(2q\pi)} (-3q+i) .$$

Die reellen Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  des Schwerpunkts lassen sich hier unmittelbar ablesen.



## Integration in Kugelkoordinaten

Zum Schluß zeigen wir noch, wie räumliche Integrale auf Kugelkoordinaten umzurechnen sind. In den folgenden Formeln hat der Äquator die geographische Breite  $\theta = 0$ .

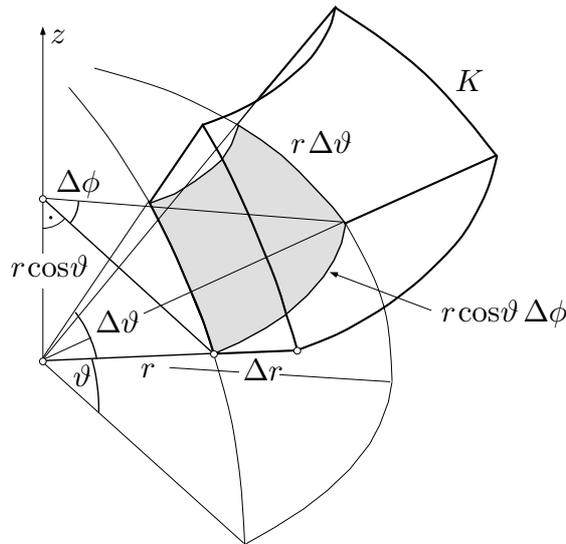


Fig. 4.5.16

(4.18) Es sei  $B$  ein Bereich im  $(x, y, z)$ -Raum und  $\tilde{B}$  seine Beschreibung in Kugelkoordinaten. Weiter sei  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $\tilde{f}$  ihr Ausdruck in Kugelkoordinaten. Dann gilt

$$\int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(r, \phi, \theta) r^2 \cos \theta d\mu(r, \phi, \theta).$$

□ Wir begnügen uns mit der “stenographischen” Herleitung dieser Formel und betrachten dazu ein Klötzchen  $K$  im  $(x, y, z)$ -Raum, das im  $(r, \phi, \theta)$ -Raum als achsenparalleler Quader erscheint (Fig. 4.5.16). Dieses Klötzchen ist näherungsweise ein Quader mit Seitenlängen  $\Delta r$ ,  $r \cos \theta \Delta \phi$  und  $r \Delta \theta$ ; es besitzt daher das Volumen

$$d\mu(x, y, z) = \Delta r \cdot r \cos \theta \Delta \phi \cdot r \Delta \theta = r^2 \cos \theta d\mu(r, \phi, \theta). \quad \lrcorner$$

⑨ Die Kugelrinde  $B$  mit dem “Phantombereich”

$$\tilde{B} := \left\{ (r, \phi, \theta) \mid r_i \leq r \leq r_a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

sei mit Masse der Dichte  $\rho$  belegt. An der Stelle  $(0, 0, -R)$ ,  $R \geq 0$ , befinde sich ein Massenpunkt  $m$ , der von der Rinde mit der Gravitationskraft

$$\mathbf{K} = (0, 0, K)$$

angezogen wird (Fig. 4.5.17). Dieses  $K$  soll nun berechnet werden.

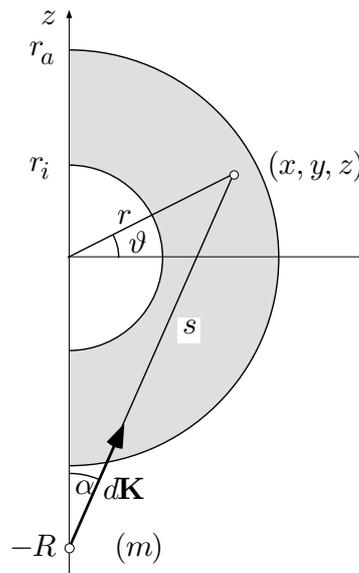


Fig. 4.5.17

Bezeichnet  $s$  den Abstand des Massenpunktes von dem variablen Punkt  $(x, y, z) \in B$ , so gilt nach dem Cosinussatz:

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = R^2 + r^2 + 2Rr \sin\theta .$$

Nach dem Gravitationsgesetz wirkt ein an der Stelle  $(x, y, z) \in B$  befindliches Volumenteilchen  $d\mu(x, y, z)$  auf den Massenpunkt  $m$  mit einer Kraft  $d\mathbf{K}$  vom Betrag

$$|d\mathbf{K}| = \frac{\gamma m (\rho d\mu)}{s^2} ,$$

dabei bezeichnet  $\gamma$  die Gravitationskonstante. Die  $z$ -Komponente dieser Kraft ist gegeben durch

$$dK = |d\mathbf{K}| \cos\alpha = \gamma m \rho \frac{1}{s^2} \frac{z + R}{s} d\mu ,$$

unabhängig davon, ob sich der Massenpunkt innerhalb oder außerhalb der Rinde befindet. Damit erhalten wir unter Verwendung von Satz (4.18):

$$\begin{aligned} K &= \int dK = \gamma m \rho \int_B \frac{z + R}{s^3} d\mu(x, y, z) \\ &= \gamma m \rho \int_{\tilde{B}} \frac{R + r \sin\theta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin\theta)^{3/2}} r^2 \cos\theta d\mu(r, \phi, \theta) . \end{aligned}$$

Da der Integrand von  $\phi$  nicht abhängt, liefert die Integration nach  $\phi$  einfach den Faktor  $2\pi$ , und es bleibt

$$K = 2\pi\gamma m\rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R + r \sin \theta) \frac{\cos \theta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{3/2}} d\theta \right) dr . \quad (14)$$

Integrieren wir das innere Integral ( $=: J(r)$ ) in der angegebenen Weise partiell, so ergibt sich

$$J(r) = (R + r \sin \theta)(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{-1/2} \left( -\frac{1}{Rr} \right) \Big|_{\theta:=-\pi/2}^{\theta:=\pi/2} \\ + \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{1/2}} d\theta .$$

Der zweite Summand liefert

$$\frac{1}{R}(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta)^{1/2} \frac{1}{Rr} \Big|_{\theta:=-\pi/2}^{\theta:=\pi/2} ,$$

so daß wir insgesamt folgendes erhalten:

$$J(r) = -\frac{1}{Rr} + \frac{R-r}{|R-r|} \frac{1}{Rr} + \frac{1}{R^2 r} ((R+r) - |R-r|) .$$

Liegt der Massenpunkt  $m$  *innerhalb* der Rinde, so ist  $R < r_i \leq r$ , und es folgt

$$J(r) = -\frac{1}{Rr} - \frac{1}{Rr} + \frac{1}{R^2 r} ((R+r) - (r-R)) = 0 \quad (r_i \leq r \leq r_a) .$$

Damit ist natürlich auch  $K = 0$ . Hieraus folgt: Eine im Erdinnern befindliche Probemasse  $m$  wird nur von dem weiter innen gelegenen Teil der Erdmasse angezogen.

Liegt jedoch der Massenpunkt  $m$  *außerhalb* der Rinde, so ist  $R > r_a \geq r$ , und es folgt

$$J(r) = -\frac{1}{Rr} + \frac{1}{Rr} + \frac{1}{R^2 r} ((R+r) - (R-r)) = \frac{2}{R^2} .$$

Setzen wir dies in (14) ein, so ergibt sich

$$K = 2\pi\gamma m\rho \frac{2}{R^2} \int_{r_i}^{r_a} r^2 dr = \frac{\gamma m}{R^2} \rho \frac{4\pi}{3} (r_a^3 - r_i^3) \\ = \frac{\gamma m (\rho \mu(B))}{R^2} .$$

In Worten: Liegt der Massenpunkt  $m$  außerhalb der Rinde, so wird er von ihr genau so angezogen, wie wenn die Gesamtmasse der Rinde in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre.  $\bigcirc$

## Aufgaben

1. Bei den folgenden Integralen ist die Reihenfolge der Integrationen umzukehren: Die innere Variable soll zur äußeren werden. Wie lautet jeweils das neue Integral? Figuren!

$$(a) \int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) dy dx, \quad (b) \int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y) dx dy .$$

2. Es geht hier um dreifache Integrale

$$\int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) = \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx .$$

Bestimme die mit ‘...’ angedeuteten Integrationsgrenzen für die folgenden Bereiche  $B$ :

- (a) der durch die Flächen  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ ,  $z = h$  begrenzte Zylinder,  
 (b) der durch die Flächen  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ ,  $x + y + z = 1$  begrenzte schief abgeschnittene Zylinder,  
 (c) der durch  $\frac{x}{2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  begrenzte schief abgeschnittene Kreiskegel.
3. In der nachstehenden Formel bezeichnen  $r$ ,  $\phi$  Polarkoordinaten. Was hat man an den offengelassenen Stellen einzusetzen?

$$\int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx = \int_{?}^? \int_{?}^? ? dr d\phi .$$

4. Berechne die folgenden Integrale:

$$(a) \int_B \cos y d\mu(x, y), \quad B := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi^2 - y^2\},$$

$$(b) \int_Q \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} d\mu(x, y), \quad Q := [0, 1]^2,$$

$$(c) \int_B \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} d\mu(x, y), \quad B := \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} .$$

5. Berechne das Integral  $\int_B e^{y^2} d\mu(x, y)$  für den in Figur 4.5.18 skizzierten Bereich  $B$ . (*Hinweis*: Integrationsreihenfolge geeignet wählen.)

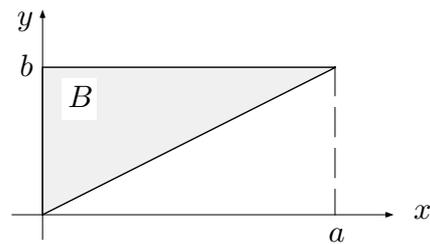


Fig. 4.5.18

6. Es bezeichne  $B_{2,R} \subset \mathbb{R}^2$  die Kreisscheibe,  $B_{3,R} \subset \mathbb{R}^3$  die Vollkugel vom Radius  $R$  mit Zentrum  $\mathbf{0}$ . Verifiziere, was folgt: Hängt die Funktion  $f: B_{n,R} \rightarrow \mathbb{R}$  in Wirklichkeit nur von  $r$  ab, so gilt

$$\int_{B_{2,R}} f \, d\mu = 2\pi \int_0^R \tilde{f}(r) r \, dr \quad \text{bzw.} \quad \int_{B_{3,R}} f \, d\mu = 4\pi \int_0^R \tilde{f}(r) r^2 \, dr .$$

7. Berechne das Trägheitsmoment der in Figur 4.5.19 skizzierten Torusfläche (Flächendichte :=1) bezüglich der  $z$ -Achse.
8. Durch das Zentrum einer Kugel wurde ein zylindrisches Loch der Länge  $a$  gebohrt. Berechne das Volumen des Restkörpers.
9. (a) Verifiziere die folgende Formel für den Abstand  $d$  ( $= d(x, y, z)$ ) des Punktes  $(x, y, z)$  von der Geraden durch  $(0, 0, 0)$  und  $(1, 1, 1)$ :

$$d^2 = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) .$$

- (b) Berechne das Trägheitsmoment des Einheitswürfels (Dichte := 1) bezüglich einer Raumdiagonalen.

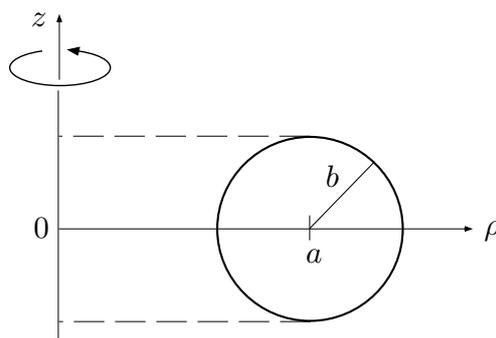


Fig. 4.5.19

10. Ein Kreiszyylinder vom Querschnittsdurchmesser  $a$  und ein Prisma mit quadratischem Querschnitt der Stärke  $a$  durchdringen sich in der Weise, daß die Achse des Zylinders zwei Gegenkanten des Prismas senkrecht schneidet. Berechne das Volumen des Durchdringungskörpers. (*Hinweis:* Wähle die Disposition der Figur 4.5.20.)

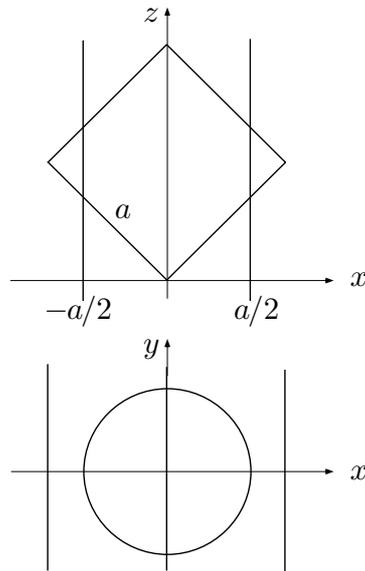


Fig. 4.5.20

## 4.6 Differentialgleichungen III

### Weiteres zur allgemeinen Theorie

Wir haben in Abschnitt 3.5 den Begriff der Differentialgleichung eingeführt und erklärt, daß die sogenannten konstituierenden Gleichungen eines realen physikalischen (biologischen, ökonomischen, ...) Systems von endlich vielen Freiheitsgraden in aller Regel Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen sind. Wir haben den geometrischen Gehalt einer Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

interpretiert als Vorgabe eines Richtungsfeldes in (einem Gebiet) der  $(x, y)$ -Ebene. Gesucht sind diejenigen Kurven

$$\gamma: x \mapsto (x, y(x)),$$

die in allen ihren Punkten die dort vorgeschriebene Steigung aufweisen:

$$\forall x: y'(x) = f(x, y(x)),$$

das heißt: sich kontinuierlich dem Richtungsfeld anschmiegen. Schließlich haben wir in Abschnitt 3.6 eine wichtige Klasse von Differentialgleichungen (lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) ausführlich diskutiert und dafür Lösungsverfahren angegeben.

Die Auflösung einer Differentialgleichung wird auch deren **Integration** genannt. Im allgemeinen werden nämlich elementar lösbare Differentialgleichungen in der Weise geknackt, daß sie durch geeignete Substitutionen usw. auf die Form

$$\frac{du}{dt} = \phi(t) \quad (1')$$

gebracht werden, wobei die neuen Variablen  $t$  und  $u$  "umkehrbar" mit  $x$  und  $y$  verknüpft sind. Die besonders einfache Differentialgleichung (1') hat natürlich die Lösungen

$$u = \int \phi(t) dt = \Phi(t) + \text{const.}, \quad (2)$$

$\Phi(\cdot)$  eine Stammfunktion von  $\phi(\cdot)$ . Am Schluß sind diese Lösungen wieder auf  $x$  und  $y$  umzurechnen. Man sagt dann, man habe die gegebene Differentialgleichung (1) auf die **Quadratur** (1')  $\rightarrow$  (2) zurückgeführt.

Die Theorie der vorweg behandelten linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist gerade dadurch gekennzeichnet, daß sie ohne Verwendung des Integralbegriffs auskommt: Es genügt, den richtigen Ansatz für die Lösungsfunktionen hinzuschreiben. Inzwischen haben wir aber integrieren gelernt, so daß weitere Typen von Differentialgleichungen der Behandlung zugänglich werden. Bevor wir daran gehen, weisen wir noch auf einen Sachverhalt von mehr grundsätzlich-theoretischem Interesse hin:

(4.19) (a) *Das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0 \quad (3)$$

ist äquivalent mit der Integralgleichung

$$y(x) \equiv \int_0^x f(t, y(t)) dt \quad (4)$$

für die unbekannte Funktion  $y(\cdot)$ .

Dies ist folgendermaßen zu interpretieren: Wird die Lösung  $y(\cdot)$  des Anfangswertproblems (3) rechter Hand in (4) eingesetzt und der entstehende Ausdruck nach  $t$  integriert von 0 bis zur variablen oberen Grenze  $x$ , so wird gerade wieder die Funktion  $y(\cdot)$  (als Funktion von  $x$ ) ausgeworfen. Umgekehrt: Eine Funktion  $y(\cdot)$ , die derart durch das Integral (4) reproduziert wird, ist automatisch Lösung von (3).

□ Ist  $y(\cdot)$  Lösung von (3), so gilt

$$\forall t: \quad y'(t) = f(t, y(t)),$$

und es folgt durch Integration von 0 bis  $x$ :

$$y(x) - y(0) = \int_0^x f(t, y(t)) dt,$$

wegen  $y(0) = 0$  also (4). — Gilt umgekehrt (4), so ist jedenfalls  $y(0) = 0$ , und durch Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze folgt

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Da dies für alle  $x$  zutrifft, ist  $y(\cdot)$  tatsächlich die Lösung des Anfangswertproblems (3). □

(4.19) (b) *Die durch*

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &:= 0, \\ \phi_{n+1}(x) &:= \int_0^x f(t, \phi_n(t)) dt \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

rekursiv definierte Funktionenfolge  $(\phi_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in einem geeigneten Intervall  $] -h, h[$  gegen die Lösung von (3).

(Ohne Beweis) — Das Geheimnis von (4.19)(b) ist folgendes (Fig. 4.6.1): Wird eine "falsche" Funktion  $y(t)$  ins Integral (4) eingelesen, so kommt zwar

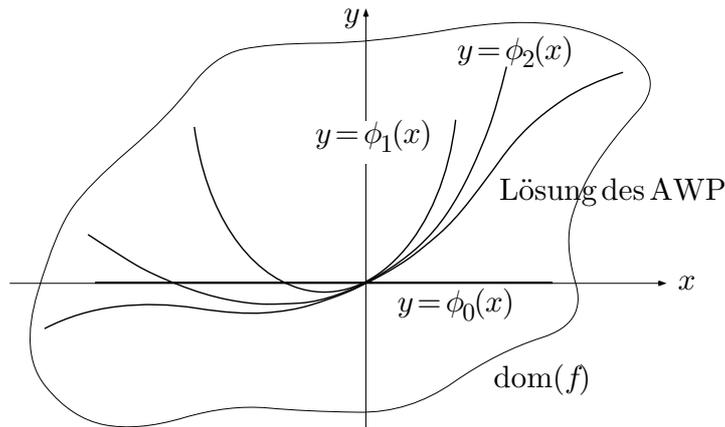


Fig. 4.6.1

nicht die richtige Lösung von (3) heraus, aber immerhin eine bessere Approximation, als es der Input war. In der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen wird mit Hilfe des Iterationsverfahrens (4.19)(b) bewiesen, daß jedes "gute" Anfangswertproblem (3) genau eine Lösung besitzt.

① Für das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2 \quad (:= f(x, y)), \quad y(0) = 0$$

erhalten wir folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &:= 0, \\ \phi_{n+1}(x) &:= \int_0^x (1 + \phi_n^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_0^x (1 + \phi_0^2(t)) dt = \int_0^x 1 dt = x, \\ \phi_2(x) &= \int_0^x (1 + \phi_1^2(t)) dt = \int_0^x (1 + t^2) dt = x + \frac{x^3}{3}, \\ \phi_3(x) &= \int_0^x (1 + (t + t^3/3)^2) dt = \int_0^x (1 + t^2 + 2t^4/3 + t^6/9) dt \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ?x^7, \\ \phi_4(x) &= \int_0^x (1 + (t + t^3/3 + 2t^5/15 + ?t^7)^2) dt \\ &= \int_0^x \left( 1 + t^2 + \frac{2t^4}{3} + \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9}\right)t^6 + ?t^8 \right) dt \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{7 \cdot 45} + ?x^9. \end{aligned}$$

Da die Polynome  $\phi_n(\cdot)$  in erster Linie für kleine  $x$  betrachtet werden, haben wir ihre hintersten Koeffizienten zum Teil nicht mehr berechnet.

Wie man leicht verifiziert, ist

$$y(x) = \tan x$$

die exakte Lösung des gestellten Anfangswertproblems. Der Tangens besitzt an der Stelle 0 die Taylor-Entwicklung

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ?x^9 ;$$

die berechneten Iterierten  $\phi_0, \dots, \phi_4$  stellen also für kleine  $x$  in der Tat von Mal zu Mal bessere Approximationen an die exakte Lösung dar.  $\circ$

## Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

Wir behandeln nun die allgemeine **lineare Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$y' = p(x)y + q(x) \quad (=: f(x, y)) ; \quad (5)$$

dabei sind  $p(\cdot)$  und  $q(\cdot)$  gegebene stetige Funktionen von  $x$ . Sind  $p(\cdot)$  und  $q(\cdot)$  auf dem Intervall  $]a, b[$  definiert,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , so ist  $\text{dom}(f)$  der vertikale Streifen  $]a, b[ \times \mathbb{R}$ . Durch jeden Punkt dieses Streifens geht genau eine Lösungskurve. Aus den folgenden Formeln geht überdies hervor, daß jede einzelne Lösung auf dem ganzen Intervall  $]a, b[$  definiert ist und nicht in einem inneren Punkt "explodieren" kann (Fig. 4.6.2). Dieser Sachverhalt trifft auch bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung zu.

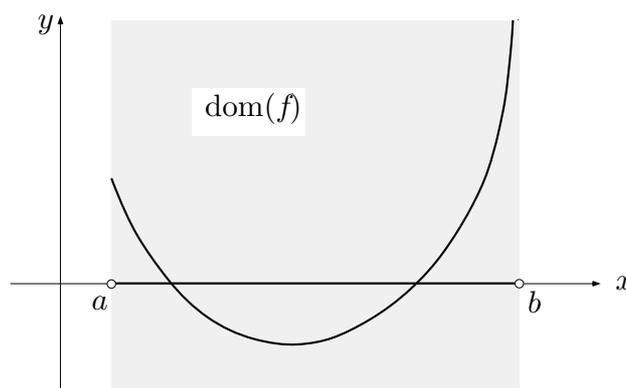


Fig. 4.6.2

② Bei der *nichtlinearen* Differentialgleichung

$$y' = y^2 \quad (= f(t, y))$$

ist  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ . Die durch den Anfangspunkt  $(0, 1)$  gehende Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

(Fig. 4.6.3), “explodiert” also schon nach einer Sekunde. ○

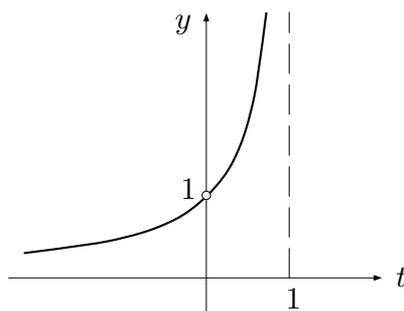


Fig. 4.6.3

Wir betrachten zunächst die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$y' = p(x)y \quad (a < x < b) . \quad (6)$$

Die spezielle Gleichung

$$y' = \lambda y$$

mit konstantem Koeffizienten  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist von dieser Art. Sie besitzt bekanntlich als Lösungen die Exponentialfunktionen

$$y(x) = C e^{\lambda x}, \quad C \in \mathbb{R} .$$

Wir machen daher für eine Lösung  $Y(\cdot)$  der Gleichung (6) den Ansatz

$$Y(x) := e^{P(x)}$$

mit einer neuen unbekanntenen Funktion  $P(\cdot)$ . Tragen wir dies in (6) ein, so muß identisch in  $x$  gelten:

$$P'(x) e^{P(x)} = p(x) e^{P(x)},$$

und das ist erfüllt, wenn für  $P(\cdot)$  eine Stammfunktion von  $p(\cdot)$  gewählt wird. Übrigens ist dann  $Y(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .

Nun ist (6) eine homogene lineare Differentialgleichung. Mit  $Y(\cdot)$  sind daher auch alle Vielfachen  $CY(\cdot)$ ,  $C \in \mathbb{R}$  fest, Lösungen von (6), und zwar sind das schon alle Lösungen, da durch jeden Punkt von  $]a, b[ \times \mathbb{R}$  genau eine Kurve dieser Schar geht (Fig. 4.6.4). Wir haben bewiesen:

(4.20) Die allgemeine Lösung von (6) ist gegeben durch

$$y(x) = C e^{P(x)}, \quad C \in \mathbb{R};$$

dabei bezeichnet  $P(\cdot)$  irgendeine Stammfunktion von  $p(\cdot)$ .

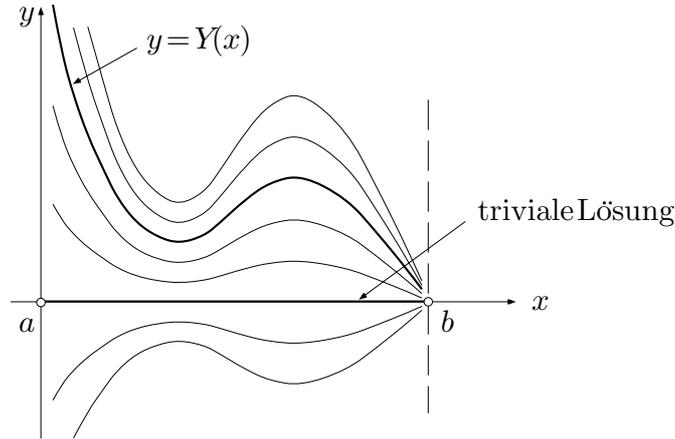


Fig. 4.6.4

③ Man bestimme die durch den Punkt  $(\frac{5}{4}, 1)$  gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1). \quad (7)$$

Die Funktion  $p(x) := 1/\sqrt{x^2 - 1}$  besitzt die Stammfunktionen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{const.};$$

die allgemeine Lösung von (7) lautet daher

$$y(x) = C e^{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})} = C (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Die Anfangsbedingung liefert für  $C$  die Gleichung

$$1 = C \left( \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1} \right) = 2C,$$

und damit erhalten wir als Lösung des gestellten Anfangswertproblems:

$$y(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Dies ist, wie erwartet, für alle  $x > 1$  definiert. ○

Wir wenden uns nun der inhomogenen Gleichung (5) zu und weisen zunächst darauf hin, daß Satz (3.18) auch hier gilt:

(4.21) Es seien  $y_s(\cdot)$  eine irgendwie gefundene (“partikuläre”) Lösung der inhomogenen Gleichung (5) und  $Y(\cdot)$  eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (6). Dann ist die allgemeine Lösung  $y(\cdot)$  der Gleichung (5) gegeben durch

$$y(x) = CY(x) + y_s(x), \quad C \in \mathbb{R} \quad (8)$$

(= “allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung”).

□ Ist  $y(\cdot)$  gegeben durch (8), so gilt

$$y' = CY' + y'_s = CpY + py_s + q = p(CY + y_s) + q = py + q,$$

das heißt:  $y(\cdot)$  ist eine Lösung von (5). Umgekehrt: Ist  $y(\cdot)$  eine Lösung von (5), so genügt die Funktion  $u := y - y_s$  der homogenen Gleichung (6):

$$u' = y' - y'_s = (py + q) - (py_s + q) = p(y - y_s) = pu.$$

Nach Satz (4.20) ist folglich  $u = CY$  für ein geeignetes  $C \in \mathbb{R}$  und somit  $y = CY + y_s$ , wie behauptet. □

Gelegentlich kann man tatsächlich eine partikuläre Lösung  $y_s(\cdot)$  von (5) erraten. Es gibt aber auch ein systematisches Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von (5), die sogenannte Methode der **Variation der Konstanten**:

Zunächst soll man die zugehörige homogene Gleichung (6) lösen. Man erhält eine Funktionenschar

$$y(x) = CY(x), \quad C \in \mathbb{R},$$

mit einer gewissen “Basisfunktion”  $Y(\cdot) \neq 0$ . Für die allgemeine Lösung von (5) macht man nun den Ansatz

$$y(x) := C(x)Y(x) \quad (9)$$

mit einer neuen unbekanntenen Funktion  $C(\cdot)$ . Trägt man diesen Ansatz in (5) ein, so ergibt sich

$$C'Y + \underbrace{CY'} = \underbrace{pCY} + q.$$

Da  $Y$  das homogene Problem (6) löst, fallen hier zwei Terme heraus, und es bleibt für  $C(\cdot)$  die einfache Differentialgleichung

$$C'Y(x) = q(x) \quad \text{bzw.} \quad C' = \frac{q(x)}{Y(x)}$$

übrig, die sofort integriert werden kann. Bei dieser Integration wird auch noch eine neue Integrationskonstante  $C_0$  abgesondert. Damit ist gezeigt:

(4.22) Die allgemeine Lösung von (5) hat die Form

$$y(x) = (C(x) + C_0) Y(x);$$

dabei ist  $Y(\cdot) \neq 0$  eine Lösung der homogenen Gleichung (6) und  $C(\cdot)$  eine Stammfunktion von  $q(\cdot)/Y(\cdot)$ .

(Die in (4.22) erscheinenden Formeln braucht man sich nicht zu merken, wohl aber den Ansatz (9). Der Rest ergibt sich dann im Anwendungsfall von selbst.)

④ Es soll die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x^3 - xy \tag{10}$$

bestimmt werden. — Die zugehörige homogene Gleichung  $y' = -xy$  besitzt die Lösungen

$$y(x) = C e^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir machen also für die Lösungen von (10) den Ansatz

$$y(x) := C(x) e^{-x^2/2}$$

und erhalten für  $C(\cdot)$  die Bedingung

$$C' e^{-x^2/2} + \underbrace{C e^{-x^2/2} (-x)} = x^3 \underbrace{-x C e^{-x^2/2}},$$

das heißt:

$$C' = x^3 e^{x^2/2}.$$

Dies ist nun unbestimmt zu integrieren:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x^3 e^{x^2/2} dx = 2 \left( \int \underset{\downarrow}{u} \underset{\uparrow}{e^u} du \right)_{u:=x^2/2} = 2(u e^u - \int e^u du) \\ &= 2(u - 1)e^u + \text{const.} = (x^2 - 2)e^{x^2/2} + C_0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (10) ergibt sich damit zu

$$y(x) = (x^2 - 2) + C_0 e^{-x^2/2}$$

(Fig. 4.6.5). Die durch den Ursprung gehende Lösung

$$y_0(x) = x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}$$

besitzt dort übrigens einen Flachpunkt, denn es ist

$$y_0(x) = x^2 - 2 + 2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + ?x^6 \right) = \frac{x^4}{4} + ?x^6.$$

Alle Lösungen nähern sich für  $|x| \rightarrow \infty$  asymptotisch der Parabel  $y = x^2 - 2$ .

○

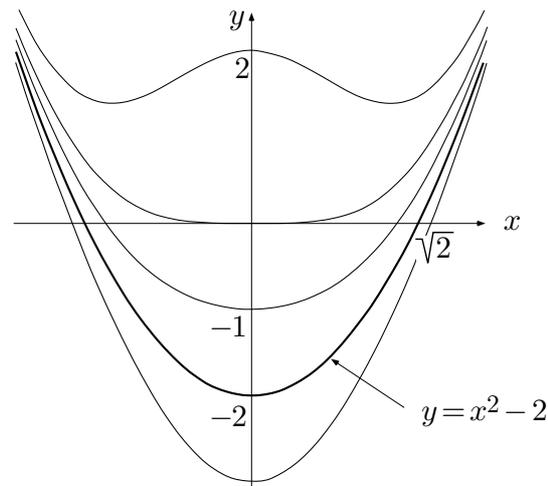


Fig. 4.6.5

Die allgemeine **homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (a < x < b) \quad (11)$$

läßt sich nicht auf Quadraturen zurückführen. Da derartige Gleichungen in den verschiedensten Zusammenhängen (Schwingungsprobleme, Differentialgeometrie u.a.) auftreten, gehört ihre Theorie zu den am intensivsten erforschten Gebieten der Analysis. Dabei geht es einerseits um die speziellen Funktionen, die durch gewisse spezielle Gleichungen (11) definiert werden (zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen, die sogenannten Besselfunktionen u.a.), und andererseits um die qualitativen Eigenschaften (Abstände und Anzahl der Nullstellen u.a.) der Lösungen in Abhängigkeit von Eigenschaften der Koeffizientenfunktionen  $p(\cdot)$  und  $q(\cdot)$ .

Die Gesamtheit  $\mathcal{L}$  der Lösungen von (11) ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Das bedeutet folgendes (siehe auch Satz **(3.17)**): Kann man sich irgendwie zwei linear unabhängige Lösungen  $Y_1(\cdot)$  und  $Y_2(\cdot)$  verschaffen, so ist die allgemeine Lösung von (11) gegeben durch

$$y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ein korrekter Satz von Anfangsbedingungen, nämlich

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

mit gegebenen Zahlen  $(x_0, y_0)$  und  $v_0$  legt die Werte  $C_1$  und  $C_2$  fest und zieht damit eine wohlbestimmte Funktion aus der Lösungsgesamtheit  $\mathcal{L}$  heraus.

## Randwertprobleme

Anstelle von Anfangsbedingungen, die an *einem* Punkt  $x_0$  angreifen, kann man auch sogenannte **Randbedingungen** formulieren, die an den *zwei* weit voneinander entfernten Punkten  $a$  und  $b$  der  $x$ -Achse gleichzeitig angreifen (Fig. 4.6.6):

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

mit gegebenen Randdaten  $y_a, y_b$ .

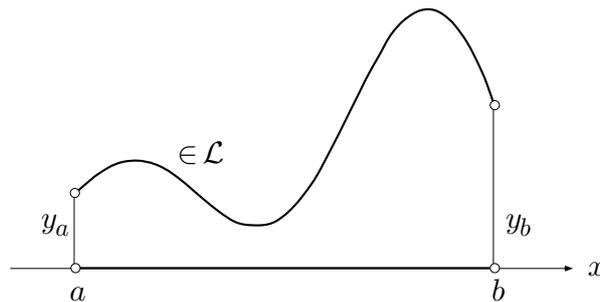


Fig. 4.6.6

Diese Aufgabe ist wesentlich heikler als die erste, und es braucht nicht immer eine Lösung zu geben. Derartige **Randwertprobleme** (oft mit “homogenen” Randdaten  $y_a = y_b = 0$ ) spielen in den Anwendungen eine ungeheure Rolle, und ihre Behandlung bildet wohl den interessantesten Teil der ganzen Theorie. Um zu zeigen, welche neuen Phänomene da auftauchen, behandeln wir ein ganz simples Beispiel, wo wir alles explizit ausrechnen können.

⑤ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{12}$$

auf dem  $x$ -Intervall  $[0, 1]$ . Es tritt hier ein Parameter  $\omega > 0$  auf, der noch eine überraschende Rolle spielen wird. Gegeben sind ferner die Randbedingungen

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \tag{13}$$

Die allgemeine Lösung von (12) lautet bekanntlich

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A \cos 0 + B \sin 0 = y_0 \\ A \cos \omega + B \sin \omega = y_1 \end{array} \right\} \tag{14}$$

für die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$ . Der ersten Gleichung entnimmt man sofort  $A = y_0$ , so daß wir mit der Bedingung

$$B \sin \omega = y_1 - y_0 \cos \omega \quad (15)$$

verbleiben. Ist  $\sin \omega \neq 0$ , so wird dadurch  $B$  bestimmt zu

$$B = \frac{y_1 - y_0 \cos \omega}{\sin \omega},$$

und unser Randwertproblem (12)^(13) besitzt dann für beliebige Randdaten  $y_0, y_1$  genau eine Lösung, nämlich die Funktion

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{y_1 - y_0 \cos \omega}{\sin \omega} \sin(\omega x).$$

Ist aber

$$\sin \omega = 0, \quad (16)$$

so ist (15) und damit das Gleichungssystem (14) nur lösbar, wenn zufälligerweise  $y_1 - y_0 \cos \omega = 0$  ist. In anderen Worten: Für gewisse spezielle Werte des Parameters  $\omega$  besitzt das Randwertproblem (12)^(13) für die allermeisten Randdaten *keine* Lösung.

Die durch (16) charakterisierten speziellen  $\omega$ -Werte heißen die **Eigenwerte** dieses Beispiels; es handelt sich um die Zahlen

$$\omega_k := k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

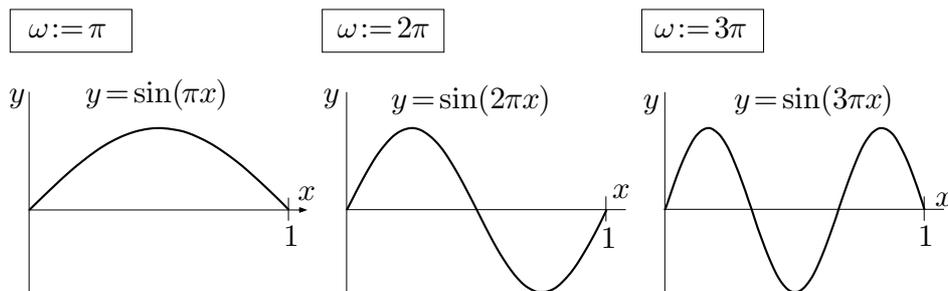


Fig. 4.6.7

“Homogene” Randdaten  $y_0 = y_1 = 0$  lassen immer (das heißt: für beliebige Werte des Parameters  $\omega$ ) die triviale Lösung  $y(x) \equiv 0$  zu. Ist aber  $\omega := \omega_k$  ein Eigenwert, so gibt es auch noch *nichttriviale* Lösungen der homogenen Randwertaufgabe: Man hat dann immer noch  $A = y_0 = 0$ , aber die Gleichung

(15) lautet jetzt einfach  $B \sin \omega_k = 0$  und ist wegen  $\sin \omega_k = 0$  für jedes  $B \in \mathbb{R}$  erfüllt. In anderen Worten: Die Funktionen

$$y(x) = B \sin(\omega_k x), \quad B \in \mathbb{R},$$

(Fig. 4.6.7) sind nichttriviale Lösungen des homogenen Randwertproblems

$$y'' + \omega_k^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (17)$$

Man nennt sie die zum Eigenwert  $\omega_k$  gehörigen **Eigenfunktionen**.

Wir haben also die folgende Alternative: Ist  $\omega$  kein Eigenwert, so besitzt das Randwertproblem (12)^(13) für beliebige Randdaten genau eine Lösung. Ist aber  $\omega := \omega_k$  ein Eigenwert, so besitzt das inhomogene Randwertproblem (12)^(13) im allgemeinen keine Lösung, dafür besitzt dann das homogene Randwertproblem (17) nichttriviale Lösungen.  $\circ$

## Separierbare Differentialgleichungen

Nach diesem Exkurs kehren wir zurück zu den Differentialgleichungen erster Ordnung,  $y' = f(x, y)$ , und behandeln einen Typ, der sich bei jedermann größter Beliebtheit erfreut: die sogenannten separierbaren Differentialgleichungen. Die rechte Seite  $f(\cdot, \cdot)$  hat hier folgende spezielle Form: Sie ist ein Produkt von zwei stetigen Funktionen, die nur von je einer der beiden Variablen abhängen. Eine **separierbare Differentialgleichung** hat demnach die Gestalt

$$y' = g(x) \cdot k(y). \quad (18)$$

Definitionsbereich ist ein Rechteck  $R := ]a, b[ \times ]c, d[$  der  $(x, y)$ -Ebene, das sich auch ins Unendliche erstrecken darf.

Nullstellen von  $k(\cdot)$  bedürfen besonderer Betrachtung: Ist  $k(y_0) = 0$ , so ist die konstante Funktion  $y(x) := y_0$  eine Lösung von (18). Konstante Lösungen zerlegen das Rechteck  $R$  in horizontale Streifen (Fig. 4.6.8). Nach dem Eindeutigkeitssatz (3.16)(b) kann keine nichtkonstante Lösung eine Streifengrenze überqueren. Wir dürfen uns daher im weiteren auf das Innere eines derartigen Streifens beschränken, in anderen Worten:  $k(y) \neq 0$  annehmen.

Mit  $h(y) := 1/k(y)$  bringen wir (18) auf die für das weitere vorteilhaftere Gestalt

$$h(y) y' = g(x). \quad (18')$$

Es sei nun ein Anfangspunkt  $(x_0, y_0)$  vorgegeben (Fig. 4.6.9), und es sei

$$x \mapsto y := y(x)$$

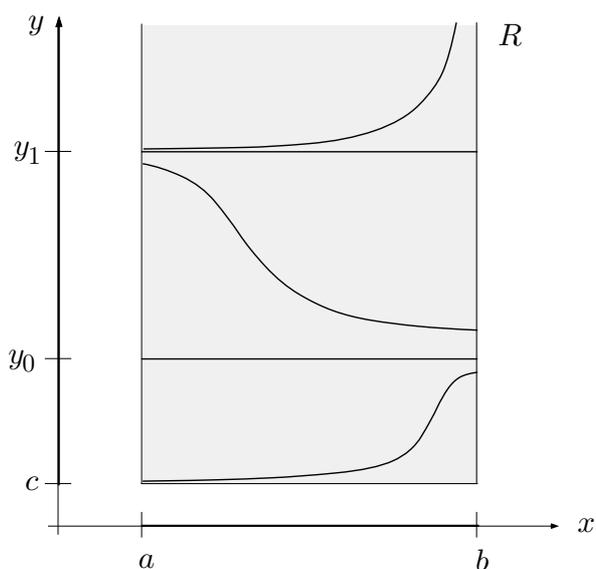


Fig. 4.6.8

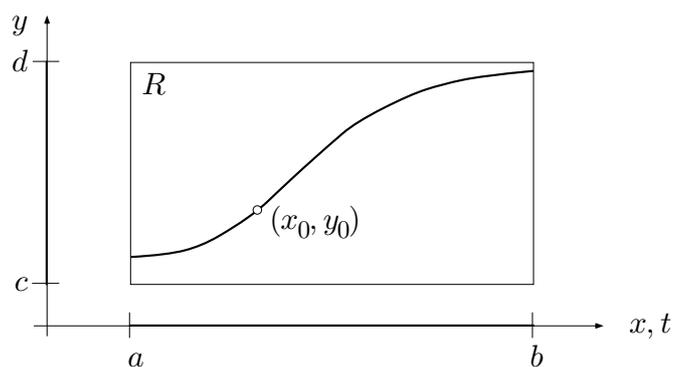


Fig. 4.6.9

die durch  $(x_0, y_0)$  gehende Lösung von (18'). Dann gilt für alle  $t \in ]a, b[$  oder jedenfalls für alle  $t$  in der Nähe von  $x_0$ :

$$h(y(t)) y'(t) = g(t)$$

(auf den Namen der unabhängigen Variablen kommt es nicht an). Integrieren wir das nach  $t$  von  $x_0$  bis zur frei gewählten oberen Grenze  $x$ , so ergibt sich

$$\int_{x_0}^x h(y(t)) y'(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt .$$

Auf der linken Seite substituieren wir

$$y(t) := y, \quad y'(t) dt := dy .$$

Damit geht die letzte Gleichung über in

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} h(y) dy = \int_{x_0}^x g(t) dt . \quad (19)$$

Die (gegebenen) Funktionen  $g$  und  $h$  besitzen Stammfunktionen  $G$  und  $H$ . Mit ihrer Hilfe läßt sich (19) folgendermaßen schreiben:

$$H(y(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) . \quad (20)$$

Wegen  $h(y) \neq 0$  ist  $H(\cdot)$  streng monoton und besitzt damit eine Umkehrfunktion  $H^{-1}$ . Rein formal ergibt sich daher aus (20) die folgende Formel für  $y(x)$ :

$$y(x) = H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)) .$$

In anderen Worten: Wenn es gelingt, die Gleichung

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) \quad (21)$$

nach  $y$  aufzulösen, so erhält man die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(x) k(y) , \quad y(x_0) = y_0$$

in expliziter Form. Die formelmäßige Auflösung von (20) nach  $y$  ist allerdings nicht immer möglich. Man kann dann versuchen, die Gleichung (21) nach  $x$  aufzulösen, um wenigstens eine explizite Darstellung der Umkehrfunktion zu erhalten, oder man muß sich mit der impliziten Präsentation (21) der Lösung zufriedengeben.

Die vorangehenden Überlegungen liefern mit der Formelkette (18)  $\longrightarrow$  (18')  $\longrightarrow$  (19)  $\longrightarrow$  (20) bzw. (21) das folgende Rezept für die Behandlung von separierbaren Differentialgleichungen (18):

1. Schreibe die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x) k(y) .$$

2. Trenne ("separiere") formal die Variablen:

$$\frac{1}{k(y)} dy = g(x) dx .$$

3. Integriere links nach  $y$ , rechts nach  $x$ , und zwar
  - unbestimmt, falls nach der allgemeinen Lösung gefragt ist. Dabei erscheint eine Integrationskonstante;
  - links von  $y_0$  bis  $y$ , rechts von  $x_0$  bis  $x$ , falls die durch  $(x_0, y_0)$  gehende Lösung verlangt ist.
4. Löse nach  $y$  auf, wenn Du kannst.

⑥ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

im Quadrat  $Q := ]-1, 1[^2$  der  $(x, y)$ -Ebene. Gesucht sind

- (a) die allgemeine Lösung und, unabhängig davon,  
 (b) die durch den Punkt  $(-1/2, \sqrt{3}/2)$  gehende Lösung.

Separation der Variablen liefert

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (22)$$

Für (a) haben wir das unbestimmt zu integrieren:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

es ergibt sich

$$\arcsin y = \arcsin x + \alpha, \quad (23)$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Integrationskonstante bezeichnet. Hieraus erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned} y &= \sin(\arcsin x + \alpha) = x \cos \alpha + \sqrt{1-x^2} \sin \alpha, \\ (y - x \cos \alpha)^2 &= (1-x^2) \sin^2 \alpha, \\ x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2 &= \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, daß die Lösungskurven auf Kegelschnitten liegen. Die weitere Analyse würde zeigen, daß es sich dabei um Ellipsen handelt, die dem Quadrat  $Q$  einbeschrieben sind (Fig. 4.6.10).

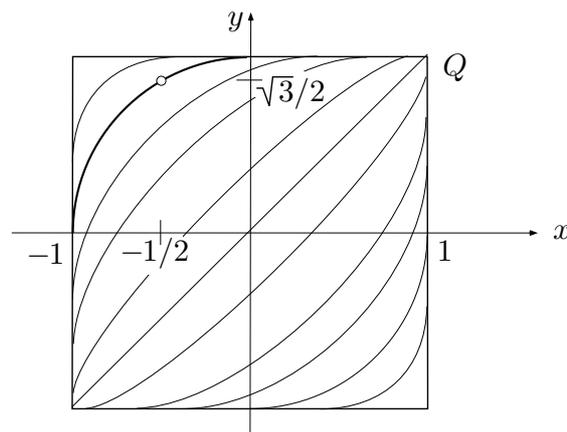


Fig. 4.6.10

Für die Aufgabe (b) haben wir (22) wie folgt bestimmt zu integrieren:

$$\int_{\sqrt{3}/2}^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1/2}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es ergibt sich

$$\arcsin y - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin x - \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$$

und damit

$$\arcsin y - \arcsin x = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2},$$

also (23) mit  $\alpha := \frac{\pi}{2}$ . Aus (24) folgt daher: Die Lösung des Anfangswertproblems (b) ist der Kreisbogen

$$y(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 0).$$

○

## Weitere Beispiele

⑦ Die Wachstumsrate einer biologischen Population sei im wesentlichen proportional zur Zahl der vorhandenen Individuen, wobei aber der Proportionalitätsfaktor (im folgenden Wachstumskonstante genannt) mit zunehmender Population abnimmt, da sich die Individuen gegenseitig behindern. Diese Vorstellungen lassen sich wie folgt in ein mathematisches Modell übersetzen:

Wir bezeichnen mit  $y(t)$  die Größe der Population zur Zeit  $t$ , wobei wir  $y$  als kontinuierliche Variable betrachten. Weiter sei  $\alpha > 0$  die Wachstumskonstante unter Vernachlässigung der gegenseitigen Behinderung; endlich messe der Parameter  $\beta > 0$  den Einfluß der Zusammenstöße zwischen den Individuen auf die Wachstumsrate. Man überlegt sich, daß die Anzahl der (zufälligen) Zweierstöße im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  proportional ist zum Quadrat der Anzahl Individuen zur Zeit  $t$ , und wird damit auf die folgende Differentialgleichung für die Funktion  $y(\cdot)$  geführt:

$$\dot{y} = \alpha y - \beta y^2. \tag{25}$$

Dies ist eine sogenannte  $t$ - bzw.  $x$ -freie **Differentialgleichung** und ist folglich separierbar. Das Richtungsfeld einer  $x$ -freien Differentialgleichung ist invariant bezüglich horizontaler Translation, und dasselbe gilt für die Schar der

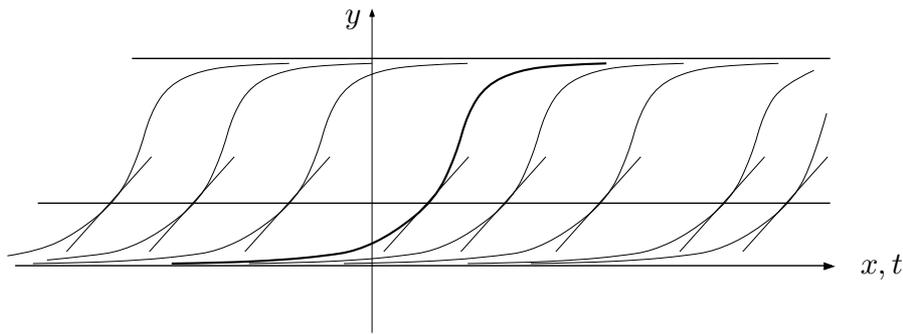


Fig. 4.6.11

Lösungskurven. Mit anderen Worten: Die einzelnen Lösungskurven gehen durch horizontale Parallelverschiebung auseinander hervor (Fig. 4.6.11). Die rechte Seite unserer Differentialgleichung,

$$k(y) := \alpha y - \beta y^2 = -\beta y \left( y - \frac{\alpha}{\beta} \right),$$

besitzt die Nullstellen 0 und  $\alpha/\beta$ , die zu den zwei speziellen Lösungen

$$y(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta} \quad (26)$$

Anlaß geben. Im weiteren müssen wir die Differentialgleichung auf den  $y$ -Intervallen  $]0, \alpha/\beta[$  und  $] \alpha/\beta, \infty[$  je für sich untersuchen; negative  $y$ -Werte brauchen wir wohl nicht zu betrachten. Keine Lösung kann die speziellen Lösungen (26) überkreuzen; insbesondere bleibt jede Lösung für alle Zeiten auf derselben Seite der Linie  $y = \alpha/\beta$ .

Nach diesen Vorbemerkungen schreiben wir nun (25) in der separierten Form

$$\frac{dy}{-\beta y(y - \alpha/\beta)} = dt.$$

Die durch den Anfangspunkt  $(0, y_0)$  gehende Lösung  $t \mapsto y(t)$  genügt dann der folgenden Gleichung:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{-\beta y(y - \alpha/\beta)} = \int_0^t dt = t. \quad (27)$$

Für das Integral linker Hand (=  $J$ ) stellen wir die Partialbruchzerlegung her. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\alpha} \int_{y_0}^y \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \alpha/\beta} \right) dy = \frac{1}{\alpha} \left( \log y - \log |y - \alpha/\beta| \right) \Big|_{y_0}^y \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \log \frac{y}{y_0} - \log \left| \frac{y - \alpha/\beta}{y_0 - \alpha/\beta} \right| \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der letzten Vorbemerkung können wir hier die Betragstriche im weiteren weglassen: Der fragliche Quotient ist jedenfalls positiv. Wir setzen nun den für  $J$  erhaltenen Wert in (27) ein und entlogarithmieren. Es folgt

$$\frac{y}{y_0} \Big/ \frac{y - \alpha/\beta}{y_0 - \alpha/\beta} = e^{\alpha t} .$$

Dies läßt sich nach  $y$  auflösen; wir erhalten damit als Lösung unseres Anfangswertproblems die Funktion

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - \frac{\alpha}{\beta})e^{-\alpha t}} .$$

Was können wir hieran ablesen?

- Ist  $0 < y_0 < \alpha/\beta$ , so strebt  $y(\cdot)$  mit  $t \rightarrow \infty$  monoton wachsend gegen den Grenzwert  $\alpha/\beta$ .
- Ist jedoch  $y_0 > \alpha/\beta$ , so fällt  $y(\cdot)$  monoton gegen denselben Grenzwert.

In anderen Worten: Das durch den Parameter  $\alpha$  charakterisierte natürliche Wachstum und die durch  $\beta$  erfaßten gegenseitigen Behinderungen führen zusammen zu der stabilen Populationsgröße  $\alpha/\beta$ , gegen die die Population  $y(t)$  mit  $t \rightarrow \infty$  in jedem Fall (außer, wenn  $y_0 = 0$ ) konvergiert (Fig. 4.6.12), und zwar nimmt die Abweichung  $|y(t) - \alpha/\beta|$  im wesentlichen ab wie  $e^{-\alpha t}$ . "Stabil" bedeutet hier, daß die Population auch nach einer geringfügigen Störung wieder zur Idealgröße  $\alpha/\beta$  zurückkehrt. Die Lösung  $y(t) \equiv 0$  ist hingegen unstabil.  $\bigcirc$

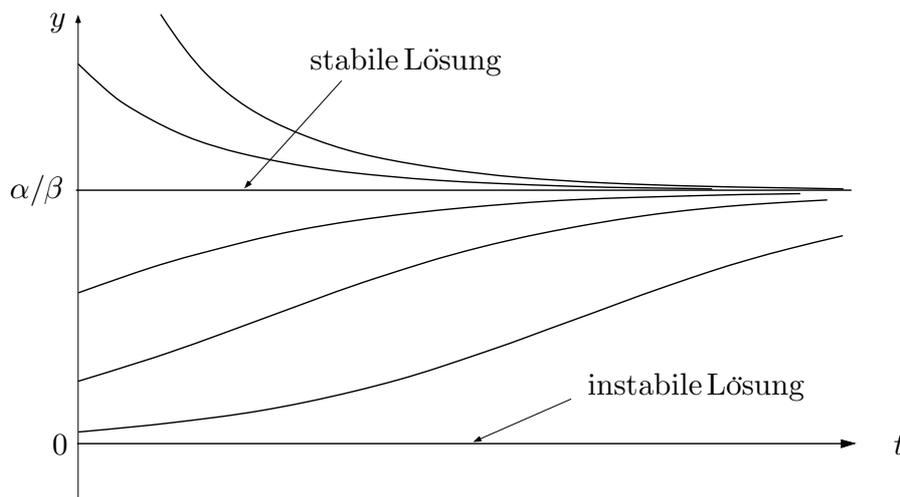


Fig. 4.6.12

Gelegentlich läßt sich eine Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (28)$$

durch geeignete Substitutionen in eine separierbare Differentialgleichung in neuen Variablen überführen. Dies ist insbesondere der Fall bei den sogenannten homogenen Differentialgleichungen (kein Zusammenhang mit *homogenen linearen* Differentialgleichungen). Bei einer **homogenen Differentialgleichung** ist die rechte Seite  $f(\cdot, \cdot)$  in einem Sektor

$$\alpha < \arg(x, y) < \beta$$

der  $(x, y)$ -Ebene definiert und auf jedem von  $O$  ausgehenden Strahl konstant, das heißt: Es gilt

$$\forall (x, y) \in \text{dom}(f), \forall \lambda > 0: \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y). \quad (29)$$

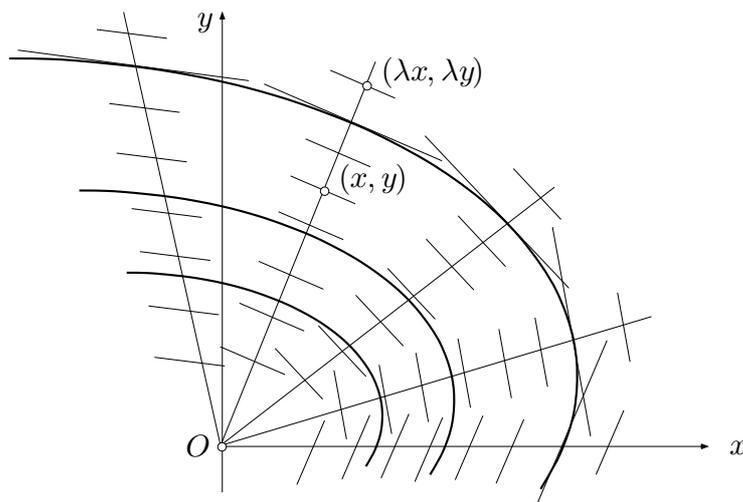


Fig. 4.6.13

Hiernach wird in allen Punkten eines solchen Strahls dieselbe Richtung festgelegt (Fig. 4.6.13), und das Richtungsfeld ist invariant gegenüber Streckung von  $O$  aus. Dasselbe gilt dann von der Schar der Lösungskurven; in anderen Worten: Die einzelnen Lösungskurven einer homogenen Differentialgleichung sind zueinander ähnlich und durch Streckung von  $O$  aus aufeinander bezogen. Typisches Beispiel ist die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0).$$

Ihre Lösungen sind konzentrische Kreisbögen um  $O$ , siehe das Beispiel 3.5.③.

Für die formale Behandlung einer homogenen Differentialgleichung (28) nehmen wir an, daß  $\text{dom}(f)$  ganz in der rechten Halbebene liegt. Wir können dann die neue unbekannte Funktion

$$u(x) := \frac{y(x)}{x}$$

einführen. Damit wird

$$y(x) = u(x) \cdot x, \quad \text{d.h.} \quad y = u \cdot x \quad (30)$$

und folglich

$$y' = u' \cdot x + u,$$

so daß wir die Variablen  $y$  und  $y'$  aus (28) eliminieren können. Zunächst ergibt sich für  $u$  die Differentialgleichung

$$u'x + u = f(x, ux). \quad (31)$$

Aufgrund der Homogenitätseigenschaft (29) ist aber

$$f(x, ux) = f(1, u) \quad \forall x > 0.$$

Wir dürfen daher die rechte Seite von (31) durch  $f(1, u)$  ersetzen, so daß für  $u(\cdot)$  die separierbare Differentialgleichung

$$u' = \frac{f(1, u) - u}{x}$$

resultiert. Wir können diese Differentialgleichung integrieren und erhalten schließlich die Lösungen  $y(\cdot)$  der ursprünglichen Gleichung (28) mit Hilfe von (30).

Merke: Das Wesentliche ist, eine gegebene homogene Gleichung als solche zu erkennen. Der Rest ist einfach.

⑧ Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0).$$

Setzen wir  $y := ux$ , so folgt

$$u'x + u = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x} = u + \sqrt{1 + u^2} \quad (= f(1, u)!),$$

so daß wir für  $u$  die separierbare Differentialgleichung

$$u' x = \sqrt{1 + u^2}$$

erhalten. Wir schreiben  $\frac{du}{dx}$  anstelle von  $u'$  und separieren; es ergibt sich

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} .$$

Unbestimmte Integration liefert

$$\log(u + \sqrt{1 + u^2}) = \log x + C .$$

Wir setzen zur Abkürzung  $e^C =: p (> 0)$  und erhalten weiter

$$u + \sqrt{1 + u^2} = px .$$

Hieraus folgt nacheinander

$$(px - u)^2 = 1 + u^2 , \quad 2pxu = p^2x^2 - 1$$

und somit wegen  $u x = y$ :

$$y(x) = \frac{1}{2p}(p^2x^2 - 1) \quad (x > 0) .$$

Die Lösungskurven sind also Parabelbögen (Fig. 4.6.14). Man rechnet nach, daß die betreffenden Parabeln konfokal sind mit gemeinsamem Brennpunkt im Ursprung. Dieser geometrische Sachverhalt belegt, daß die Lösungskurven durch Streckung am Ursprung auseinander hervorgehen, wie oben allgemein ausgeführt.  $\circ$

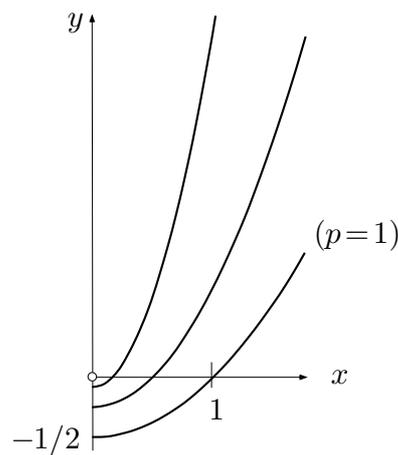


Fig. 4.6.14

⑨ Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + qy}{qx - y}, \quad q \in \mathbb{R} \text{ fest}, \quad (32)$$

ist an sich homogen und kann nach der angegebenen Methode behandelt werden. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$u'x + u = \frac{1 + qu}{q - u}$$

für die neue unbekannte Funktion  $u(x) := y(x)/x$ .

Um das Umrechnen einer Differentialgleichung auf neue Variablen zu üben, wollen wir hier jedoch anders vorgehen und Polarkoordinaten einführen (was aufgrund der Invarianzeigenschaften einer homogenen Differentialgleichung ohnehin naheliegt). Dabei soll der Polarwinkel  $\phi$  die neue unabhängige Variable darstellen, und die Lösungskurven werden in der Form

$$\gamma: \phi \mapsto (\phi, r(\phi))$$

gesucht; dabei ist  $r(\phi)$  die neue unbekannte Funktion.

Wir müssen also in der Differentialgleichung (32) die Variablen  $x$ ,  $y$  und  $y'$  durch  $\phi$ ,  $r$  und  $\dot{r}$  ausdrücken, wobei der Punkt die Ableitung nach  $\phi$  bezeichnet. Die Buchstaben  $x$ ,  $y$  und  $y'$  dürfen in der resultierenden Gleichung nicht mehr vorkommen!

Natürlich ist

$$x(\phi) = r(\phi) \cos \phi, \quad y(\phi) = r(\phi) \sin \phi$$

und somit  $\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi$ , ähnlich für  $\dot{y}$ . Der Figur 4.6.15 entnimmt man jetzt

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi}{\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi}.$$

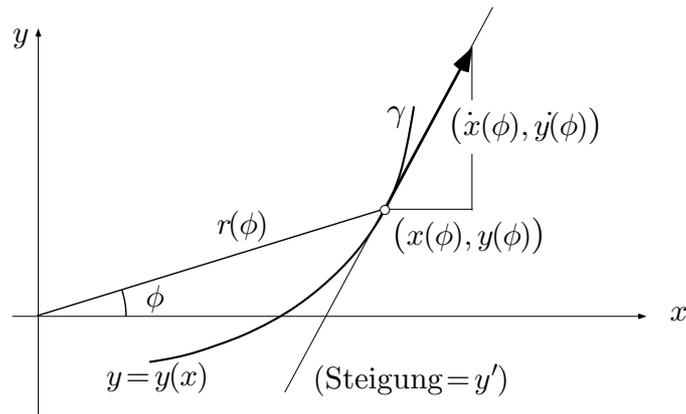


Fig. 4.6.15

Die für  $x$ ,  $y$  und  $y'$  erhaltenen Ausdrücke sind nun in die Differentialgleichung (32) einzusetzen. Es ergibt sich

$$\frac{\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi}{\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi} = \frac{qr \sin \phi + r \cos \phi}{qr \cos \phi - r \sin \phi}$$

und somit nach Vereinfachung

$$\dot{r} = qr .$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung für die unbekannte Funktion  $\phi \mapsto r(\phi)$ ; sie besitzt die Lösungen

$$r(\phi) = C e^{q\phi} .$$

Die gesuchten Lösungskurven sind also logarithmische Spiralen bzw. im Fall  $q = 0$  Kreise. ○

## Aufgaben

1. (M) Bestimme die durch den Punkt  $(0, -1)$  gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y \tan x + 4 \sin x .$$

2. Eine gewisse biologische Population würde mit der Zerfallskonstanten  $\gamma > 0$  aussterben, wenn nicht infolge zufälliger Zusammenstöße der Individuen auf geheimnisvolle Weise neue Individuen entstünden. Man übersetze diese Vorstellung in eine Differentialgleichung für die Populationsgröße  $y$ ; dabei ist noch ein Parameter  $\delta$  einzuführen, der den Erfolg der Zusammenstöße mißt. Man diskutiere die Lösungen dieser Differentialgleichung für verschiedene Anfangswerte  $y(0) =: y_0$ . Nach welcher Zeit  $T$  kommt es allenfalls zur Katastrophe?
3. Die komplexwertige Funktion  $z(\cdot)$  der reellen Variablen  $t$  ("Zeit") ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = iz^2, \quad z(0) = 1 .$$

- (a) Bestimme  $z(\cdot)$ .
- (b) (M) Zeichne die Kurve  $\gamma: t \mapsto z(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) in der komplexen Ebene und beschreibe sie in Worten.
4. Ein Punkt bewegt sich auf dem Einheitskreis der  $(x, y)$ -Ebene, und zwar so, daß seine Absolutgeschwindigkeit jederzeit gleich seinem momentanen

Abstand von der Geraden  $x = 2$  ist. Wie lange braucht er für einen Umlauf? (*Hinweis:* Argumentiere über die Funktion  $t \mapsto \phi(t)$ .)

5. Präsentiere implizit oder explizit die durch den Ursprung gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y) + \sin(x - y) .$$

(*Hinweis:* Die Differentialgleichung ist separierbar.)

6. Ein Marienkäfer, der pro Sekunde 1 cm zurücklegt, befindet sich zur Zeit  $t := 0$  am linken (befestigten) Ende eines Gummiseils von zunächst 1 m Länge und macht sich auf den Weg zum rechten Ende. Gleichzeitig wird aber das Seil von rechts her pro Sekunde um 1 m in die Länge gezogen. Wird der Käfer sein Ziel trotzdem erreichen, und wenn ja: Wie lange braucht er dazu?

7. Die Differentialgleichung

$$\dot{y} = \frac{y^3}{4} - y \quad (=: p(y))$$

ist  $t$ -frei. Das zugehörige Richtungsfeld in der  $(t, y)$ -Ebene ist somit längs Parallelen zur  $t$ -Achse konstant. Trage die vorgeschriebene Richtung in möglichst vielen Punkten der  $y$ -Achse ein und skizziere aufgrund der erhaltenen Figur das globale Portrait der Lösungskurven. Gewisse Lösungen gehen mit wachsendem  $t$  gegen  $\infty$ . Brauchen sie dafür nur endliche Zeit oder unendlich lang? Die Antwort ist zu begründen. — Die Werte von  $p(\cdot)$  können der Fig. 4.6.16 entnommen werden.

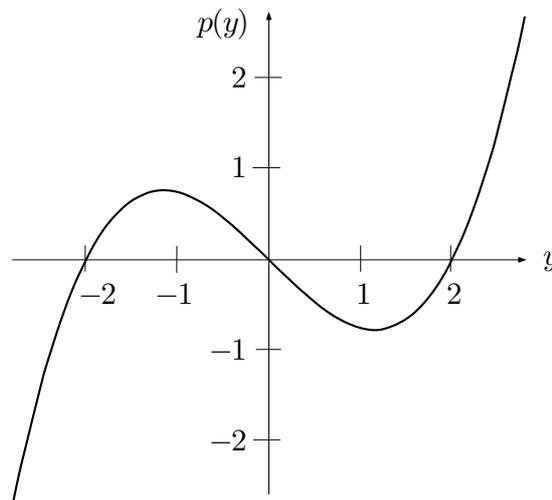


Fig. 4.6.16

8. Eine Kugel wird mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  senkrecht nach oben geschossen. Sie unterliegt der konstanten Erdbeschleunigung  $g$  sowie dem Luftwiderstand, dessen Bremswirkung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen wird (Proportionalitätsfaktor  $c > 0$ ). Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren Kulminationspunkt? (*Hinweis:* Es genügt, die Funktion  $t \mapsto v(t)$  zu analysieren.)
9. Für eine “implizite Differentialgleichung”  $F(t, y, y') = 0$  gilt der Existenz- und Eindeigkeitssatz für Anfangswertprobleme nicht ohne weiteres. Zwei Lösungen  $y_1(t), y_2(t)$  eines Anfangswertproblems

$$F(t, y, y') = 0, \quad y(t_0) = y_0$$

werden als verschieden betrachtet, wenn sie in jedem noch so kleinen Intervall  $]t_0 - h, t_0 + h[$  voneinander verschieden sind. — Wieviele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung  $(y')^4 - y^2 = 0$  gibt es

(a) für den Anfangspunkt  $(1, 0)$ ,      (b) für den Anfangspunkt  $(0, 1)$ ?

10. (Vgl. Aufgabe 2) Eine gewisse biologische Population würde mit  $t \rightarrow \infty$  exponentiell aussterben, wenn nicht infolge zufälliger Zusammenstöße von je zwei Individuen auf geheimnisvolle Weise neue Individuen entstünden. “Dreierstöße” führen allerdings zu außerordentlichen Todesfällen. In geeigneten Einheiten wird die Populationsgröße  $y(\cdot)$  durch folgende Differentialgleichung modelliert:

$$\dot{y} = -3y + 4y^2 - y^3.$$

Bestimme die stabilen Populationszustände. (*Hinweis:* Die allgemeine Lösung der angegebenen Differentialgleichung ist nicht verlangt.)

# 5

## Mehrdimensionale Differentialrechnung

### 5.1 Grundbegriffe

Zur Erinnerung: Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion einer reellen Variablen und  $t_0 \in \text{dom}(f)$  ein fest gewählter Punkt, so läßt sich für beliebiges  $t \neq t_0$  der Differenzenquotient

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}$$

bilden, da der Zuwachs der unabhängigen Variablen in den Nenner gesetzt werden kann. Sofern der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} =: A$$

existiert, heißt  $f$  an der Stelle  $t_0$  differenzierbar, und der Grenzwert  $A =: f'(t_0)$  ist die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $t_0$ . Die Zahl  $A$  beschreibt das Änderungsverhalten von  $f$ , wenn man sich von der Stelle  $t_0$  ein wenig entfernt; nach 3.1.(3) gilt nämlich

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0). \quad (1)$$

Hiernach ist der Zuwachs des Funktionswertes in erster Näherung eine lineare Funktion der Zuwachsvariablen  $h$ , und  $A = f'(t_0)$  ist der maßgebende Proportionalitätsfaktor — wir haben darauf schon am Anfang des dritten Kapitels hingewiesen. Sinngemäß dasselbe gilt für eine komplex- oder vektorwertige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ ; die Ableitung  $f'(t_0)$  ist dann eine komplexe Zahl bzw. ein Vektor.

Die Erfahrung hat uns gezeigt, daß diese Situation bei den meisten vernünftigen Funktionen in den meisten Punkten  $t_0$  ihres Definitionsbereichs vorliegt — notable Ausnahme ist natürlich die Betragsfunktion, die im Ursprung nicht differenzierbar ist. Das ist gar nicht selbstverständlich. Die Welt könnte ja auch so eingerichtet sein, daß man im allgemeinen nur

$$|f(t_0 + h) - f(t_0)| \leq C\sqrt{|h|}$$

beweisen kann. Die Analysis sähe dann ganz anders aus.

Was bleibt von alledem übrig, wenn wir nun zu Funktionen von *mehreren* reellen Variablen übergehen? Gemeint sind Funktionen

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \rightarrow \mathbb{R}^m),$$

die in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert sind, wobei wir in erster Linie an die Fälle  $n := 2$  und  $n := 3$  denken. Wir wollen dabei folgendes verabreden: Die betrachteten Funktionen sollen immer auf einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  definiert sein, so daß man von jedem Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(f)$  aus in jeder Richtung ein Stückchen weit gehen kann, ohne  $\text{dom}(f)$  zu verlassen (Fig. 5.1.1).

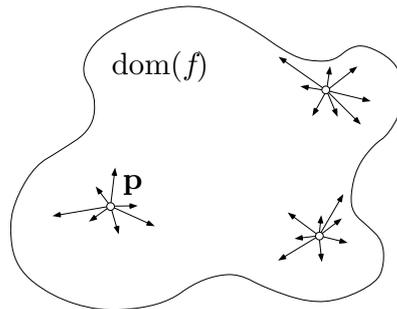


Fig. 5.1.1

In vielen Anwendungen, etwa bei Extremalaufgaben oder in der Integralrechnung, interessiert eine Funktion  $f$  allerdings ausgerechnet auf einer *kompakten* Menge, zum Beispiel auf dem Quadrat  $Q := [0, 1]^2$  (Fig. 5.1.2). Wir nehmen dann stillschweigend an, daß  $f$  auf einer etwas größeren offenen Menge  $\Omega$  definiert ist.

### \* Komplex-eindimensionale Differentialrechnung

Eine Besonderheit, die nicht so recht in den Rahmen dieses Kapitels paßt, ist die “komplex-eindimensionale Differentialrechnung”. Wir gehen hier nur kurz darauf ein; alles Weitere findet man in Büchern über komplexe Analysis (s.u.).

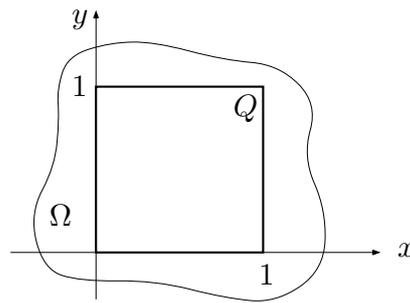


Fig. 5.1.2

Wird die  $(x, y)$ -Ebene als komplexe  $z$ -Ebene,  $z = x + iy$ , und die  $(u, v)$ -Ebene als komplexe  $w$ -Ebene,  $w = u + iv$ , aufgefaßt, so erscheint eine Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} u := u(x, y) \\ v := v(x, y) \end{cases}$$

als komplexwertige Funktion *einer* komplexen Variablen  $z$ :

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto w := f(z) .$$

Da  $\mathbb{C}$  ein Körper ist, können wir immer noch Differenzenquotienten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (\in \mathbb{C})$$

bilden. Dies erlaubt, auch hier den Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: A$$

ins Auge zu fassen, wobei nun die Zuwachsvariable  $h$  über komplexe Werte, das heißt: "aus allen Richtungen kommend", gegen 0 geht (Fig. 5.1.3). Sofern dieser Grenzwert existiert, heißt die Funktion  $f$  an der Stelle  $z_0$  **komplex differenzierbar**. Die komplexe Zahl  $A$  ist die **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $z_0$  und wird mit  $f'(z_0)$  bezeichnet. Die Relation (1) gilt sinngemäß, wobei jetzt die Zuwachsvariable  $h$  natürlich komplex ist.

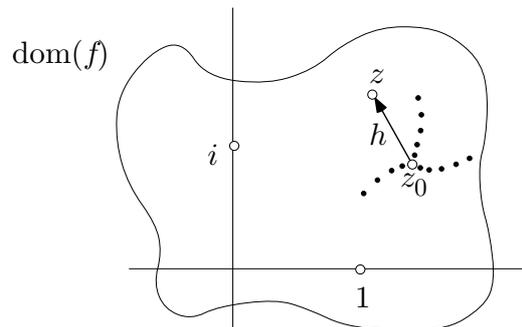


Fig. 5.1.3

Ist  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in jedem Punkt  $z_0 \in \text{dom}(f)$  komplex differenzierbar, so nennt man  $f$  eine **analytische** oder **holomorphe** Funktion. Fürs komplexe Differenzieren gelten ebenfalls die in Satz (3.1) zusammengestellten Rechenregeln. Zu deren Herleitung wurden nämlich nur die Körpereigenschaften von  $\mathbb{R}$  und die Stetigkeit der Rechenoperationen benutzt, und diese Dinge sind in  $\mathbb{C}$  ebenfalls vorhanden. Im Komplexen tritt aber folgendes Wunder ein: Eine analytische Funktion ist automatisch beliebig oft differenzierbar und läßt sich an jeder Stelle  $z_0 \in \text{dom}(f)$  in eine gegen  $f$  konvergente Taylor-Reihe entwickeln. Das heißt, es gilt für alle hinreichend nahe bei  $z_0$  gelegenen Punkte  $z$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k .$$

Die Eigenschaften der analytischen Funktionen werden ausführlich behandelt in der sogenannten "Komplexen Analysis", die nach ziemlich übereinstimmender Ansicht das schönste Gebiet der niederen Analysis darstellt.

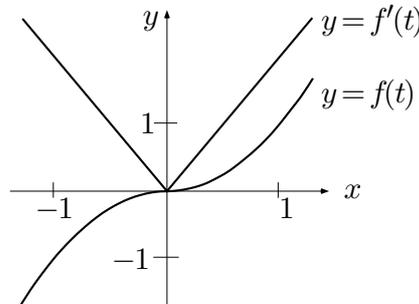


Fig. 5.1.4

① Die *reelle* Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \text{sgn } t \cdot t^2$$

(Fig 5.1.4) besitzt, wie man leicht verifiziert, die Ableitung  $f'(t) = 2|t|$ . Diese Funktion ist also differenzierbar, an der Stelle 0 aber nicht zweimal differenzierbar.

Die *komplexe* Funktion

$$f(z) := \exp z \quad \left( := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)$$

ist in der ganzen  $z$ -Ebene analytisch und besitzt dort die Ableitung  $f' = \exp$ , also  $= f$ . Nach Satz (2.20)(a) gilt nämlich für beliebiges  $z_0 \in \mathbb{C}$ :

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z_0+h} - e^{z_0}}{h} = e^{z_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{z_0} .$$

Betrachten wir hingegen die an sich einfache und “schöne” Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := \bar{z}$$

(Fig. 5.1.5), so erhalten wir zum Zuwachs  $h = |h|e^{i\phi}$  den Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\phi}.$$

Der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} e^{-2i\phi}$  existiert aber nicht, denn  $e^{-2i\phi}$  kann für noch so kleines  $|h|$  beliebige Werte auf dem Einheitskreis annehmen. Die zuletzt betrachtete Funktion  $f$  ist also in *keinem* Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. Die komplexe Differenzierbarkeit ist eben eine sehr starke Forderung an die “Feinstruktur” einer Funktion. Unter anderem impliziert sie die Erhaltung des Drehsinns von “infinitesimalen Kreisen”, womit die Konjugation von vornherein disqualifiziert ist, siehe die Figur.  $\bigcirc$

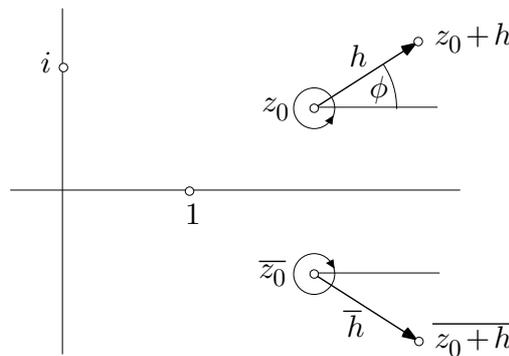


Fig. 5.1.5

## Richtungsableitung und partielle Ableitungen

Für Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  (bzw.  $\curvearrowright \mathbb{R}^m$ ) einer reellen Vektorvariablen  $\mathbf{x}$  können wir definitiv keine Differenzenquotienten mehr bilden:

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{h}}$$

ist nicht definiert. Von dieser Stelle an gibt es zwei Wege, um weiter zu kommen. Wir können sie kurz folgendermaßen charakterisieren:

- (a) Betrachtung von partiellen Ableitungen und Funktionalmatrizen;

- (b) Auffassung der Ableitung als lineare Abbildung von Tangentialräumen (s.u.): Die Relation (1) wird verallgemeinert zu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}); \quad (2)$$

dabei ist nun  $A$  eine lineare Abbildung, die auf die Zuwachsvektoren  $\mathbf{h}$  wirkt.

Entsprechend erscheint die mehrdimensionale Differentialrechnung in zwei verschiedenen Versionen. Diese zwei Versionen stehen in demselben Verhältnis zueinander wie in der linearen Algebra die Matrizen zu den linearen Abbildungen: Eine Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

besitzt in jedem Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$  eine  $(m \times n)$ -Matrix von partiellen Ableitungen, die sogenannte Funktionalmatrix von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ . Diese Matrix ist die Matrix der durch (2) charakterisierten Abbildung  $A$  bezüglich der Standardbasen. — Für Einzelheiten verweisen wir auf Abschnitt 5.4.

Die Behandlung von konkreten Beispielen erfolgt immer auf dem Weg (a). Auch wir werden uns in erster Linie der Sprache der partiellen Ableitungen bedienen. Ein richtiges Verständnis der Theorie ist aber nur möglich, wenn man weiß, daß es auch die andere Auffassung gibt und daß hier ein weiteres Mal die lineare Algebra in der Analysis am Werk ist.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir endlich beginnen. Es seien also  $\Omega$  eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ ,

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

eine reellwertige Funktion (man kann sich vorstellen, daß  $f(\mathbf{x})$  die Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x}$  angibt),  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  ein fest gewählter Punkt und  $\mathbf{e}$  ein im Punkt  $\mathbf{x}_0$  angehefteter Einheitsvektor. Weiter haben wir eine frei im Raum bewegliche positive  $t$ -Achse  $\ell$  zur Verfügung, die wir nun derart ins Bild legen, daß  $t := 0$  auf den Punkt  $\mathbf{x}_0$  und  $t := 1$  auf die Spitze von  $\mathbf{e}$  fallen (Fig. 5.1.6). Dann entspricht allgemein dem Skalenwert  $t$  der Raumpunkt  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ . Wenn wir jetzt die Funktion  $f$  nur noch auf dem Strahl  $\ell$  betrachten, so wird daraus eine Funktion  $\phi(\cdot)$  der einen reellen Variablen  $t$ , nämlich

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}). \quad (3)$$

Da  $\Omega$  offen ist, ist  $\phi(t)$  für alle hinreichend kleinen  $t > 0$  definiert, und  $\phi$  besitzt Differenzenquotienten

$$\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \quad (t > 0).$$

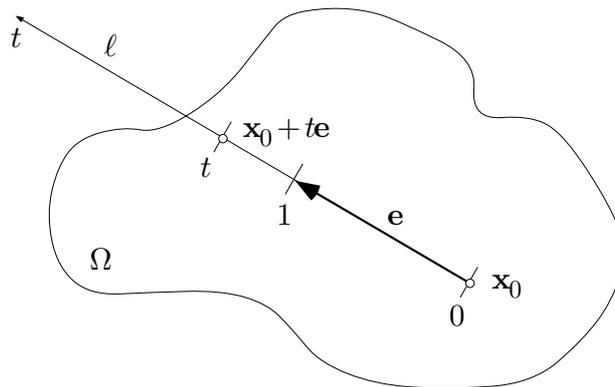


Fig. 5.1.6

Wir können daher den Grenzübergang  $t \rightarrow 0+$  ins Auge fassen, und im Konvergenzfall werden wir die Größe

$$\phi'(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} =: D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}_0)$$

als **Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  in Richtung  $\mathbf{e}$**  bezeichnen.

② Wir betrachten die Funktion

$$r(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}| \quad (= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \text{ falls } n = 3).$$

Ist zunächst  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{0}$  (Fig. 5.1.7), so gilt

$$\frac{r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - r(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{|t\mathbf{e}|}{t} = 1 \quad (t > 0).$$

Die Richtungsableitung erhält damit den Wert

$$D_{\mathbf{e}}r(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0+} 1 = 1,$$

und zwar unabhängig von der gewählten Richtung  $\mathbf{e}$  — in Übereinstimmung mit der Anschauung: Vom Ursprung aus gesehen wächst der Betrag in allen Richtungen gleich schnell. (Der hier vorgefundene Sachverhalt ist singulär. Im Normalfall hängt  $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}_0)$  in bestimmter Weise von  $\mathbf{e}$  ab, s.u.)

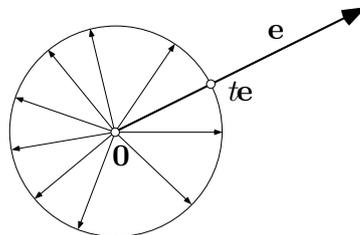


Fig. 5.1.7

Ist aber  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ , so sieht die Sache wesentlich anders aus. Im Sinne von (3) setzen wir

$$\phi(t) := r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$$

(Fig. 5.1.8) und berechnen

$$\phi(t) - \phi(0) = |\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| - |\mathbf{x}_0| = \frac{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}|^2 - |\mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| + |\mathbf{x}_0|} = \frac{2\mathbf{x}_0 \cdot (t\mathbf{e}) + t^2}{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| + |\mathbf{x}_0|}.$$

Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e} + t}{|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}| + |\mathbf{x}_0|} = \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{x}_0|}.$$

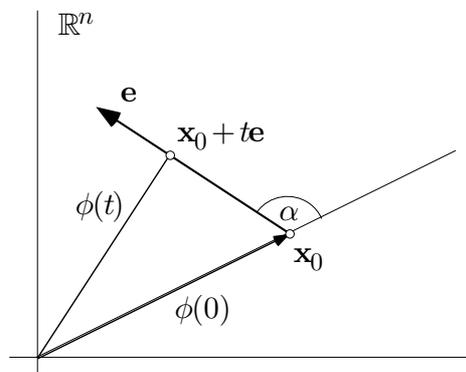


Fig. 5.1.8

Damit haben wir die Richtungsableitung der Betragsfunktion  $r(\cdot)$  an einer Stelle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  in Richtung  $\mathbf{e}$  berechnet zu

$$D_{\mathbf{e}}r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{x}|} = \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}). \quad (4)$$

Der Wert der Richtungsableitung hängt also von der Richtung  $\mathbf{e}$  ab und läßt sich mit Hilfe des Skalarprodukts darstellen. (Wir werden sehen, daß das der Normalfall ist.) Die Zuwachsrates der Betragsfunktion hat den Maximalwert 1, wenn man in Richtung von  $\mathbf{x}$  fortschreitet; sie verschwindet in den Richtungen  $\mathbf{e} \perp \mathbf{x}$ , und sie hat den Minimalwert  $-1$ , wenn man von  $\mathbf{x}$  aus auf den Ursprung zuhält.  $\bigcirc$

Ist eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch einen Ausdruck in kartesischen Koordinaten ( $x, y$  oder  $x, y, z$  oder  $x_1, x_2, x_3$  usw.) gegeben, so lassen sich die Richtungsableitungen in den Koordinatenrichtungen besonders einfach berechnen. Wir betrachten der Einfachheit halber den zweidimensionalen Fall. Es sei also  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0) \in \Omega$  ein fest gewählter Punkt. Die positive  $x$ -Richtung wird durch den Vektor  $\mathbf{e} := (1, 0)$  repräsentiert (Fig. 5.1.9). Zur Berechnung der Richtungsableitung  $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{z}_0) = D_{(1,0)}f(x_0, y_0)$  müssen wir die Differenzenquotienten

$$\frac{f(\mathbf{z}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{z}_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

betrachten. Man nennt den (beidseitigen) Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (5)$$

die **partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$**  und bezeichnet ihn mit

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad f_x(x_0, y_0)$$

oder ähnlich. Werden nummerierte Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  verwendet, so schreiben wir  $f_{,i}$  anstelle von  $f_{x_i}$ .

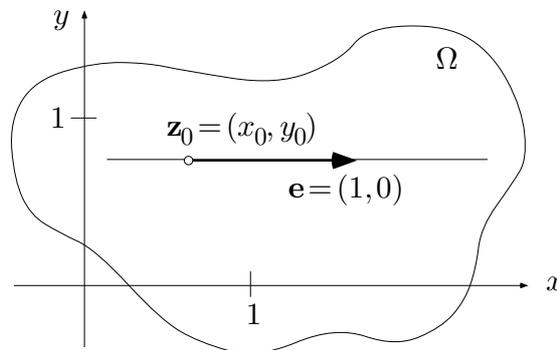


Fig. 5.1.9

*Anmerkung:* In (5) wird anders als bei der Richtungsableitung der beidseitige Grenzwert verlangt. Ist  $f$  partiell nach  $x$  differenzierbar, so gilt

$$D_{(1,0)}f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_{(-1,0)}f = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Die Betragsfunktion (siehe Beispiel ②) ist im Ursprung *nicht* partiell nach  $x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) differenzierbar.

Die Berechnung (5) der partiellen Ableitung von  $f$  nach  $x$  läuft darauf hinaus, die **partielle Funktion**

$$\psi(x) := f(x, y_0)$$

an der Stelle  $x_0$  nach ihrer einzigen Variablen  $x$  abzuleiten. Die in  $f$  noch vorkommenden weiteren Variablen werden dabei als Konstante behandelt.

Die partielle Ableitung  $f_x(x_0, y_0)$  ist zunächst eine Zahl. Durchläuft nun der Punkt  $(x_0, y_0)$  das Gebiet  $\Omega$ , so wird daraus eine Funktion

$$f_x(\cdot, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die ebenfalls als **partielle Ableitung** von  $f$  bezeichnet wird. Für die Berechnung von  $f_x$  stehen die Formeln von Abschnitt 3.1 zur Verfügung. Ist  $f$  gegeben als Ausdruck in den Variablen  $x$  und  $y$ , so erscheint auch  $f_x$  als ein derartiger Ausdruck.

③ Die Funktion  $f(x, y) := x^y$  ist definiert in der rechten Halbebene  $x > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y x^{y-1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{(\log x)y} = \log x e^{(\log x)y} = \log x \cdot x^y. \end{aligned}$$

Für die Betragsfunktion  $r(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  hat man

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}), \quad (6)$$

in Übereinstimmung mit (4), denn es ist  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_i$ . ○

④ Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Argument“funktion”

$$\arg : \dot{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi, \quad (x, y) \mapsto \arg(x, y),$$

wobei  $\dot{\mathbb{R}}^2$  die **punktierte Ebene**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  bezeichnet und  $/2\pi$  darauf hinweist, daß Argumentwerte nur “modulo  $2\pi$ ” festgelegt sind.

In jeder dem Ursprung abgewandten Halbebene  $H$  definiert  $\arg$  unendlich viele tatsächlich reellwertige Funktionen

$$\phi_k(\cdot, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R},$$

die sich voneinander um konstante Funktionen unterscheiden:

$$\phi_k(x, y) - \phi_l(x, y) \equiv 2(k - l)\pi .$$

Somit besitzen alle diese  $\phi_k(\cdot, \cdot)$  dieselben partiellen Ableitungen, die dann mit Fug als partielle Ableitungen von  $\arg$  aufgefaßt werden können. Zur Berechnung dieser Ableitungen kann man irgend ein  $\phi_k(\cdot, \cdot)$  heranziehen, in der Halbebene  $x > 0$  (Fig. 5.1.10) zum Beispiel die Funktion

$$\phi_0(x, y) = \arctan \frac{y}{x} .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} , \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial y} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x} \arg(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} , \quad \frac{\partial}{\partial y} \arg(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

und man kann leicht zeigen, daß diese Formeln in der ganzen punktierten Ebene gelten. ○

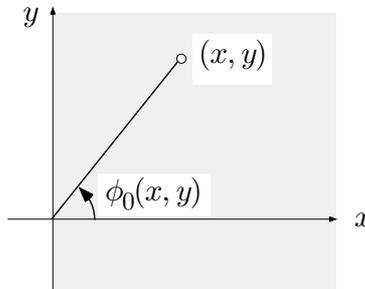


Fig. 5.1.10

Da die partiellen Ableitungen so bequem zu berechnen sind, stellt sich natürlich die Frage, ob wir mit ihrer Hilfe auch die Richtungsableitung für eine beliebige Richtung  $\mathbf{e}$  bekommen können. Bevor wir dem nachgehen, behandeln wir noch folgendes Problem: Was hat es zu bedeuten, wenn etwa die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$  einer Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  identisch verschwindet? Wenn die Ableitung einer Funktion von *einer* Variablen auf einem Intervall identisch verschwindet, so ist die Funktion dort konstant (Satz **(3.8)**). Wir zeigen:

(5.1) Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine  $y$ -einfache offene Menge und gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \equiv 0$$

auf  $\Omega$ , so gibt es eine Funktion  $u(\cdot)$  der einen Variablen  $x$  mit

$$f(x, y) \equiv u(x) \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (7)$$

das heißt: “ $f$  hängt nur von  $x$  ab”.

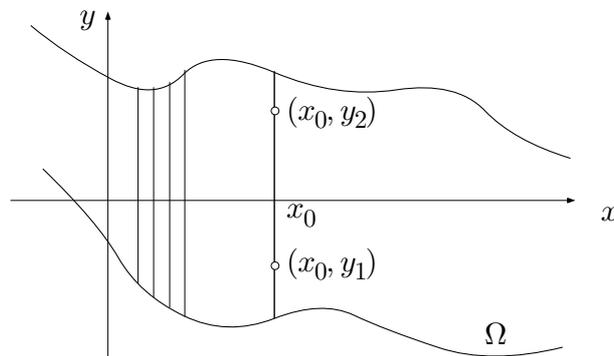


Fig. 5.1.11

□ Wir betrachten für ein festes  $x_0$  die partielle Funktion

$$\psi(y) := f(x_0, y) \quad ((x_0, y) \in \Omega).$$

Nach Voraussetzung über  $\Omega$  ist  $\text{dom}(\psi)$  ein Intervall (Fig. 5.1.11), und nach Voraussetzung über  $f$  ist

$$\psi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \equiv 0.$$

Somit ist  $\psi(\cdot)$  konstant, das heißt: Für zwei beliebige Punkte  $y_1, y_2 \in \text{dom}(\psi)$  gilt

$$f(x_0, y_1) = \psi(y_1) = \psi(y_2) = f(x_0, y_2).$$

Hiernach ist

$$u(x_0) := f(x_0, y) \quad ((x_0, y) \in \Omega)$$

wohldefiniert, und da  $x_0$  beliebig war, gilt (7). □

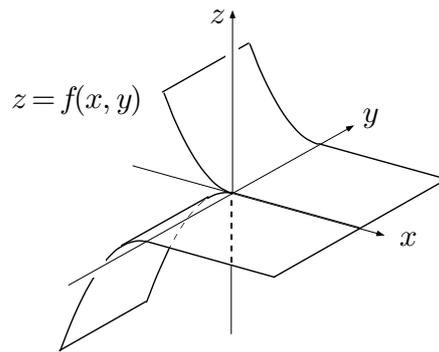


Fig. 5.1.12

Nebenbei: Die Voraussetzung über  $\Omega$  ist tatsächlich notwendig. Es sei etwa

$$\Omega := \{(x, y) \mid x > 0 \vee y \neq 0\}$$

die aufgeschnittene Ebene (Fig. 5.1.12) und

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (x \geq 0), \\ x^2 \operatorname{sgn} y & (x < 0). \end{cases}$$

Dann ist  $\Omega$  zusammenhängend,  $f(\cdot, \cdot)$  besitzt auf  $\Omega$  sogar stetige partielle Ableitungen, und es ist  $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$  auf  $\Omega$ . Trotzdem läßt sich  $f$  nicht in der Form (7) darstellen.

## Lineare Approximation des Wertzuwachses

Besitzt eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetige partielle Ableitungen nach allen Variablen, so heißt  $f$  **stetig differenzierbar** oder kurz: eine  **$C^1$ -Funktion** (wir werden auf diese Bezeichnungsweise zurückkommen). Der folgende Satz ist für alles Weitere fundamental. Er besagt, daß eine  $C^1$ -Funktion von  $n$  Variablen im Kleinen linearisiert werden kann, und liefert damit den Anfang der Taylor-Entwicklung einer derartigen Funktion. Wir formulieren und beweisen den Satz zunächst für Funktionen von zwei Variablen.

**(5.2)** *Es sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion von zwei reellen Variablen  $x, y$  bzw. der Vektorvariablen  $\mathbf{z} := (x, y)$ , und es sei  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  ein fest gewählter Punkt in  $\Omega$ . Dann gilt*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|) \quad (\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0)$$

mit

$$A := f_x(x_0, y_0), \quad B := f_y(x_0, y_0).$$

□ Wir schreiben

$$\Delta f := f(x, y) - f(x_0, y_0) = (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) + (f(x, y) - f(x, y_0))$$

und wenden auf jede der beiden Klammern rechter Hand den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Version **(3.6)**, an. Es folgt

$$\Delta f = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0),$$

wobei  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ ,  $\eta$  zwischen  $y_0$  und  $y$  liegt (Fig. 5.1.13). Setzen wir  $(\xi, y_0) =: \mathbf{z}_1$ ,  $(x, \eta) =: \mathbf{z}_2$ , so folgt

$$\Delta f - A(x - x_0) - B(y - y_0) = (f_x(\mathbf{z}_1) - A)(x - x_0) + (f_y(\mathbf{z}_2) - B)(y - y_0)$$

und somit

$$|\Delta f - A(x - x_0) - B(y - y_0)| \leq (|f_x(\mathbf{z}_1) - A| + |f_y(\mathbf{z}_2) - B|)|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|.$$

Da die Punkte  $\mathbf{z}_1$  und  $\mathbf{z}_2$  mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0$  ebenfalls gegen  $\mathbf{z}_0$  konvergieren und da  $f_x$  und  $f_y$  dort stetig sind, strebt hier die große Klammer rechter Hand mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0$  gegen 0. Es gilt also

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0} \frac{\Delta f - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|} = 0,$$

wie behauptet. □

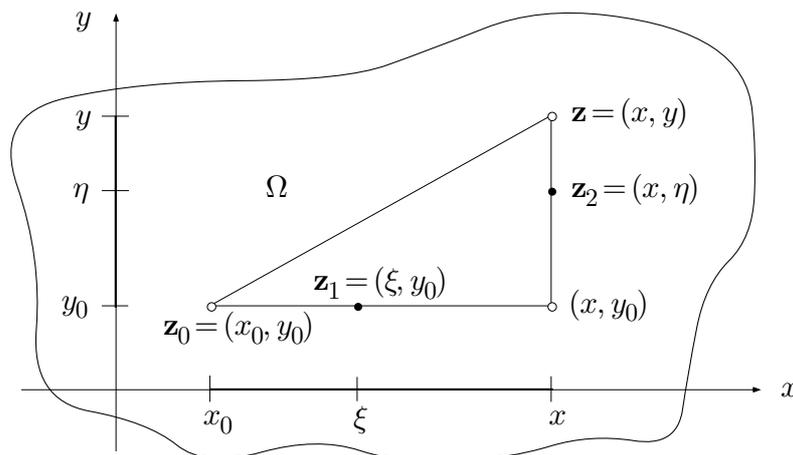


Fig. 5.1.13

Der "praktische Gehalt" dieses Satzes ist die Näherungsformel

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (8)$$

$$(A := f_x(x_0, y_0), \quad B := f_y(x_0, y_0))$$

zur approximativen Berechnung des Funktionswertes  $f(x, y)$ , wenn  $(x, y)$  nahe bei  $(x_0, y_0)$  liegt und die Werte von  $f$ ,  $f_x$  und  $f_y$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  verfügbar sind. Zur Qualität der Approximation das folgende: Der Fehler in der banalen Näherung  $f(x, y) \doteq f(x_0, y_0)$  geht mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_0$  gegen 0, "im Normalfall" so schnell wie  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|$ . Der Fehler in der Näherung (8) geht wesentlich schneller gegen 0 als  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|$ , "im Normalfall" so schnell wie  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|^2$ .

⑤ Es sollen Näherungswerte für die Zahlen

$$\alpha := \sqrt{3.03^2 + 3.95^2}, \quad \beta := \sqrt{2.94^2 + 4.07^2}$$

bestimmt werden. Hierzu führen wir die Funktion

$$r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

ein; sie besitzt nach (6) die partiellen Ableitungen

$$r_x(x, y) = \frac{x}{r}, \quad r_y(x, y) = \frac{y}{r}.$$

Die vorliegenden numerischen Daten legen nahe,  $(x_0, y_0) := (3, 4)$  zu wählen. Dann ist

$$r(x_0, y_0) = 5, \quad r_x(x_0, y_0) = \frac{3}{5}, \quad r_y(x_0, y_0) = \frac{4}{5},$$

und wir erhalten aufgrund von (8):

$$r(x, y) \doteq 5 + 0.6 \cdot (x - 3) + 0.8(y - 4).$$

Damit wird

$$\alpha \doteq 5 + 0.6 \cdot 0.03 + 0.8 \cdot (-0.05) = 4.9780,$$

$$\beta \doteq 5 + 0.6 \cdot (-0.06) + 0.8 \cdot 0.07 = 5.0200.$$

Die wahren Werte sind 4.97829 und 5.02081.

○

## Tangenten und Tangentialebenen

Um eine geometrische Deutung von (8) zu geben, betrachten wir den Graphen von  $f$ . Der Graph

$$\mathcal{G} : \quad z = f(x, y)$$

einer  $C^1$ -Funktion  $f$  von zwei Variablen ist eine glatte Fläche im  $(x, y, z)$ -Raum, die schlicht über  $\text{dom}(f)$  liegt.

An dieser Stelle ist eine allgemeine Bemerkung über Tangenten und Tangentialebenen notwendig: Eine glatte Kurve  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  besitzt in jedem Punkt  $P \in \gamma$  eine Tangente, die wir mit  $T_P\gamma$  bezeichnen. Eine glatte Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  besitzt in jedem Punkt  $P \in S$  eine **Tangentialebene**, die wir mit  $T_PS$  bezeichnen.  $T_PS$  ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert (Fig. 5.1.14): Ist  $\gamma$  irgendeine durch  $P$  gehende Kurve auf der Fläche  $S$ , so liegt die Tangente  $T_P\gamma$  in der Ebene  $T_PS$ . Andersherum:  $T_PS$  wird von den Tangenten an die Flächenkurven durch  $P$  aufgespannt.

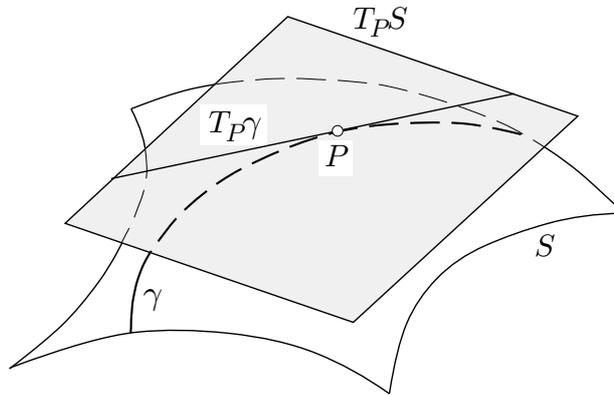


Fig. 5.1.14

Im Augenblick interessiert uns besonders die Umgebung des Punktes

$$P := (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathcal{G} .$$

Die Ebene  $y = y_0$  schneidet aus  $\mathcal{G}$  eine Kurve  $\gamma$  heraus (Fig. 5.1.15), die als Graph der partiellen Funktion

$$x \mapsto z := f(x, y_0) \quad (=:\phi(x))$$

aufgefaßt werden kann. Die Steigung von  $\gamma$  hat im Punkt  $P$  den Wert  $\phi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) =: A$ . Folglich ist die Tangente  $T_P\gamma =: t$  gegeben durch

$$t : \quad \begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) \end{cases} . \quad (9)$$

Analog schneidet die Ebene  $x = x_0$  aus  $\mathcal{G}$  eine Kurve  $\bar{\gamma}$  heraus, die als Graph der partiellen Funktion

$$y \mapsto z := f(x_0, y)$$

aufgefaßt werden kann. Die Steigung von  $\bar{\gamma}$  hat im Punkt  $P$  den Wert  $f_y(x_0, y_0) =: B$ . Folglich ist die Tangente  $T_P\bar{\gamma} =: \bar{t}$  gegeben durch

$$\bar{t}: \quad \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x_0, y_0) + B(y - y_0) \end{cases} .$$

Die beiden Geraden  $t$  und  $\bar{t}$  sind Tangenten an Flächenkurven durch  $P$  und liegen somit in der Tangentialebene  $T_P\mathcal{G} =: \mathcal{T}$ . Und weiter: Da  $t$  und  $\bar{t}$  voneinander verschieden sind, muß  $\mathcal{T}$  die von diesen beiden Geraden aufgespannte Ebene sein.

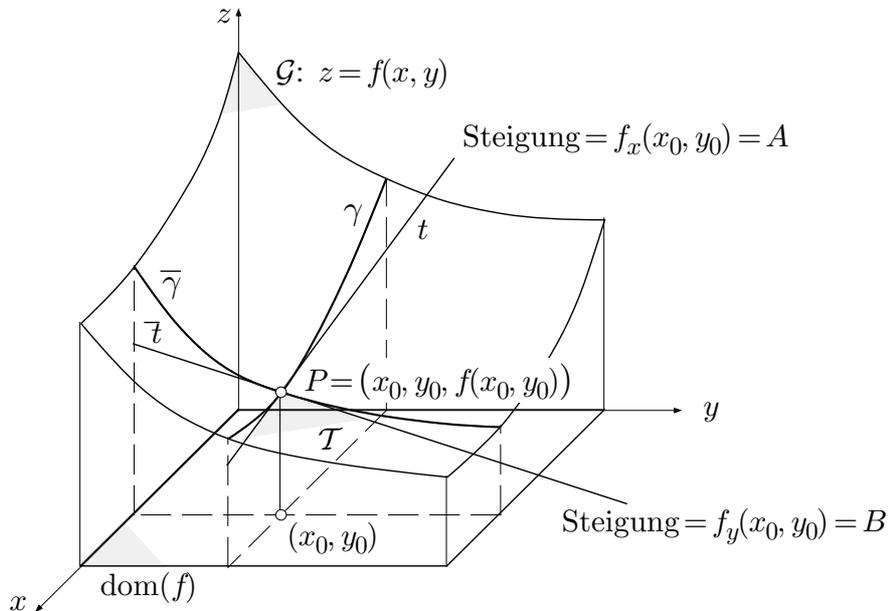


Fig. 5.1.15

Betrachten wir nun den Graphen der rechten Seite von (8)! Er besitzt die in den Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  lineare Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) ,$$

ist also eine Ebene. Schneiden wir diese Ebene mit der Ebene  $y = y_0$ , so resultiert die durch (9) gegebene Gerade  $t$ , und der Schnitt mit der Ebene

$x = x_0$  liefert die Gerade  $\bar{t}$ . Der Graph der rechten Seite von (8) ist also gerade die von  $t$  und  $\bar{t}$  aufgespannte Ebene  $\mathcal{T} = T_P\mathcal{G}$ .

Damit ist folgendes gezeigt: Der Gebrauch der Näherung (8) bedeutet, daß der Graph von  $f$  durch seine Tangentialebene  $\mathcal{T}$  im Punkt  $P$  ersetzt wird.

## Der Gradient

Wir formulieren nun (ohne weiteren Beweis) den Satz (5.2) für Funktionen von  $n$  reellen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  bzw. für Funktionen einer Vektorvariablen  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ :

(5.2') Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion,  $\mathbf{x} \in \Omega$  ein fest gewählter Punkt und  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  ein im Punkt  $\mathbf{x}$  angehefteter variabler Zuwachs. Dann gilt

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + o(|\mathbf{h}|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}) \quad (10)$$

mit Koeffizienten  $A_k := f_{,k}(\mathbf{x})$ .

Der Zuwachs des Funktionswertes ist also in erster Näherung eine lineare Funktion des Zuwachses  $\mathbf{h}$  der unabhängigen Variablen. Die in (10) erscheinende Summe von  $n$  Produkten läßt sich als Skalarprodukt deuten. Hierzu betrachten wir die Koeffizienten  $A_k$  als Koordinaten eines im Punkt  $\mathbf{x}$  angehefteten Vektors  $\nabla f$ , des sogenannten **Gradienten** von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ . Wir definieren also formal:

$$\nabla f(\mathbf{x}) := (f_{,1}(\mathbf{x}), f_{,2}(\mathbf{x}), \dots, f_{,n}(\mathbf{x}))$$

(auch die Bezeichnung **grad**  $f$  ist üblich), wobei wir zur geometrischen Bedeutung dieses Ansatzes gleich kommen werden. Jedenfalls können wir nun die Beziehung (10) folgendermaßen schreiben:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}), \quad (11)$$

und dies liefert die äußerst handliche Näherungsformel

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \doteq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}. \quad (12)$$

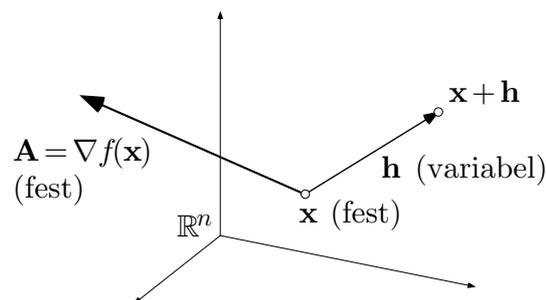


Fig. 5.1.16

Die Version (11) von Satz (5.2') setzt uns instand, die oben offengebliebene Frage zu beantworten, wie sich die Richtungsableitung für eine beliebige Richtung  $\mathbf{e}$  aus den partiellen Ableitungen berechnen läßt. Mit  $\mathbf{h} := t\mathbf{e}$  ( $t > 0$ ) erhalten wir aus (11):

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (t\mathbf{e}) + o(t) \quad (t \rightarrow 0+)$$

und somit

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{t} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} + o(1) \quad (t \rightarrow 0+).$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Richtungsableitung die Formel

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}. \quad (13)$$

⑥ Es sei

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + 2y}{3 - z};$$

gesucht ist die Richtungsableitung an der Stelle  $P := (4, 2, 1)$  in Richtung  $\mathbf{e} := \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ . — Zunächst berechnen wir

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = \left( \frac{2x}{3 - z}, \frac{2}{3 - z}, \frac{x^2 + 2y}{(3 - z)^2} \right)$$

und haben nun den Punkt  $P$  einzusetzen:

$$\nabla f(4, 2, 1) = (4, 1, 5).$$

Damit ergibt sich

$$D_{\mathbf{e}}f(P) = (4, 1, 5) \cdot \frac{1}{3}(2, 1, -2) = -\frac{1}{3}.$$

○

Die Formel (13) erlaubt uns, den vorher rein formal eingeführten Gradienten auch geometrisch zu erklären. Für eine gegebene Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und einen fest gewählten Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  ist  $\nabla f(\mathbf{x}) =: \mathbf{A}$  ein wohlbestimmter, im Punkt  $\mathbf{x}$  angehefteter Vektor. Wir betrachten nun die Richtungsableitung  $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x})$  als eine Funktion  $q(\cdot)$  des Richtungsvektors  $\mathbf{e}$ ; der Definitionsbereich dieser Funktion ist somit die  $(n - 1)$ -dimensionale Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^n$  (Fig. 5.1.17):

$$q: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{e} \mapsto q(\mathbf{e}) := D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}).$$

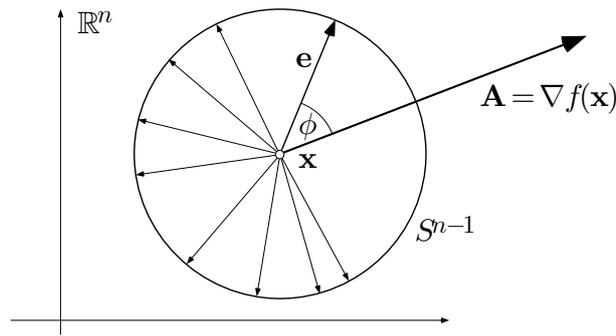


Fig. 5.1.17

Nach (13) ist

$$q(\mathbf{e}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{A}| \cos \phi,$$

wobei  $\phi$  den Winkel zwischen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{e}$  bezeichnet. Die Richtungsableitung  $q(\mathbf{e})$  hat daher den Maximalwert  $|\mathbf{A}|$ , wenn  $\mathbf{e}$  in die Richtung von  $\mathbf{A}$  weist, und  $q(\mathbf{e})$  ist minimal ( $= -|\mathbf{A}|$ ) in der entgegengesetzten Richtung. In anderen Worten: Der Gradient  $\nabla f(\mathbf{x})$  zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ , und sein Betrag ist gleich dieser maximalen Zuwachsrate.

⑦ An der Stelle  $P = (x_0, y_0)$  biegt der Bergweg um: Richtung Südost geht es mit 25% Steigung bergan, Richtung Süd geht es mit 20% Gefälle bergab (Fig. 5.1.18). Der Wanderer im Nebel möchte möglichst rasch zum Gipfel. In welcher Richtung muß er gehen, und wie steil ist es da?

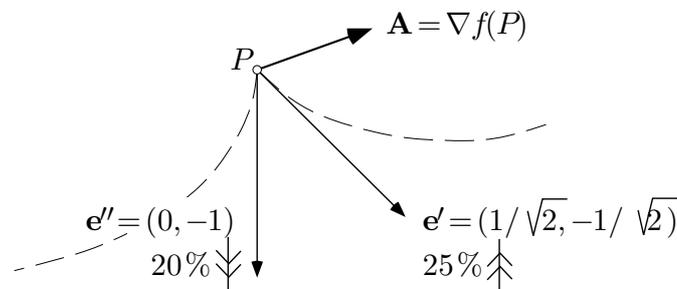


Fig. 5.1.18

Es bezeichne  $f(x, y)$  die Höhe über Meer an der Stelle  $(x, y)$ . Wir müssen versuchen, aus den gegebenen Daten den Gradienten  $\nabla f(x_0, y_0) =: (A_1, A_2)$  zu bestimmen. Die beiden genannten Himmelsrichtungen werden durch die Vektoren  $\mathbf{e}' := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  und  $\mathbf{e}'' := (0, -1)$  repräsentiert. Nach (13) gilt

$$D_{\mathbf{e}'} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'$$

und analog für  $\mathbf{e}''$ . Setzen wir hier die Zahlen ein, so erhalten wir die zwei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 0.25 &= \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}A_2 \\ -0.2 &= \quad \quad - A_2 \end{aligned} \right\}$$

für die Unbekannten  $A_1, A_2$ . Es folgt nacheinander  $A_2 = 0.2$ ,  $A_1 = \sqrt{2} \cdot 0.25 + 0.2 = 0.554$  und somit

$$\nabla f(P) = (0.554, 0.2) .$$

Die einzuschlagende Richtung ergibt sich aus

$$\arg(A_1, A_2) = 19.86^\circ ;$$

in dieser Richtung hat die Steigung (= Höhendifferenz pro Meter Horizontal-distanz) den Wert

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 59\% .$$

○

## Die verallgemeinerte Kettenregel

Zum eisernen Bestand der Differentialrechnung in mehreren Variablen gehört die sogenannte verallgemeinerte Kettenregel. Es geht da um die Ableitung von zusammengesetzten Funktionen in einem mehrdimensionalen Environment. Die Regel drückt letzten Endes aus, daß der Zusammensetzung von Funktionen die Zusammensetzung ihrer (als lineare Abbildungen aufgefaßten) Ableitungen entspricht. Sie ist daher in erster Linie bei theoretischen Überlegungen von Bedeutung und weniger beim Rechnen mit konkret gegebenen Funktionsausdrücken.

Es sei also

$$\mathbf{x}(\cdot) : \mathbb{R} \curvearrowright \Omega , \quad t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

eine vektorwertige Funktion der Variablen  $t$  ("Zeit"), die man etwa als Bahn eines Satelliten interpretieren kann (Fig. 5.1.19). Weiter sei

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

eine reellwertige Funktion; man kann sich dabei vorstellen, daß  $f(\mathbf{x})$  die Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x}$  angibt.

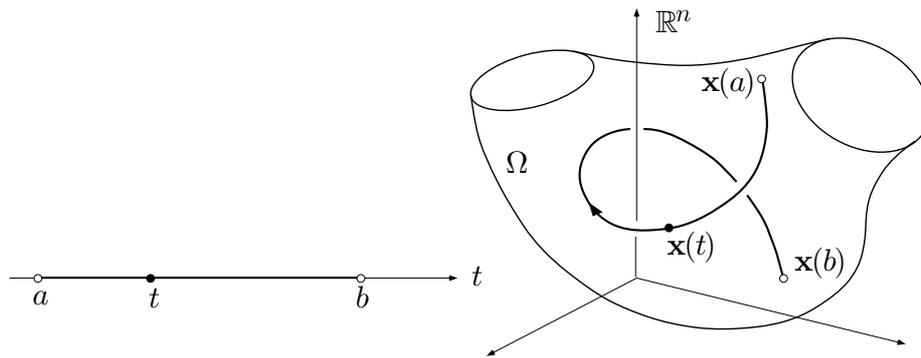


Fig. 5.1.19

Die aus  $\mathbf{x}(\cdot)$  und  $f$  zusammengesetzte Funktion

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}(t)) \quad (14)$$

der Variablen  $t$  hat in unserem Bild folgende Bedeutung: Sie stellt den von einem mitreisenden Beobachter erlebten zeitlichen Temperaturverlauf dar. Sind  $\mathbf{x}$  und  $f$  durch Funktionsterme gegeben, so läßt sich der Funktionsterm  $\phi(t)$  ohne weiteres durch den Vollzug von (14) erhalten und der Ableitungsterm  $\phi'(t)$  nach den bekannten Regeln ausrechnen. Die verallgemeinerte Kettenregel liefert aber eine Darstellung von  $\phi'(t)$ , in der die Entstehungsgeschichte (14) noch deutlich sichtbar ist: Sowohl die partiellen Ableitungen von  $f$  wie die Ableitungen der Komponentenfunktionen von  $\mathbf{x}(\cdot)$  gehen in charakteristischer Weise in diese Darstellung ein. Hier also die **verallgemeinerte Kettenregel**:

**(5.3)** Ist  $\phi: t \mapsto f(\mathbf{x}(t))$  die aus den  $C^1$ -Funktionen  $\mathbf{x}(\cdot): \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^n$  und  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  zusammengesetzte Funktion, so ist auch  $\phi$  eine  $C^1$ -Funktion, und zwar gilt

$$\phi' = f_{.1} x'_1 + f_{.2} x'_2 + \dots + f_{.n} x'_n,$$

oder ausführlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) &= f_{.1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x'_1(t) + \dots + f_{.n}(\mathbf{x}(t)) \cdot x'_n(t) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t). \end{aligned} \quad (15)$$

□ Es sei  $t_0 \in \text{dom}(\mathbf{x}(\cdot))$  ein fest gewählter Zeitpunkt und  $\mathbf{x}(t_0) =: \mathbf{x}_0$ . Weiter sei  $t$  ein variabler Zeitpunkt in der Nähe von  $t_0$ ; es sei etwa  $t > t_0$ . Zum Zeitintervall  $[t_0, t]$  gehört die Ortsveränderung

$$\mathbf{h} := \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 \doteq (t - t_0)\mathbf{x}'(t_0)$$

(Fig. 5.1.20). Aufgrund von (12) können wir nun folgendermaßen argumentieren:

$$\begin{aligned}\phi(t) - \phi(t_0) &= f(\mathbf{x}(t)) - f(\mathbf{x}(t_0)) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) \\ &\doteq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} \doteq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) (t - t_0) .\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \doteq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) ,$$

und im Limes  $t \rightarrow t_0$  ergibt sich eben

$$\phi'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = \sum_{k=1}^n f_{,k}(\mathbf{x}_0) \cdot x'_k(t_0) ,$$

was zu beweisen war. ┘

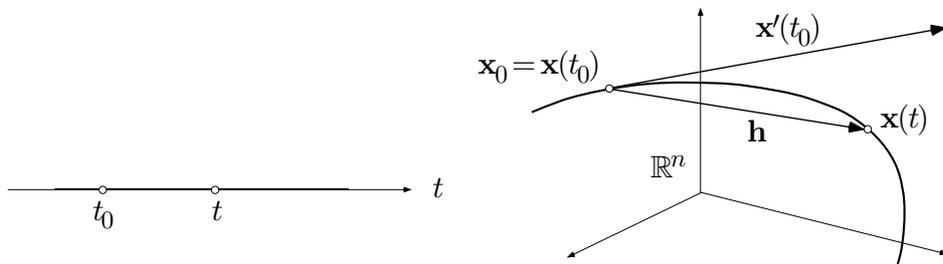


Fig. 5.1.20

⑧ Um eine ganz banale Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel zu geben, betrachten wir das Produkt

$$\phi(t) := u(t) \cdot v(t)$$

der beiden reellwertigen Funktionen  $u(\cdot)$  und  $v(\cdot)$  als Zusammensetzung der vektorwertigen Funktion

$$\mathbf{w}(\cdot) : t \mapsto \mathbf{w}(t) := (u(t), v(t))$$

mit der Funktion

$$f(u, v) := uv$$

von zwei Variablen: Es ist  $\phi(t) \equiv f(\mathbf{w}(t))$ . Wegen

$$f_u(u, v) = v, \quad f_v(u, v) = u$$

folgt

$$\phi'(t) = f_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + f_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t) = v(t)u'(t) + u(t)v'(t) ,$$

wie erwartet. ○

## Differentiation unter dem Integralzeichen

Eine weitere, ebenfalls nichtgeometrische Anwendung von Satz (5.3) ist die sogenannte Leibnizsche Regel über die Ableitung eines Integrals nach einem Parameter. Es sei zunächst  $B \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Bereich und

$$f(\cdot, t) : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t)$$

eine mit der reellen Hilfsvariablen  $t$  parametrisierte Schar von Funktionen der räumlichen Variablen  $\mathbf{x}$ . Das Integral dieser Funktionen über den Bereich  $B$  wird dann von  $t$  abhängen; das heißt: Es liegt eine Funktion

$$\Phi(t) := \int_B f(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x})$$

vor. Beispiel: Bezeichnet  $f(\mathbf{x}, t)$  die elektrische Ladungsdichte an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$ , so stellt  $\Phi(t)$  die zur Zeit  $t$  in dem Bereich  $B$  befindliche Gesamtladung dar.

Die **Leibnizsche Regel** besagt, daß man zur Berechnung der Ableitung  $\Phi'(t)$  unter dem Integralzeichen partiell nach  $t$  differenzieren darf:

(5.4) *Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen gilt*

$$\frac{d}{dt} \int_B f(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) = \int_B f_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}).$$

□ Wir halten einen Punkt  $t_0 \in \text{dom}(\Phi)$  fest. Dann gilt für beliebige  $t$  in der Nähe von  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(t_0) &= \int_B f(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) - \int_B f(\mathbf{x}, t_0) d\mu(\mathbf{x}) \\ &= \int_B (f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t_0)) d\mu(\mathbf{x}) \doteq \int_B f_t(\mathbf{x}, t_0) (t - t_0) d\mu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

und somit

$$\Phi'(t_0) \doteq \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} \doteq \int_B f_t(\mathbf{x}, t_0) d\mu(\mathbf{x}).$$

Da hier die Genauigkeit durch geeignete Wahl von  $t \doteq t_0$  beliebig gesteigert werden kann, gilt in Wirklichkeit

$$\Phi'(t_0) = \int_B f_t(\mathbf{x}, t_0) d\mu(\mathbf{x}),$$

wie behauptet. □

⑨ Es soll das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx =: \Phi(\alpha) \quad (\alpha \geq 0)$$

berechnet werden. (Der Integrand strebt für  $x \rightarrow 0+$  gegen 0 und für  $x \rightarrow 1-$  gegen  $\alpha$ .) — Eine Stammfunktion ist nirgends in Sicht. Der Umweg über  $\Phi'$  hilft aber weiter:

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \int_0^1 \frac{\log x \cdot x^\alpha}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha + 1} . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\Phi(\alpha) = \log(\alpha + 1) + C$$

für ein geeignetes  $C$ , und da offensichtlich  $\Phi(0) = 0$  ist, erhalten wir definitiv

$$\Phi(\alpha) = \log(\alpha + 1) .$$

○

Gelegentlich hängt auch der Integrationsbereich  $B$  von dem Parameter ab. Im eindimensionalen Fall geht es dann um Integrale der folgenden Art (siehe die Fig. 5.1.21):

$$\Phi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx .$$

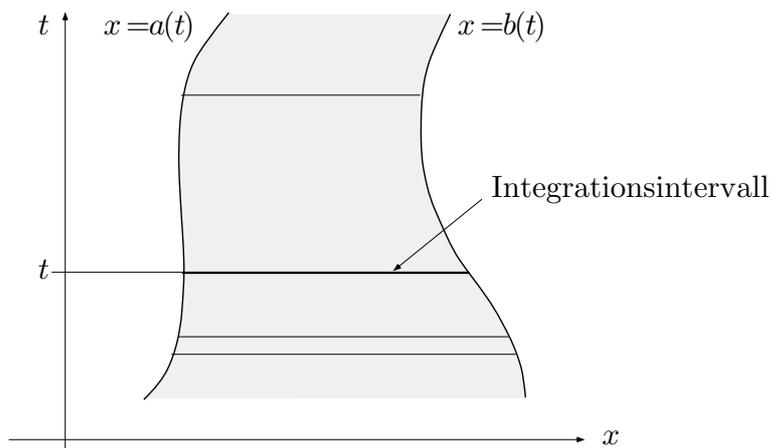


Fig. 5.1.21

Wenn wir die Ableitung dieser neuen Funktion  $\Phi$  berechnen wollen, so müssen wir in geeigneter Weise berücksichtigen, daß die Variable  $t$  an drei verschiedenen Stellen in die Definition von  $\Phi$  eingeht. Hierzu führen wir formal die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{r}(\cdot) : t \mapsto (a(t), b(t), t)$$

ein sowie die reellwertige Funktion

$$F(a, b, c) := \int_a^b f(x, c) dx$$

der drei Variablen  $a, b, c$  bzw. der Vektorvariablen  $\mathbf{r} := (a, b, c)$ . Dann läßt sich  $\Phi$  in der folgenden Weise schreiben:

$$\Phi(t) = F(\mathbf{r}(t)) \quad \text{—}$$

ein klarer Fall für Satz **(5.3)**:

$$\Phi'(t) = F_a \cdot a'(t) + F_b \cdot b'(t) + F_c \cdot 1,$$

wobei die partiellen Ableitungen  $F_a, F_b, F_c$  an der Stelle  $\mathbf{r}(t)$  zu nehmen sind. Mit **(4.4)** und **(5.4)** ergibt sich

$$F_a(a, b, c) = -f(a, c), \quad F_b(a, b, c) = f(b, c), \quad F_c(a, b, c) = \int_a^b f_c(x, c) dx,$$

so daß wir als **Leibnizsche Regel “mit Extras”** die folgende Formel notieren können:

**(5.5)**

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx.$$

Die nächste Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel kommt bestimmt.

## Aufgaben

1. (M) Es sei

$$f(x, y) := \arctan(2x^2 + 3xy - 4y^2) .$$

Berechne  $f(1, 1)$  sowie einen Näherungswert für  $f(1.02, 0.97)$ . Vergleiche mit dem genauen Wert.

2. Es sei

$$F(\alpha) := \int_1^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0) .$$

Man gebe einen integralfreien Ausdruck für  $F'(\alpha)$ .

3. Die Funktion

$$f(x, y, z) := \int_{\cos x}^{\sin y} e^{zt} dt$$

(integriert wird nach  $t$ ; die Variablen  $x, y, z$  werden während der Integration festgehalten!) ist im ganzen  $(x, y, z)$ -Raum erklärt. Berechne  $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$ .

4. Finde und beweise dabei eine koordinatenfreie Identität der Form

$$\nabla(f \cdot g) = \dots .$$

## 5.2 Höhere Ableitungen, Taylorsche Formel

### Funktionen der Klasse $C^r$

Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von  $n$  reellen Variablen ( $x, y$  oder  $x, y, z$  oder  $x_1, \dots, x_n$ ), so sind ihre  $n$  partiellen Ableitungen

$$f_x, f_y \quad \text{bzw.} \quad f_x, f_y, f_z \quad \text{bzw.} \quad f_{.k} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (1)$$

Funktionen derselben Art, allenfalls mit einem etwas kleineren Definitionsbereich  $\Omega' \subset \Omega$ .

① Die Betragsfunktion

$$r(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

besitzt den Definitionsbereich  $\mathbb{R}^n$ . Ihre partiellen Ableitungen

$$r_{.k}(\mathbf{x}) = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r} \quad (1 \leq k \leq n)$$

sind jedoch nur im punktierten Raum  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  erklärt. ○

Die Funktionen (1) besitzen ihrerseits partielle Ableitungen nach allen Variablen, so daß wir zum Beispiel bei einer Funktion von  $x$  und  $y$  auf vier partielle Ableitungen zweiter Ordnung kommen:

$$(f_x)_x =: f_{xx}, \quad (f_x)_y =: f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}.$$

In dieser Weise fortfahrend können wir (jedenfalls formal) partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung bilden, wobei jede derartige Ableitung durch ein bestimmtes "Wort" aus dem Variablenalphabet gekennzeichnet ist. So ist  $f_{xxyxyyx}$  eine gewisse partielle Ableitung siebenter Ordnung von  $f$ . Sind alle partiellen Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $r$  tatsächlich vorhanden und stetig, so nennt man  $f$  eine Funktion der **Klasse**  $C^r$  und schreibt  $f \in C^r$ , wenn nötig  $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$ .

Nun darf man "bekanntlich" bei höheren partiellen Ableitungen die Differenzierungsreihenfolge vertauschen. In erster Linie gilt:

**(5.6)** Es sei  $f$  eine  $C^2$ -Funktion der Variablen  $x$  und  $y$ . Dann gilt  $f_{xy} = f_{yx}$ .

┌ Betrachte einen festen Punkt  $(x_0, y_0) \in \text{dom}(f)$ . Die Größe

$$A(x, y) := f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

(Fig. 5.2.1) ist für alle Punkte  $(x, y)$  in der Nähe von  $(x_0, y_0)$  definiert und steht in dem folgenden Zusammenhang mit den gemischten Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0, y_0) &\doteq \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &\doteq \frac{\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}{y - y_0} = \frac{A(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Analog schließt man für  $f_{yx}(x_0, y_0)$ ; und es folgt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{A(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = f_{yx}(x_0, y_0). \quad \text{┐}$$

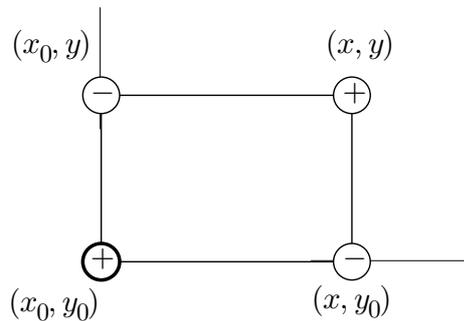


Fig. 5.2.1

Mit vollständiger Induktion ergibt sich hieraus, daß es bei partiellen Ableitungen irgendeiner Ordnung einzig darauf ankommt, wie oft nach jeder auftretenden Variablen differenziert wird. Man schreibt also zum Beispiel

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^3}$$

und meint damit, daß  $f$  zweimal partiell nach  $x$ , einmal nach  $y$  und dreimal nach  $z$  zu differenzieren ist.

② Wir behandeln zwischenhinein das folgende kombinatorische Problem: Wieviele partielle Ableitungen der Ordnung  $\leq N$  muß man bei einer Funktion von  $n$  Variablen veranschlagen? Dieses Problem ist von praktischer Bedeutung, wenn es darum geht, in einem Computer Speicherplätze für die Koeffizienten von  $N$ -Jets (Taylor-Polynomen) zu reservieren.

Jede der genannten partiellen Ableitungen läßt sich wie folgt durch ein Wort der Länge  $N + n$ , bestehend aus  $N$  Einsen und  $n$  Nullen, repräsentieren: Die  $n$  Nullen stehen als Trennstriche zwischen  $n + 1$  Gruppen von Einsen (einige dieser Gruppen können auch leer sein). Die Länge der  $k$ -ten derartigen Gruppe,  $0 \leq k \leq n$ , gibt an, wie oft nach der Variablen  $x_k$  differenziert werden soll. Die Variable  $x_0$  ist eine "Phantomvariable"; die Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $< N$  werden dann automatisch mitgezählt.

Bsp: Das Wort

10110100111

gehört zu  $n = 4$  und  $N = 7$ ; es repräsentiert die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4^3}.$$

Es ist ziemlich klar, daß auf diese Weise die genannte Kollektion von partiellen Ableitungen bijektiv auf die Menge der 0-1-Folgen der Länge  $N + n$  mit genau  $n$  Nullen abgebildet wird. Die Anzahl dieser Folgen beträgt

$$\binom{N + n}{n}.$$

Dies ist auch die gesuchte Anzahl von Ableitungen. ○

### Taylor-Entwicklung bei zwei Variablen

Wir kommen nun zur Taylor-Entwicklung der Funktionen von  $n$  Variablen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall von  $n := 2$  Variablen  $x, y$  beschränken. Es sei also  $\Omega$  eine Umgebung des Punktes  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  und

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine Funktion der Klasse  $C^{N+1}$  für ein passendes  $N$ . Es geht darum, den Funktionswert an der (variablen) Stelle

$$\mathbf{z} := \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z} = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

durch ein Polynom in den Zuwachskordinaten  $\Delta x, \Delta y$  zu approximieren, wobei wir auch hier den Limes  $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$  im Auge haben.

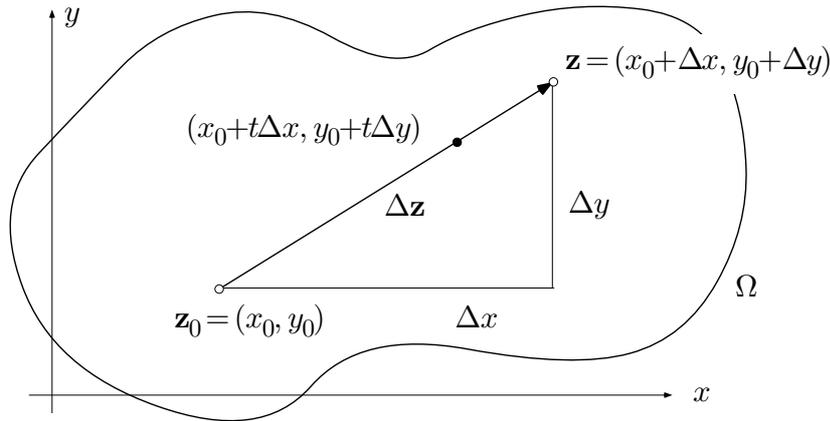


Fig. 5.2.2

Um die Resultate von Abschnitt 3.4 über die Taylor-Entwicklung von Funktionen *einer* Variablen verwenden zu können, halten wir  $\Delta \mathbf{z}$  für den Moment ebenfalls fest und betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

die den Wertverlauf von  $f$  längs der Verbindungsstrecke der Punkte  $\mathbf{z}_0$  und  $\mathbf{z}$  beschreibt (Fig. 5.2.2). Dann ist  $\Phi(0) = f(x_0, y_0)$ , und

$$\Phi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

ist der gesuchte Endwert. Nach Satz (3.11), angewandt mit  $a := 0$  und  $t := 1$  lässt sich dieser Endwert wie folgt darstellen:

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \frac{1}{1!}\Phi'(0) + \frac{1}{2!}\Phi''(0) + \dots + \frac{1}{N!}\Phi^{(N)}(0) + R_N; \quad (2)$$

dabei ist

$$R_N = \frac{1}{(N+1)!}\Phi^{(N+1)}(\tau) \quad (3)$$

für ein geeignetes  $\tau \in ]0, 1[$ .

Für die Berechnung der Ableitungen von  $\Phi$  müssen wir wiederholt die verallgemeinerte Kettenregel (5.3) heranziehen. Die auftretenden partiellen Ableitungen von  $f$  sind nämlich an der Stelle  $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$  zu nehmen und sind somit ebenfalls zusammengesetzte Funktionen von  $t$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= f_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y, \\ \Phi''(t) &= (f_{xx}\Delta x + f_{xy}\Delta y)\Delta x + (f_{yx}\Delta x + f_{yy}\Delta y)\Delta y \\ &= f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'''(t) &= (f_{xxx}\Delta x + f_{xxy}\Delta y)\Delta x^2 + 2(f_{xyx}\Delta x + f_{xyy}\Delta y)\Delta x\Delta y + \dots \\ &= f_{xxx}\Delta x^3 + 3f_{xxy}\Delta x^2\Delta y + \dots\end{aligned}$$

und so weiter. Man erkennt das folgende Bildungsgesetz:

$$\Phi^{(r)}(t) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k} \Big|_{(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)} \Delta x^{r-k} \Delta y^k. \quad (4)$$

Wir wenden uns zunächst dem Hauptteil rechter Hand in (2) zu. Setzen wir für die Ableitungen  $\Phi^{(r)}(0)$  ( $0 \leq r \leq N$ ) die Werte ein, die sich aus (4) ergeben, so entsteht ein Polynom vom Grad  $\leq N$  in den Variablen  $\Delta x, \Delta y$ . Dieses Polynom ist der  **$N$ -Jet** oder das  **$N$ -te Taylorsche Approximationspolynom von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$** ; wir bezeichnen es mit  $j_{(x_0, y_0)}^N f$ . Die Koeffizienten des  $N$ -Jets sind die Werte der partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq N$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , versehen mit gewissen kombinatorischen Faktoren:

$$\begin{aligned}j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0, y_0) + f_x \Delta x + f_y \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{N!} \left( \binom{N}{0} f_{x^N} \Delta x^N + \binom{N}{1} f_{x^{N-1}y} \Delta x^{N-1} \Delta y + \dots \right)\end{aligned}$$

(alle partiellen Ableitungen sind an der Stelle  $(x_0, y_0)$  zu nehmen). — Damit können wir (2) ersetzen durch

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) + R_N.$$

Wir versuchen nun, das Restglied (3) abzuschätzen. Nach Voraussetzung über  $f$  sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $N + 1$  von  $f$  in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  beschränkt; ferner ist

$$|\Delta x| \leq |\Delta \mathbf{z}|, \quad |\Delta y| \leq |\Delta \mathbf{z}|.$$

Betrachten wir daher die Darstellung (4) für  $r := N + 1$ , so können wir folgendes sagen: Es gibt eine von  $\Delta \mathbf{z}$  unabhängige Konstante  $C$  mit

$$|R_N| = \frac{1}{(N+1)!} |\Phi^{(N+1)}(\tau)| \leq C |\Delta \mathbf{z}|^{N+1},$$

denn für jeden der  $N + 2$  Summanden in (4) gilt eine derartige Abschätzung. Hieraus folgt:

$$R_N = o(|\Delta \mathbf{z}|^N) \quad (\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}).$$

Summa summarum haben wir den folgenden Satz über die Taylor-Entwicklung in zwei Variablen bewiesen:

**(5.7)** *Unter den getroffenen Annahmen gilt*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) + o(|\Delta \mathbf{z}|^N) \quad (\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}) .$$

Der frühere Satz **(5.2)** ist hierin als Fall  $N := 1$  enthalten. Satz **(5.7)** läßt sich natürlich zur approximativen Berechnung von Funktionswerten benutzen, indem man den  $o$ -Term vernachlässigt:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \doteq j_{(x_0, y_0)}^N f(\Delta x, \Delta y) .$$

Ist  $j_{(x_0, y_0)}^N f \neq 0$ , so begeht man dabei einen Fehler, der für  $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$  wesentlich kleiner ist als der letzte in  $j_{(x_0, y_0)}^N f$  auftretende Term.

## Analyse von kritischen Punkten

Vor allem aber dient **(5.7)** zur Untersuchung von isolierten kritischen Punkten einer Funktion:

Es sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von  $n$  Variablen. Ein Punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  heißt **kritischer** oder **stationärer Punkt** von  $f$ , wenn  $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  ist, das heißt: wenn an der Stelle  $\mathbf{p}$  alle partiellen Ableitungen erster Ordnung verschwinden. Die kritischen Punkte sind also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} f_{.1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{.n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

von  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten; sie liegen im allgemeinen isoliert. Ist  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ , so heißt  $\mathbf{p}$  ein **regulärer Punkt** von  $f$ .

In einem kritischen Punkt gibt der 1-Jet keinen Aufschluß über das lokale Verhalten der Funktion, denn er ist eine Konstante. Wir müssen daher mindestens den 2-Jet betrachten, der in einem kritischen Punkt  $\mathbf{p}$  einer Funktion von  $n$  Variablen folgendermaßen aussieht:

$$j_{\mathbf{p}}^2 f(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n f_{.ik} \Delta x_i \Delta x_k .$$

Hier erscheint rechter Hand ein homogenes quadratisches Polynom in den Variablen  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ , die sogenannte **Hessesche Form** von  $f$  in dem betreffenden kritischen Punkt:

$$H(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) := \sum_{i,k=1}^n f_{.ik} \Delta x_i \Delta x_k$$

(die partiellen Ableitungen  $f_{.ik}$  sind an der Stelle  $\mathbf{p}$  zu nehmen). Die Analyse derartiger quadratischer Formen gehört zur linearen Algebra. Um einen kleinen Eindruck davon zu vermitteln, behandeln wir den Fall von zwei Variablen.

Es sei also  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Satz (5.7) gilt

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}H(\Delta x, \Delta y) + o(|\Delta \mathbf{z}|^2) \quad (5)$$

( $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ );

dabei ist

$$H(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2 .$$

Der kritische Punkt  $\mathbf{z}_0$  heißt **nichtentartet**, wenn die Determinante von  $H(\cdot, \cdot)$  nicht verschwindet:

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)_{\mathbf{z}_0} \neq 0 .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt der Charakter der Hesseschen Form (positiv definit oder negativ definit oder indefinit, s.u.) vollständigen Aufschluß über das qualitative Verhalten von  $f$  in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$ , und man braucht sich um den  $o$ -Term in (5) nicht zu kümmern, wenn man zum Beispiel wissen will, ob an der Stelle  $\mathbf{z}_0$  ein lokales Maximum von  $f$  vorliegt. Wir wollen das hier nicht beweisen, machen aber Gebrauch davon beim Übergang von der zweiten zur dritten Kolonne der Tabelle 5.2.3.

**(5.8)** *Es sei  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  ein nichtentarteter kritischer Punkt der Funktion  $f$ . Dann trifft genau einer der in der Tabelle 5.2.3 beschriebenen Sachverhalte zu.*

Bedingungen	Hessesche Form	Verhalten von $f$ im Punkt $\mathbf{z}_0$
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$		
(a) $f_{xx} > 0$	positiv definit (Bsp: $\Delta x^2 + \Delta y^2$ )	lokales Minimum
(b) $f_{xx} < 0$	negativ definit (Bsp: $-\Delta x^2 - \Delta y^2$ )	lokales Maximum
$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$	indefinit (Bsp: $\Delta x^2 - \Delta y^2$ )	kein lokales Extremum, "Sattelpunkt"

Tab. 5.2.3

□ Ist  $f_{xx} \neq 0$ , so läßt sich die Hessesche Form folgendermaßen schreiben:

$$H(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{f_{xx}} \left( (f_{xx}\Delta x + f_{xy}\Delta y)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\Delta y^2 \right). \quad (6)$$

Es sei zunächst  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ . Dann ist die eckige Klammer positiv für alle Werte der Variablen  $\Delta x, \Delta y$ , außer für  $\Delta x = \Delta y = 0$ . Ist  $f_{xx} > 0$ , so ist dann auch  $H(\Delta x, \Delta y)$  stets positiv, außer für  $\Delta x = \Delta y = 0$ , und folglich im Ursprung minimal. Ein derartiges  $H(\cdot, \cdot)$  heißt **positiv definit**. Nach dem angeführten Prinzip ist dann die Ausgangsfunktion  $f$  im Punkt  $\mathbf{z}_0$  lokal minimal. Analog schließt man, falls  $f_{xx} < 0$  ist.

Im Fall  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$  enthält die große Klammer in (6) einen Plusterm und einen Minusterm und kann somit beiderlei Vorzeichen annehmen. Dasselbe gilt dann auch für  $H(\cdot, \cdot)$ , das heißt:  $H(\cdot, \cdot)$  ist **indefinit**.

Der Fall  $f_{xx} = 0$  wird ähnlich behandelt. □

Hiernach gibt es bei zwei Variablen genau drei verschiedene Typen von nicht-entarteten kritischen Punkten. Zu diesen drei Typen gehören drei charakteristische Gestalten des Graphen von  $f$  in der Umgebung eines derartigen Punktes, siehe die Figuren 5.2.4–5.

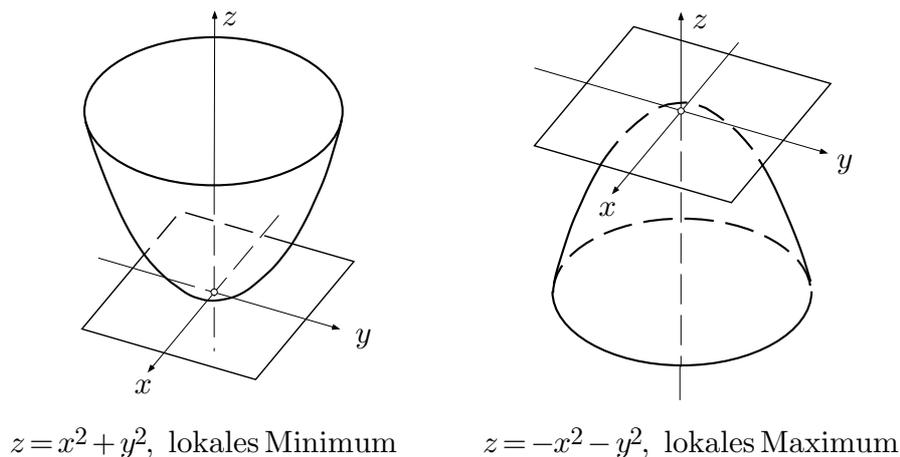


Fig. 5.2.4

③ Die Funktion

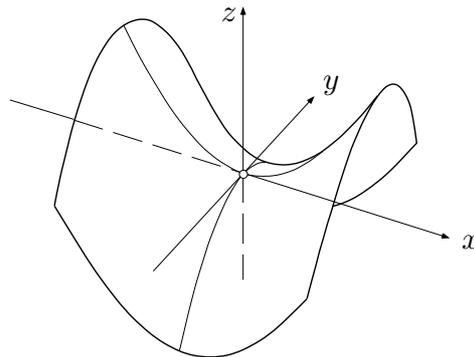
$$f(x, y) := \frac{x^2}{2} + \alpha y^4$$

ist ein Polynom und somit ihre eigene Taylor-Entwicklung im Ursprung. Da lineare Glieder fehlen, ist der Ursprung ein kritischer Punkt, und zwar ist die zugehörige Hessesche Form ablesbar als

$$H(x, y) = x^2.$$

(Wird im Ursprung entwickelt, so benötigt man keine Hilfsvariablen  $\Delta x, \Delta y$ .) Die Determinante dieser Form ist  $1 \cdot 0 - 0^2 = 0$ , somit ist der kritische Punkt entartet, und der 2-Jet  $j_0^2 f$  bzw. unsere Tabelle geben keinen Aufschluß über das qualitative Verhalten von  $f$  in der Umgebung von  $\mathbf{0}$ .

Der Definition von  $f$  entnimmt man, daß dieses Verhalten im wesentlichen vom Vorzeichen von  $\alpha$  abhängt, also erst an  $j_0^4 f$  abgelesen werden kann: Ist  $\alpha \geq 0$ , so ist  $f$  im Ursprung lokal minimal; ist  $\alpha < 0$ , so nimmt  $f$  in jeder Umgebung des Ursprungs beiderlei Vorzeichen an.  $\bigcirc$



$$z = x^2 - y^2, \text{ "Sattelpunkt"}$$

Fig. 5.2.5

④ Es sollen die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) := \cos(x + 2y) + \cos(2x + 3y)$$

bestimmt und diskutiert werden. Hierzu haben wir zuerst das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} (f_x =) \quad -\sin(x + 2y) - 2\sin(2x + 3y) = 0 \\ (f_y =) \quad -2\sin(x + 2y) - 3\sin(2x + 3y) = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

aufzulösen. Es folgt sofort

$$(a) \quad \sin(x + 2y) = 0 \quad \wedge \quad (b) \quad \sin(2x + 3y) = 0 .$$

Mit (a) gilt auch  $\sin(2x + 4y) = 0$ , und dies ist nur dann mit (b) verträglich, wenn  $y$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist. Aus (a) folgt hieraus weiter:  $\sin x = 0$ , das heißt: auch  $x$  ist notwendigerweise ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$ . Als kritische Punkte kommen daher nur die Punkte

$$\mathbf{z}_{kl} := (k\pi, l\pi) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

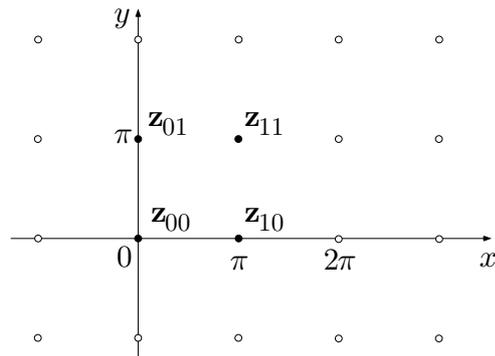


Fig. 5.2.6

in Frage. Man sieht sofort, daß alle diese Punkte die Gleichungen (7) erfüllen; die Menge  $S_{\text{krit}}(f)$  besteht also genau aus den  $\mathbf{z}_{kl}$ .

Da  $f$  in beiden Variablen  $2\pi$ -periodisch ist, braucht man nur die vier kritischen Punkte  $\mathbf{z}_{00} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}_{01}$ ,  $\mathbf{z}_{10}$  und  $\mathbf{z}_{11}$  zu analysieren (Fig. 5.2.6). Wir beschränken uns auf den Ursprung und berechnen zunächst aus (7):

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -\cos(x + 2y) - 4\cos(2x + 3y) , \\ f_{xy}(x, y) &= -2\cos(x + 2y) - 6\cos(2x + 3y) , \\ f_{yy}(x, y) &= -4\cos(x + 2y) - 9\cos(2x + 3y) . \end{aligned}$$

Es folgt

$$f_{xx}(\mathbf{0}) = -5, \quad f_{xy}(\mathbf{0}) = -8, \quad f_{yy}(\mathbf{0}) = -13;$$

somit ist

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)_{\mathbf{0}} = 65 - 64 = 1 > 0, \quad f_{xx}(\mathbf{0}) < 0 .$$

Aufgrund von (5.8) liegt daher im Ursprung ein lokales Maximum vor (was man natürlich auch ohne alle Rechnung einsehen kann: Die Funktion  $f$  hat dort den Maximalwert 2).  $\bigcirc$

## Aufgaben

1. Bestimme die allgemeinste  $C^2$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $f_{xy} \equiv 0$  ist.
2. Eine Firma produziert zwei Güter  $X$  und  $Y$ . Bei  $x$  Einheiten des Gutes  $X$  und  $y$  Einheiten des Gutes  $Y$  ergeben sich Kosten  $C(x, y)$ . Zeige: Sinken die Grenzkosten des Gutes  $X$ , wenn die Produktion von  $Y$  erhöht wird, so sinken die Grenzkosten des Gutes  $Y$ , wenn die Produktion von

$X$  erhöht wird. (*Hinweis:* Die **Grenzkosten** des Gutes  $X$  am Arbeitspunkt  $(x_0, y_0)$  sind gegeben durch die Größe  $\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, y_0)$  und stellen die Produktionskosten einer zusätzlichen Einheit von  $X$  dar.)

3. Es seien  $f$  und  $g$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen einer Variablen, und es sei  $c (> 0)$  eine Konstante. Zeige: Die Funktion

$$u(x, t) := f(x + ct) + g(x - ct)$$

genügt der sogenannten **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

(Die Graphen der Funktionen  $g_t(x) := g(x - ct)$  stellen eine mit Geschwindigkeit  $c$  nach rechts laufende Welle auf der  $x$ -Achse dar.)

4. (M) Bestimme den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) := 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 6y$$

und analysiere das Verhalten von  $f$  in diesem Punkt.

5. Untersuche das Verhalten der Funktion

$$f(x, y) := 2x^4 - 3x^2y + y^2$$

in der Umgebung von  $(0, 0)$ . Liegt im Ursprung ein Extremum vor? (*Hinweis:* Betrachte die Punkte  $(x, y)$  mit  $f(x, y) = 0$ .)

6. (a) (M) Zeige: Die Funktion

$$f(x, y) := \cos(2x + y) - \cos(x - 3y)$$

besitzt im Ursprung einen kritischen Punkt, und zwar einen Sattelpunkt.

- (b) Stelle  $f$  mit Hilfe trigonometrischer Umformung als Produkt dar und diskutiere anhand des erhaltenen Ausdrucks das Vorzeichen von  $f$  in der Umgebung von  $(0, 0)$ . Figur!

7. Es sei  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  ein gegebener Vektor  $\neq \mathbf{0}$ . Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2 + 1} .$$

Überlege erstens, daß  $f$  im  $\mathbb{R}^n$  globale Extremalwerte (Maximum und Minimum) annimmt, und zweitens, wo man z.B. die Maximalstelle suchen müßte. Berechne hierauf die beiden Extremalwerte von  $f$ .

8. Zwei Partikel befinden sich an den Stellen  $x$  und  $y$ ,  $x < y$ , des Intervalls  $[0, 1]$  und sind in diesem Intervall eingeschlossen (siehe die Fig. 5.2.7). Zwischen den Partikeln und den Wänden wirken Abstoßungskräfte wie folgt: Das  $x$ -Partikel wird von der linken Wand abgestoßen mit der Kraft  $1/x$ , das  $y$ -Partikel wird von der rechten Wand abgestoßen mit der Kraft  $1/(1-y)$ , und die beiden Partikel stoßen sich gegenseitig ab mit der Kraft  $2/(y-x)$ . Die potentielle Energie  $V$  des Gesamtsystems ist dann gegeben durch

$$V = -\log x - \log(1-y) - 2\log(y-x) .$$

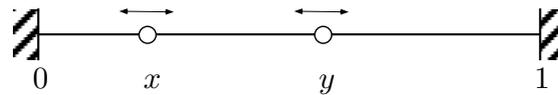


Fig. 5.2.7

- (a) Bestimme die Gleichgewichtslage.  
 (b) Ist das Gleichgewicht stabil? — Die Antwort ist zu begründen.
9. Gegeben ist die Funktion  $f(x, y, z) := \cos(x+y+z)$ . Bestimme das Taylor-Polynom  $j_{(0,0,0)}^3 f(x, y, z)$ . (Hinweis: Setze vorübergehend  $x+y+z =: u$ .)
10. Untersuche, ob die Funktion

$$f(x, y) := x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^3 + y^4$$

im Ursprung ein Extremum besitzt. (Hinweis: Nicht gleich drauflosrechnen!)

11. Betrachte die Funktionenschar

$$f_\alpha(x, y) := \sin x \sin y - \alpha(\cos x + \cos y) ,$$

$\alpha$  ein reeller Parameter. Der Ursprung ist ein kritischer Punkt für sämtliche Funktionen dieser Schar. Für welche  $\alpha$  ist  $f_\alpha$  im Ursprung lokal maximal bzw. minimal bzw. keines von beiden? Für welche  $\alpha$  ist der kritische Punkt entartet? (Diese Sonderfälle nicht weiter diskutieren!)

12. Eine Funktion  $f: t \mapsto y = f(t)$  ist (nach unten) konvex, wenn ihre zweite Ableitung  $f''$  durchwegs  $> 0$  ist. Überlege, wie die Konvexitätsbedingung für eine Funktion  $f: (x, y) \mapsto z = f(x, y)$  von zwei Variablen lautet, und begründe Deine Antwort.

Bsp:  $f(x, y) := x^2 - xy + y^2$  ist konvex,  $g(x, y) := x^2 + 3xy + y^2$  nicht.

## 5.3 Implizite Funktionen

### Problemstellung

Werden die beiden an sich unabhängigen und gleichberechtigten Variablen  $x$  und  $y$  durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

aneinander gebunden, so sind sie nicht mehr unabhängig: Zu einem vorgegebenen  $x$ -Wert  $\xi$  gibt es nur einige wenige, vielleicht gar keine,  $y$ -Werte  $\eta_k$  derart, daß das Paar  $(\xi, \eta_k)$  die Gleichung (1) erfüllt. Wiewohl nun  $x$  und  $y$  in gewisser Weise “voneinander abhängig” sind, definiert aber eine Gleichung (1) in aller Regel keine globale Funktion

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \phi(x),$$

die den Inhalt von (1) vollständig wiedergeben würde.

Aus Erfahrung wissen wir: Die Lösungsmenge  $L$  einer Gleichung (1) ist typischerweise eine Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene, allenfalls mit singulären Punkten. Im vorliegenden Abschnitt geht es darum, diese Erfahrung auf den Begriff zu bringen und zu verallgemeinern. Dabei soll auch klar werden, inwiefern eine derartige Gleichung trotz dem oben Gesagten  $y$  “implizit” als eine Funktion von  $x$  definiert. Wohlgemerkt: Es geht nicht darum, die Gleichung (1) formelmäßig nach der einen oder andern Variablen aufzulösen, sondern um allgemeine Aussagen, die gerade dann von Nutzen sind, wenn eine formelmäßige Auflösung nicht möglich ist.

Es seien also  $\Omega$  ein Gebiet der  $(x, y)$ -Ebene,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion und  $L$  die Lösungsmenge der Gleichung (1):

$$L := \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}.$$

Angenommen, wir hätten — zum Beispiel numerisch, oder durch Erraten — einen Punkt  $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0)$  der Lösungsmenge gefunden. Gibt es vielleicht in der Nähe von  $\mathbf{z}_0$  noch weitere Punkte von  $L$ ? Und wenn ja: Welchen geometrischen Charakter besitzt der in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  liegende Teil von  $L$ ? Hier zunächst ein Beispiel:

① Die Lösungsmenge  $L$  der Gleichung

$$(f(x, y) :=) \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0, \tag{2}$$

ist das sogenannte **Descartessche Blatt**. Der Figur 5.3.1 (siehe auch die Fig. 2.1.5) entnimmt man: Zu einem gegebenen  $x$ -Wert  $\xi$  gibt es einen, zwei oder drei  $y$ -Werte  $\eta_k$  mit

$$f(\xi, \eta_k) = 0.$$

Der Punkt  $\mathbf{z}_0$  ist ein “typischer” Punkt von  $L$ : In einem hinreichend kleinen “Fenster” um  $\mathbf{z}_0$  können wir  $L$  sowohl als Graph einer lokalen Funktion

$$\phi : ]x_0 - h, x_0 + h[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \phi(x)$$

wie auch als Graph einer Funktion  $\psi: y \mapsto x = \psi(y)$  auffassen. Zum Punkt  $\mathbf{z}_1 := (\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$  gibt es hingegen kein derartiges  $x$ -Intervall, da rechts von  $x_1 = \sqrt[3]{4a}$  keine Punkte von  $L$  mehr liegen. In anderen Worten: In der Umgebung von  $\mathbf{z}_1$  läßt sich  $L$  nicht als Graph einer lokalen Funktion  $x \mapsto y = \phi(x)$  auffassen (wohl aber als Graph einer Funktion  $y \mapsto x = \psi(y)$ ).

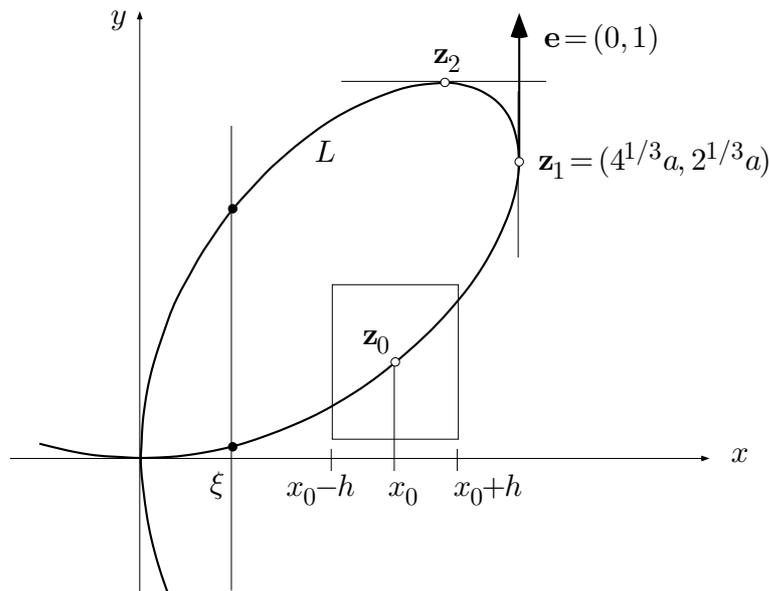


Fig. 5.3.1

Die Koordinaten von  $\mathbf{z}_1$  wurden mit Hilfe der folgenden Überlegung gefunden: Marschiert man von  $\mathbf{z}_1$  aus längs der “Bahn”  $L$ , so bleibt der Funktionswert von  $f$  konstant ( $= 0$ ). Die Anfangsrichtung der Bahn ist vertikal. Dann muß aber die Richtungsableitung  $D_{(0,1)}f(\mathbf{z}_1)$  gleich 0 sein; denn sonst würde der Funktionswert beim Losmarschieren auf  $L$  zum Beispiel zunehmen. Diese Richtungsableitung ist aber nichts anderes als  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\mathbf{z}_1}$ ; somit ist

$$f_y(\mathbf{z}_1) = 0,$$

und der Punkt  $\mathbf{z}_1$  genügt neben (2) zusätzlich der Gleichung

$$(f_y =) \quad 3y^2 - 3ax = 0. \quad (3)$$

Die Koordinaten von  $\mathbf{z}_1$  ergeben sich nun durch Auflösung des Gleichungssystems (2)  $\wedge$  (3). — Im Punkt  $\mathbf{z}_2$  haben wir den analogen Sachverhalt, aber mit vertauschten Rollen von  $x$  und  $y$ : In der Umgebung von  $\mathbf{z}_2$  läßt sich  $L$  nicht als Graph einer Funktion  $y \mapsto x = \psi(y)$  auffassen, und gleichzeitig ist  $f_x(\mathbf{z}_2) = 0$ .

Der Ursprung schließlich ist ein singulärer Punkt von  $L$ . Damit mußte man rechnen, da an dieser Stelle sogar beide partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden:

$$\nabla f(\mathbf{0}) = (f_x, f_y)_{\mathbf{0}} = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax)_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} .$$

○

### Hauptsatz, mit Formel für die Ableitung

Nachdem wir an diesem Beispiel einige der zu erwartenden Phänomene kennengelernt haben, können wir den folgenden **Satz über implizite Funktionen** formulieren (Fig. 5.3.2):

**(5.9)** ( *$\Omega, f$  und  $L$  haben die angegebene Bedeutung.*) Ist  $(x_0, y_0) \in L$  und gilt

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0 ,$$

so gibt es ein Fenster  $Q := I' \times I''$  mit Zentrum  $(x_0, y_0)$  und eine  $C^1$ -Funktion

$$\phi : I' \rightarrow I'' , \quad x \mapsto y = \phi(x) \tag{4}$$

mit  $L \cap Q = \mathcal{G}(\phi)$ ; das heißt: Innerhalb des Fensters  $Q$  stimmt  $L$  mit dem Graphen von  $\phi$  überein. Ferner gilt

$$\phi'(x_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} . \tag{5}$$

Formel (5) erlaubt, die Ableitung der durch die Gleichung (1) implizit definierten lokalen Funktionen  $\phi$  in einzelnen Punkten zu berechnen, ohne die Gleichung formelmäßig aufzulösen.

□ Wir dürfen zur Vereinfachung  $(x_0, y_0) = \mathbf{0}$  annehmen. Es sei also

$$f(\mathbf{0}) = 0 , \quad f_x(\mathbf{0}) =: A , \quad f_y(\mathbf{0}) =: B > 0 .$$

Das Seitenverhältnis  $\rho$  (Höhe:Breite) des Fensters  $Q$  hängt von  $A$  und von  $B$  ab. Wir setzen

$$\rho := \frac{|A| + 1}{B} .$$

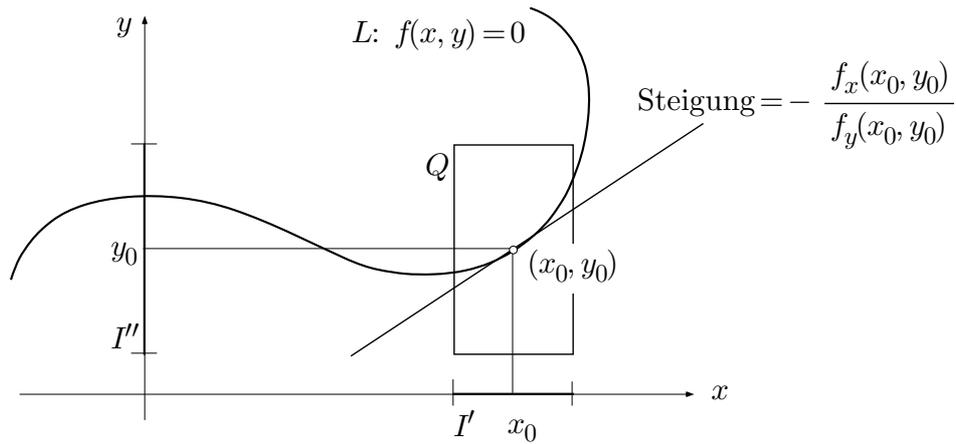


Fig. 5.3.2

Nach Satz (5.2) gilt

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(x, y) - Ax - By|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Es gibt daher ein  $h > 0$ , so daß für alle

$$(x, y) \in Q := [-h, h] \times [-\rho h, \rho h]$$

(Fig. 5.3.3) die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\frac{|f(x, y) - Ax - By|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 + \rho^2}}, \quad (6)$$

$$f_y(x, y) > 0, \quad (7)$$

wobei wir für (7) benutzt haben, daß  $f_y(\mathbf{0}) > 0$  und  $f_y$  stetig ist. Aus der Beziehung (6) folgt weiter

$$\forall (x, y) \in Q: \quad |f(x, y) - Ax - By| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\sqrt{1 + \rho^2}} \leq \frac{h}{2}. \quad (8)$$

Wir betrachten nun für ein festes  $\xi \in I' := [-h, h]$  die partielle Funktion

$$g(y) := f(\xi, y) \quad (-\rho h \leq y \leq \rho h).$$

Wegen (7) ist  $g$  streng monoton wachsend. Weiter gilt wegen (8):

$$|f(\xi, \rho h) - A\xi - B\rho h| \leq \frac{h}{2}$$

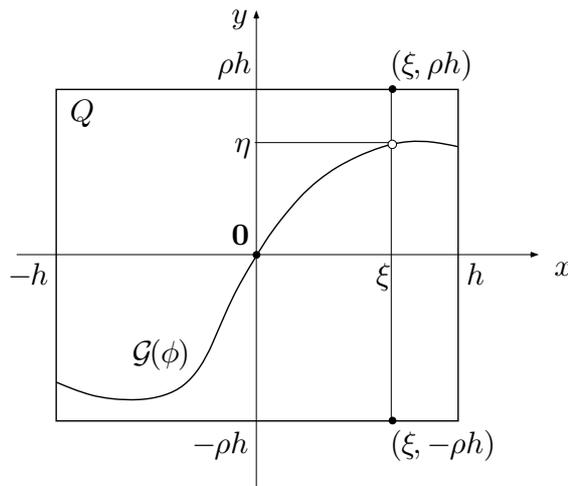


Fig. 5.3.3

und somit

$$g(\rho h) \geq A\xi + B\rho h - \frac{h}{2} \geq -|A|h + (|A| + 1)h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} > 0.$$

Analog zeigt man  $g(-\rho h) < 0$ . Hieraus folgt: Die Funktion  $g$  besitzt im Intervall  $I'' := [-\rho h, \rho h]$  genau eine Nullstelle  $\eta$ , und das heißt: Es gibt genau ein  $\eta \in I''$  mit  $f(\xi, \eta) = 0$ . Wir setzen  $\phi(\xi) := \eta$ .

Da  $\xi \in [-h, h]$  beliebig war, ist die Funktion (4) damit wohldefiniert, und es gilt in der Tat  $L \cap Q = \mathcal{G}(\phi)$ .

Wir zeigen nicht, daß  $\phi$  stetig differenzierbar ist; hingegen beweisen wir die Formel (5). Nach Konstruktion ist

$$\forall x \in I' : \quad f(x, \phi(x)) = 0.$$

Hieraus folgt nach der verallgemeinerten Kettenregel

$$f_x(x, \phi(x)) \cdot 1 + f_y(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) \equiv 0.$$

Setzen wir hier  $x := x_0$ , so ergibt sich wegen  $\phi(x_0) = y_0$  die Formel

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\phi'(x_0) = 0,$$

was wegen  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  mit (5) äquivalent ist. ┘

① (Forts.) Wir nehmen der Einfachheit halber  $a := 1$  an; es geht dann um die Gleichung

$$(f(x, y) :=) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Der Punkt  $\mathbf{z}_3 := \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$  liegt auf  $L$ , denn es gilt

$$\frac{8}{27} + \frac{64}{27} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{z}_3) &= (3x^2 - 3y)_{\mathbf{z}_3} = 3 \cdot \frac{4}{9} - 3 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}, \\ f_y(\mathbf{z}_3) &= (3y^2 - 3x)_{\mathbf{z}_3} = 3 \cdot \frac{16}{9} - 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \neq 0. \end{aligned}$$

In der Umgebung des Punktes  $\mathbf{z}_3$  läßt sich daher  $L$  als Graph einer Funktion  $\phi: x \mapsto y = \phi(x)$  auffassen (Fig. 5.3.4). Dabei ist  $\phi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$  und

$$\phi'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{f_x(\mathbf{z}_3)}{f_y(\mathbf{z}_3)} = \frac{4}{5}.$$

○

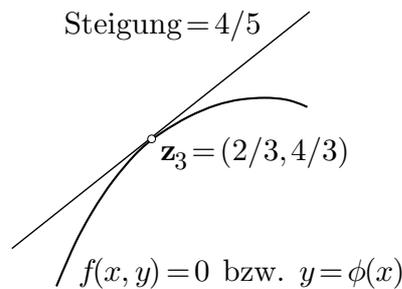


Fig. 5.3.4

② Es sei  $f: x \mapsto y = f(x)$  eine  $C^1$ -Funktion von einer Variablen,  $f(x_0) = y_0$ , und es sei  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f$  in der Umgebung von  $x_0$  streng monoton und besitzt dort eine Umkehrfunktion  $g: y \mapsto x = g(y)$ . Wie wir in Satz (3.1)(f) gesehen haben, ist

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left( = \frac{1}{f'(g(y_0))} \right).$$

Zu diesem Ergebnis können wir auch folgendermaßen gelangen: Der Funktionswert  $g(y)$  der Umkehrfunktion  $g$  an einer vorgegebenen Stelle  $y$  ist die Lösung  $x$  der Gleichung

$$f(x) - y = 0. \quad (9)$$

Wir bilden formal die Funktion

$$F(x, y) := f(x) - y$$

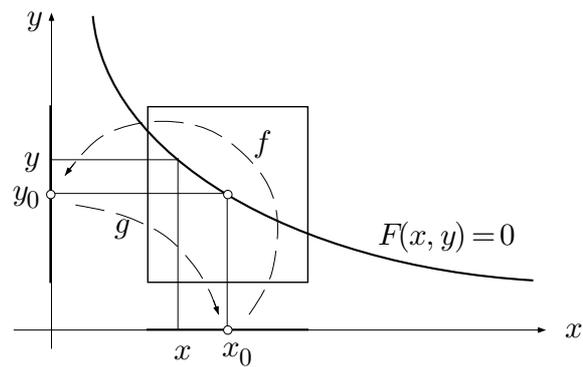


Fig. 5.3.5

von zwei Variablen und haben

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0, \quad F_y(x_0, y_0) = -1.$$

Nach Satz (5.9) “können” wir daher die Gleichung  $F(x, y) = 0$  bzw. (9) in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  “nach  $x$  auflösen”; das heißt: Es gibt eine  $C^1$ -Funktion

$$g: y \mapsto x = g(y),$$

so daß (9) in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  mit  $x = g(y)$  äquivalent ist. Ferner gilt

$$g'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

○

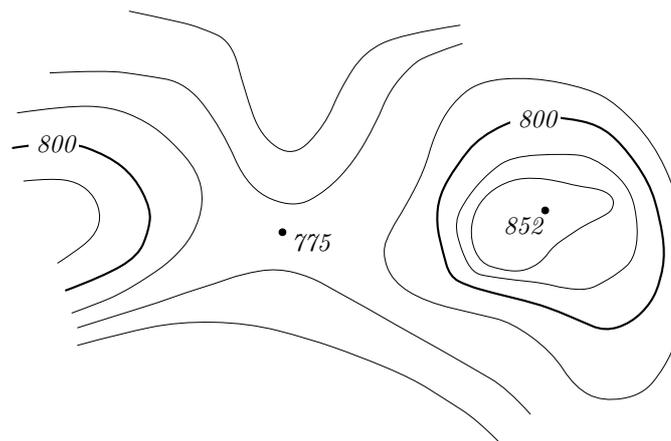


Fig. 5.3.6

### Anwendung: Niveaulinien und Niveauflächen

Aus Satz (5.9) ergibt sich insbesondere, daß die Lösungsmenge  $L$  einer Gleichung  $f(x, y) = 0$  typischer Weise eine glatte Kurve ist. Wir wollen das gerade in einem etwas allgemeineren Zusammenhang formulieren und erinnern dazu an den folgenden Begriff (vgl. Abschnitt 2.1): Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von zwei reellen Variablen und  $C \in \mathbb{R}$  ein beliebig vorgegebener Wert, so heißt die Urbildmenge

$$f^{-1}(C) =: \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = C\}$$

(= Menge der Punkte, in denen  $f$  den Wert  $C$  annimmt) auch **Niveaulinie von  $f$  zum Niveau  $C$** . Jeder Punkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  liegt auf genau einer Niveaulinie, nämlich auf derjenigen zum Niveau  $C_0 := f(x_0, y_0)$ . Die Höhenlinien auf der Landkarte sind die Niveaulinien der Funktion  $f :=$  "Höhe über Meer" zu den angeschriebenen Niveaux (Fig. 5.3.6). Die in Satz (5.9) betrachtete Lösungsmenge  $L$  ist nichts anderes als die Niveaulinie  $f^{-1}(0)$ , in Abschnitt 2.1 auch mit  $N_0$  bezeichnet.

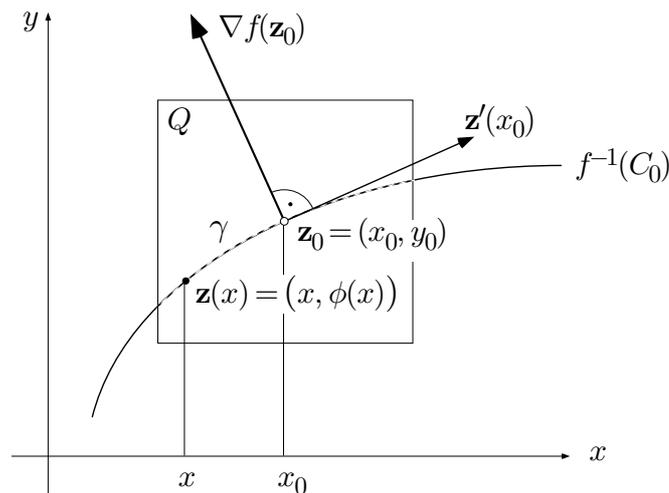


Fig. 5.3.7

Die Niveau"linien" haben ihren Namen verdient. Wir zeigen nämlich:

**(5.10)** *Es sei  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  ein regulärer Punkt der  $C^1$ -Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(\mathbf{z}_0) =: C_0$ . Dann ist die Niveaulinie  $f^{-1}(C_0)$  in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  eine glatte Kurve, und der Gradient  $\nabla f(\mathbf{z}_0)$  steht senkrecht auf der Tangente an diese Kurve im Punkt  $\mathbf{z}_0$ .*

□ Nach Voraussetzung ist  $\nabla f(\mathbf{z}_0) \neq \mathbf{0}$  und somit zum Beispiel  $f_y(\mathbf{z}_0) \neq 0$ . Die Hilfsfunktion

$$\tilde{f}(x, y) := f(x, y) - C_0$$

erfüllt die Bedingungen

$$\tilde{f}(\mathbf{z}_0) = 0, \quad \tilde{f}_y(\mathbf{z}_0) = f_y(\mathbf{z}_0) \neq 0.$$

Nach Satz (5.9) gibt es daher eine  $C^1$ -Funktion  $\phi$  von einer Variablen, so daß die Gleichung

$$\tilde{f}(x, y) = 0, \quad \text{d.h.} \quad f(x, y) = C_0$$

in einer Umgebung  $Q$  von  $\mathbf{z}_0$  äquivalent ist mit  $y = \phi(x)$ . Der in  $Q$  gelegene Teil  $\gamma$  der Niveaulinie  $f^{-1}(C_0)$  besitzt daher die  $C^1$ -Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad x \mapsto \mathbf{z}(x) := (x, \phi(x))$$

und ist folglich eine glatte Kurve durch den Punkt  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  (Fig. 5.3.7). Es gilt  $f(\mathbf{z}(x)) \equiv C_0$ , und hieraus folgt nach der Kettenregel (5.3):

$$\nabla f(\mathbf{z}(x)) \cdot \mathbf{z}'(x) \equiv 0.$$

Setzt man hier  $x := x_0$ , so kommt

$$\nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot \mathbf{z}'(x_0) = 0;$$

das heißt:  $\nabla f(\mathbf{z}_0)$  steht senkrecht auf dem Tangentialvektor von  $\gamma$  im Punkt  $\mathbf{z}_0$ . ┘

③ Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

mit dem einzigen kritischen Punkt  $\mathbf{0}$ . Ihre Niveaulinien  $f^{-1}(C)$ ,  $C > 0$ , sind konzentrische Kreise um  $\mathbf{0}$  (Fig. 5.3.8); die Niveaulinie  $f^{-1}(0)$  besteht aus dem Ursprung allein.

Die Funktion

$$g(x, y) := x^2 - y^2$$

hat ebenfalls den einzigen kritischen Punkt  $\mathbf{0}$ . Ihre Niveaulinien  $g^{-1}(C)$ ,  $C \neq 0$ , sind die Hyperbeln

$$x^2 - y^2 = C,$$

die Niveaulinie  $g^{-1}(0)$  besteht aus den beiden Geraden  $y = \pm x$ .

In beiden Fällen hat das Feld der Niveaulinien im Ursprung eine Singularität; überall sonst ist es regulär und sieht "lokal" gleich aus wie eine Schar von parallelen Geraden. ○

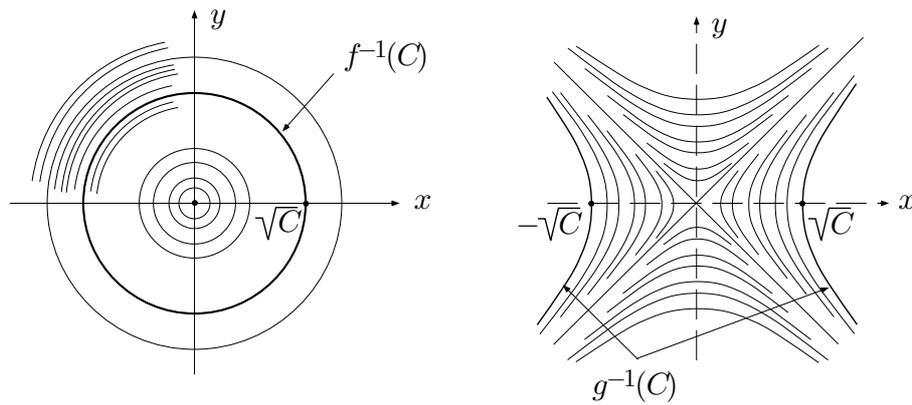


Fig. 5.3.8

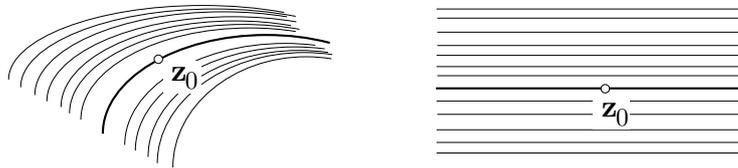


Fig. 5.3.9

Diese Beispiele belegen den folgenden allgemeinen Sachverhalt: Ist  $\mathbf{z}_0$  ein regulärer Punkt der  $C^1$ -Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist das Feld der Niveaulinien von  $f$  in der Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  “im wesentlichen”, das heißt: bis auf eine differenzierbare Verzerrung, eine Schar von parallelen Geraden (Fig. 5.3.9). Wir können das hier nicht beweisen; vor allem darum nicht, weil uns der klare Begriff für eine “differenzierbare Verzerrung” fehlt.

Wir gehen nun zu Funktionen von drei Variablen über; man kann sich etwa eine Temperaturverteilung in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  vorstellen. Anstelle von Niveaulinien wie in der Ebene gibt es hier Niveauflächen. Es sei also

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

eine  $C^1$ -Funktion und  $C \in \mathbb{R}$  ein beliebig vorgegebener Wert. Dann heißt die Urbildmenge

$$f^{-1}(C) =: \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = C\}$$

auch **Niveaufläche von  $f$  zum Niveau  $C$** . Durchläuft  $C$  die Wertmenge von  $f$ , so erhält man eine ganze Schar von Flächen, die zusammen das ganze Gebiet  $\Omega$  aufblättern wie die Seiten eines Buches das von ihm eingenommene Volumen. Man kann auch an die Häute einer Zwiebel denken.

Die Niveauflächen sind typischer Weise tatsächlich Flächen; es gilt nämlich das folgende dreidimensionale Analogon zu Satz (5.10):

**(5.11)** Es sei  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$  ein regulärer Punkt der  $C^1$ -Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(\mathbf{p}) =: C_0$ . Dann ist die Niveaulfläche  $f^{-1}(C_0)$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$  eine glatte Fläche  $S$ , und der Gradient  $\nabla f(\mathbf{p})$  steht senkrecht auf der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ .

┌ Zunächst eine Vorbemerkung: Satz (5.9) gilt auch für eine Vektorvariable  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  anstelle der reellen Variablen  $x$  und liefert dann zu einer Gleichung

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

unter den entsprechenden Bedingungen eine  $C^1$ -Funktion  $\phi: \mathbf{x} \mapsto y = \phi(\mathbf{x})$ .

Nach Voraussetzung ist  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  und somit zum Beispiel  $f_z(\mathbf{p}) \neq 0$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen (bzw. aufgrund der Vorbemerkung) kann man daher die Gleichung

$$f(x, y, z) - C_0 = 0 \tag{10}$$

in einer geeigneten Umgebung  $Q = Q' \times I$  des Punktes  $\mathbf{p}$  nach  $z$  auflösen. Das heißt: Es gibt eine  $C^1$ -Funktion  $\phi: Q' \rightarrow I$  der Variablen  $x$  und  $y$ , so daß die Gleichung (10) innerhalb  $Q$  äquivalent ist mit

$$z = \phi(x, y);$$

insbesondere ist  $\phi(x_0, y_0) = z_0$ . Der in  $Q$  gelegene Teil  $S$  der Niveaulfläche  $f^{-1}(C_0)$  besitzt daher die  $C^1$ -Parameterdarstellung

$$S: \quad (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) := (x, y, \phi(x, y))$$

und ist somit eine glatte Fläche durch den Punkt  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$  (Fig. 5.3.10).

Es sei weiter

$$\gamma: ]-h, h[ \rightarrow S, \quad t \mapsto \mathbf{r}(t)$$

eine in der Fläche  $S \subset f^{-1}(C_0)$  gelegene Kurve durch den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0)$ . Dann gilt  $f(\mathbf{r}(t)) \equiv C_0$ , und hieraus folgt nach der Kettenregel (5.3):

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \equiv 0.$$

Setzt man hier  $t := 0$ , so kommt

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0,$$

das heißt:  $\nabla f(\mathbf{p})$  steht senkrecht auf dem Tangentialvektor  $T_{\mathbf{p}}\gamma$ . Da dies für alle Flächenkurven durch den Punkt  $\mathbf{p}$  zutrifft, steht  $\nabla f(\mathbf{p})$  in der Tat senkrecht auf der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ . ─

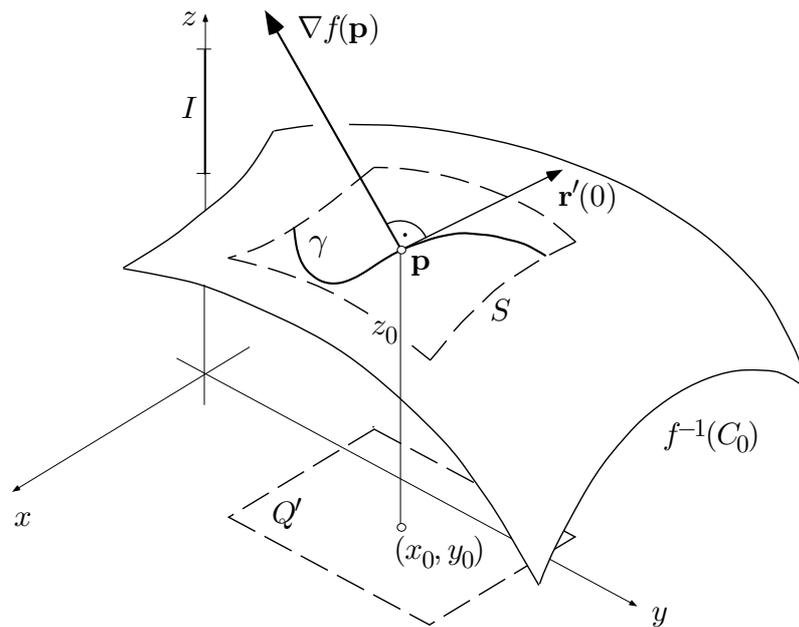


Fig. 5.3.10

④ Welcher Punkt der Fläche

$$S: \quad xy^2z^3 = 1; \quad x, y, z > 0$$

liegt am nächsten beim Ursprung? —  $S$  ist die Niveauläche  $f^{-1}(1)$  der Funktion

$$f(x, y, z) := xy^2z^3.$$

Bezeichnet  $P = (x, y, z)$  den gesuchten Punkt, so ist anschaulich klar, daß der von  $O$  ausgehende Strahl durch  $P$  auf der Tangentialebene  $T_P S$  senkrecht steht (Fig. 5.3.11). Nach Satz (5.11) gibt es daher ein  $\lambda \neq 0$  mit

$$\underline{OP} = \lambda \nabla f(P)$$

oder in Koordinaten:

$$(x, y, z) = \lambda(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} x = \lambda \cdot y^2z^3 \\ y = \lambda \cdot 2xyz^3 \\ z = \lambda \cdot 3xy^2z^2 \end{cases}.$$

Multiplizieren wir hier die erste Gleichung mit  $x$ , die zweite mit  $y$  und die dritte mit  $z$ , so folgt wegen  $P \in S$ , das heißt:  $xy^2z^3 = 1$ :

$$x^2 = \lambda, \quad y^2 = 2\lambda, \quad z^2 = 3\lambda.$$

Somit ist  $\lambda > 0$  und

$$x = \sqrt{\lambda}, \quad y = \sqrt{2\lambda}, \quad z = \sqrt{3\lambda}.$$

Wegen  $xy^2z^3 = 1$  ist notwendigerweise

$$\lambda^{1/2} \cdot 2\lambda \cdot (3\lambda)^{3/2} = 2 \cdot 3^{3/2} \lambda^3 = 1$$

und folglich  $\lambda = 2^{-1/3}3^{-1/2}$ . Damit erhalten wir

$$P = (2^{-1/6}3^{-1/4}, 2^{1/3}3^{-1/4}, 2^{-1/6}3^{1/4}) = (0.677, 0.957, 1.172).$$

○

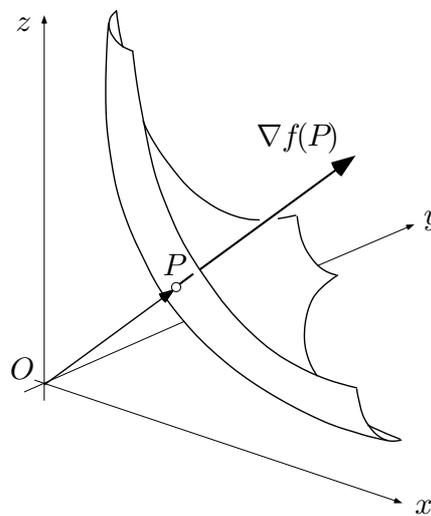


Fig. 5.3.11

## Aufgaben

1. (a) Verifiziere: Die Gleichung

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0$$

definiert implizit eine Funktion  $y = \phi(x)$  mit  $\phi(1) = 1$ .

- (b) (M) Berechne  $\phi'(1)$  mit Hilfe einer expliziten Darstellung von  $\phi$ .  
 (c) Berechne  $\phi'(1)$  mit Hilfe der Formel für die Ableitung einer implizit gegebenen Funktion.

- (d) Bestimme ein maximales Intervall, auf dem  $\phi$  stetig differenzierbar ist.
2. Drücke die zweite Ableitung der durch  $f(x, y) = 0$  implizit definierten Funktion  $\phi: x \mapsto y = \phi(x)$  durch die partiellen Ableitungen von  $f$  aus.  
(Hinweis:  $\phi'(x) = -f_x(x, \phi(x))/f_y(x, \phi(x))$ .)
3. Gegeben ist die Gleichung

$$xy^3 + 4xy^2 + 2x^2y + 4x - 2 = 0. \quad (*)$$

- (a) Verifiziere: (\*) definiert implizit eine in der Umgebung von  $x = 2$  definierte  $C^1$ -Funktion  $\phi: x \mapsto y = \phi(x)$  mit  $\phi(2) \in \mathbb{Z}$ .
- (b) Berechne  $\phi'(2)$ .
4. Zeige: Die Tangentialebenen an die Fläche

$$S: \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0 \text{ fest})$$

schneiden auf den Koordinatenachsen Abschnitte ab, deren Summe konstant ist.

5. Zwei physikalische Größen  $x$  und  $y$  sind aneinander gebunden durch eine Beziehung der Form

$$x^4 - 5x^3y^2 + 6xy^3 = \text{const.}$$

Zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  werden die beiden Größen gemessen; man findet  $x = 2$ ,  $y = 1$ . Berechne angenähert den Zuwachs  $\Delta y$ , wenn sich  $x$  in der darauffolgenden Minute um  $\Delta x := 0.001$  erhöht.

6. Die Oberfläche eines über der  $(x, y)$ -Ebene schwebenden Ellipsoids ist gegeben durch die Gleichung

$$3x^2 + 2xz + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 10z + 12 = 0.$$

Wird das Ellipsoid senkrecht von oben beleuchtet, so wirft es einen Schatten auf die  $(x, y)$ -Ebene. Bestimme die Schattengrenze, sei es in der Form  $F(x, y) = 0$  oder als Parameterdarstellung  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

7. Die Fläche  $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$  modelliert einen Gebirgspaß. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sendet die unendlich ferne untergehende Sonne ihre letzten Strahlen aus der Richtung  $\mathbf{s} := (-4, 1, -1)$ . Bestimme die Schattengrenze  $\gamma$  auf  $S$ ; erwünscht ist eine Parameterdarstellung. Um was für eine Kurve handelt es sich? Figur!

## 5.4 Die Funktionalmatrix

### Auf der Suche nach dem definitiven Ableitungsbegriff

Dieser Abschnitt kann bei der ersten Lektüre übersprungen werden. — Wir betrachten im folgenden noch einmal den Ableitungsbegriff (vgl. die Ausführungen zu Beginn von Abschnitt 5.1), und zwar allgemein von Funktionen (Abbildungen)

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad (1)$$

dabei können  $n$  und  $m$  unabhängig voneinander die Werte 1, 2, 3, ... annehmen. Wenn wir von der "Ableitung" derartiger Funktionen sprechen, so geht es hier erstens nur um die erste Ableitung; mit höheren Ableitungen wird der im folgenden dargestellte Formalismus nicht fertig. Zweitens meinen wir immer die Ableitung in einem bestimmten Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$  und nicht die Ableitung als "Begleitfunktion" der Ausgangsfunktion  $\mathbf{f}$ .

Die erste Ableitung von Funktionen (1) ist bis jetzt in verschiedenen Gestalten auf den Plan getreten:

(a) Für eine "gewöhnliche" reelle Funktion  $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$  haben wir den "Prototyp" der Ableitung,

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}.$$

(b) Für eine vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$$

von einer reellen Variablen läßt sich der obige Limes immer noch bilden. Man erhält die Momentangeschwindigkeit

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0)) \in \mathbb{R}^m.$$

Ist  $\mathbf{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , so ist  $\mathbf{f}'(t_0)$  der Tangentialvektor an die Kurve  $\gamma: t \mapsto \mathbf{f}(t)$  im Punkt  $\mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(t_0)$ , siehe Beispiel 3.1.②.

(c) Die erste Ableitung einer reellwertigen Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

von  $n$  Variablen wird repräsentiert durch ihren Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{p}) = (f_{,1}, \dots, f_{,n})_{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n.$$

(d) Wir werden ferner Parameterdarstellungen von Flächen im Raum, also Abbildungen

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

zu betrachten haben; gelegentlich werden wir auch Abbildungen

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3$$

antreffen. So läßt sich zum Beispiel die Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

als eine Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad (r, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$$

auffassen. Für derartige Situationen haben wir noch keinen Ableitungsbegriff zur Verfügung.

Wir fragen nach einem Konzept, das die verschiedenen gefundenen Ableitungsformen unter einen Hut bringt und auch die in (d) betrachteten Fälle mit umfaßt. Ein derartiges Konzept gibt es. Der entscheidende Ansatz besteht darin, die Ableitung nicht als Zahl oder als Vektor oder etwas Ähnliches zu betrachten, sondern als eine lineare Abbildung, deren numerische Daten in einer Matrix, eben der Funktionalmatrix, gespeichert sind.

Wir betrachten also allgemein eine  $C^1$ -Abbildung (1) sowie einen festen Punkt  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$ . Es sei  $\mathbf{q} := \mathbf{f}(\mathbf{p})$  der Bildpunkt von  $\mathbf{p}$ . Dabei nehmen wir an, daß im  $\mathbf{x}$ -Raum ein für allemal kartesische Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und im  $\mathbf{y}$ -Raum kartesische Koordinaten  $y_1, \dots, y_m$  gegeben sind.

Der Punkt  $\mathbf{p}$  besitzt einen Tangentialraum  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  (Fig. 5.4.1). Dieser Raum  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  enthält einerseits die im Punkt  $\mathbf{p}$  angehefteten Vektoren (zum Beispiel Kräfte, Geschwindigkeiten, Gradienten), andererseits die von  $\mathbf{p}$  aus gemessenen "Zuwächse" der unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$ .

Hier geht es nun um diese Zuwächse; wir bezeichnen daher die Elemente von  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  mit  $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ . Analog besitzt der Punkt  $\mathbf{q}$  einen Tangentialraum  $T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^m$  mit Elementen  $d\mathbf{y} = (dy_1, \dots, dy_m)$ . Die  $dx_k$  und die  $dy_i$  sind ganz einfach die Koordinaten der Vektorvariablen  $d\mathbf{x}$  bzw.  $d\mathbf{y}$  und ja nicht etwa "unendlichkleine Größen". Es ist allerdings wahr, daß wir im weiteren Verlauf den Grenzübergang  $d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  im Auge haben.

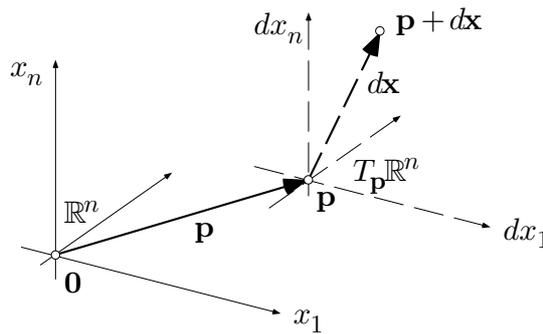


Fig. 5.4.1

In dem vorliegenden Zusammenhang erweist es sich als zweckmäßig, die Koordinaten der Punkte und vor allem die der Zuwächse als Kolonnenmatrizen zu schreiben:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} =: [\mathbf{p}], \quad \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} =: [d\mathbf{x}], \quad \begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{bmatrix} =: [d\mathbf{y}].$$

Alles dreht sich nun um den (vektoriellen) Zuwachs des Funktionswerts  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , wenn die unabhängige Variable  $\mathbf{x}$  von  $\mathbf{p}$  aus den Zuwachs  $d\mathbf{x}$  erfährt, also um die Größe

$$\Delta \mathbf{f} := \mathbf{f}(\mathbf{p} + d\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})$$

in Funktion der Variablen  $d\mathbf{x}$ . Wir schauen uns das einmal an im Fall (b) mit  $\mathbf{p} := t_0$ . Nach 3.1.(3) gilt für jede Koordinatenfunktion  $f_i$ :

$$f_i(t_0 + dt) - f_i(t_0) = f'_i(t_0) dt + o(dt) \quad (dt \rightarrow 0).$$

Diese  $m$  Beziehungen lassen sich folgendermaßen in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \end{bmatrix}_{t_0} \cdot [dt] + o(dt); \quad (3)$$

dabei steht rechter Hand ein Matrizenprodukt.

Im Fall (c) haben wir nach Satz (5.2)':

$$f(\mathbf{p} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n f_{.k}(\mathbf{p}) dx_k + o(|d\mathbf{x}|),$$

und auch hier können wir ein Matrizenprodukt ins Spiel bringen:

$$[\Delta f] = [f_{.1} \ f_{.2} \ \dots \ f_{.n}]_{\mathbf{p}} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} + o(|d\mathbf{x}|). \quad (4)$$

Schließlich paßt auch der Fall (a) in diesen Rahmen:

$$[\Delta f] = [f']_{t_0} [dt] + o(dt) . \quad (5)$$

Die Variationen (3), (4), (5) desselben Themas werden simultan abgedeckt mit dem folgenden Satz über  $C^1$ -Abbildungen (1):

**(5.12)** ( *$\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{p}$  und  $\Delta \mathbf{f}$  haben die angegebene Bedeutung*)  $\Delta \mathbf{f}$  ist in erster Näherung eine lineare Funktion von  $d\mathbf{x}$ , und zwar gilt

$$\begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1.1} & f_{1.2} & \cdots & f_{1.n} \\ f_{2.1} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{m.1} & & \cdots & f_{m.n} \end{bmatrix}_{\mathbf{p}} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} + o(|d\mathbf{x}|) \quad (d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}) . \quad (6)$$

┌ Jede einzelne Koordinatenfunktion  $f_i$  von  $\mathbf{f}$  ist eine reellwertige  $C^1$ -Funktion der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und genügt damit der Beziehung (4). Schreibt man die sich ergebenden  $m$  Formeln untereinander, so resultiert gerade (6). ─

## Die Funktionalmatrix

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{p}} =: \left[ \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right] =: \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} \quad (7)$$

heißt **Funktionalmatrix** oder **Jacobische Matrix** von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ . Die Elemente dieser Matrix sind die  $m \cdot n$  ersten partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen  $f_i$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ , und zwar stehen in der  $i$ -ten Zeile die partiellen Ableitungen von  $f_i$  nach den  $n$  unabhängigen Variablen  $x_k$ . Andersherum: In der  $k$ -ten Kolonne steht der Ableitungsvektor der partiellen Funktion " $\mathbf{f}$  von  $x_k$  allein". Die Bezeichnungsweise (7) der Funktionalmatrix erlaubt folgende kondensierte Gestalt von (6):

$$[\Delta \mathbf{f}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} \cdot [d\mathbf{x}] + o(|d\mathbf{x}|) \quad (d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}) . \quad (6')$$

① Wir betrachten die Funktion

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \frac{1}{2\pi} v \end{cases}; \quad (8)$$

es handelt sich um die Parameterdarstellung einer Schraubenfläche der Ganghöhe 1. Die Funktionalmatrix berechnet sich zu

$$\left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \right] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 1/(2\pi) \end{bmatrix}.$$

Für einen festen Punkt  $(u_0, v_0)$  in der Parameterebene wird daraus eine Zahlenmatrix. So ist zum Beispiel (Fig. 5.4.2):

$$\left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \right]_{(5, \pi/3)} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 5/2 \\ 0 & 1/(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -3.464 \\ 0.866 & 2.5 \\ 0 & 0.159 \end{bmatrix}.$$

Wir notieren noch

$$[\mathbf{r}(5, \pi/3)] = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5\sqrt{3}/2 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.464 \\ 0.167 \end{bmatrix}$$

und erhalten damit aus (6') die folgende in der Umgebung von  $(5, \pi/3)$  nützliche Näherungsformel für die Funktion  $\mathbf{r}(\cdot, \cdot)$ :

$$[\mathbf{r}(5 + du, \pi/3 + dv)] \doteq \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.464 \\ 0.167 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -3.464 \\ 0.866 & 2.5 \\ 0 & 0.159 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

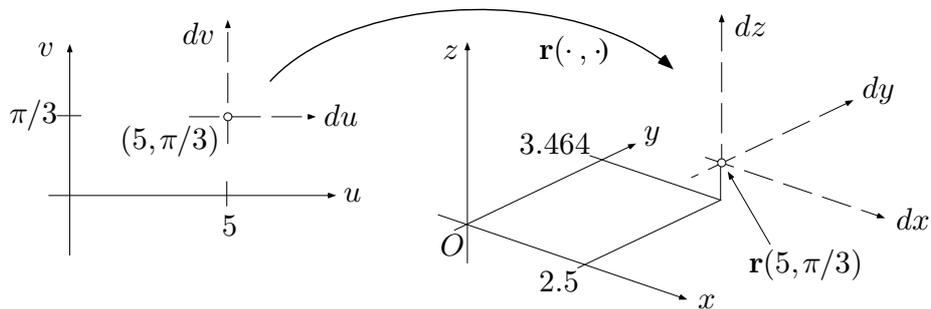


Fig. 5.4.2

Die Funktionalmatrix ist die Matrix einer linearen Abbildung  $L$  der Tangentialräume:

$$L: T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^m, \quad d\mathbf{x} \mapsto d\mathbf{y} := L d\mathbf{x},$$

$$[L] := \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}}.$$

Diese lineare Abbildung ist das mathematische Objekt, nach dem wir gesucht haben. Man nennt  $L$  die **Ableitung** oder das **Differential** (!) von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  und verwendet dafür Bezeichnungen wie

$$d\mathbf{f}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{f}_*(\mathbf{p})$$

und ähnliche. Wir werden unsere Aufmerksamkeit im weiteren auf die Funktionalmatrix, also die Matrix von  $d\mathbf{f}(\mathbf{p})$  bezüglich der Standardbasen in  $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$  und  $T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^m$ , konzentrieren und die dahinter stehende Ableitung  $d\mathbf{f}(\mathbf{p})$  selbst in Ruhe lassen.

Daß wir die richtigen Begriffe eingeführt haben, erkennt man an der folgenden Fassung der verallgemeinerten Kettenregel:

(5.13') *Bei der Zusammensetzung von Abbildungen multiplizieren sich die zugehörigen Funktionalmatrizen.*

Im einzelnen heißt das (Fig. 5.4.3):

(5.13) *Es seien*

$$\mathbf{y}(\cdot): \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{x})$$

und

$$\mathbf{z}(\cdot): \mathbb{R}^m \curvearrowright \mathbb{R}^s, \quad \mathbf{y} \mapsto \mathbf{z}(\mathbf{y})$$

zwei  $C^1$ -Abbildungen mit  $\mathbf{y}(\mathbf{p}) =: \mathbf{q} \in \text{dom}(\mathbf{z}(\cdot))$ . Dann besitzt ihre Zusammensetzung:  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$  die folgende Funktionalmatrix:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right]_{\mathbf{q}} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}}.$$

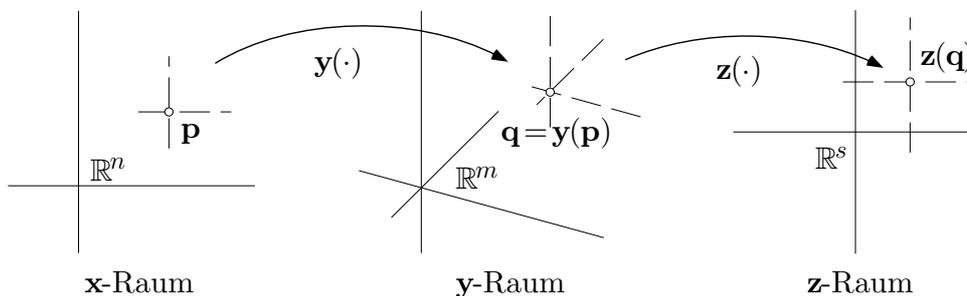


Fig. 5.4.3

□ Wir betrachten eine feste Position  $(i, k)$  der Matrix linker Hand. Das betreffende Matrixelement ist die partielle Ableitung

$$\left. \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{p}}.$$

Zu deren Berechnung hat man nach Satz (5.3) “durch die dazwischengeschalteten Variablen  $y_1, \dots, y_m$  hindurchzudifferenzieren”: Es gilt

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial y_1} & \frac{\partial z_i}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial z_i}{\partial y_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{bmatrix};$$

dabei sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  und die Ableitungen  $\frac{\partial z_i}{\partial y_j}$  an der Stelle  $\mathbf{q} := \mathbf{y}(\mathbf{p})$  zu nehmen. In der letzten Gleichung steht aber rechter Hand gerade das Element in der Position  $(i, k)$  der Produktmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}_{\mathbf{q}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}_{\mathbf{p}}.$$

Da  $i$  und  $k$  beliebig waren, folgt die Behauptung. □

② Aus Satz (5.13) folgt unter anderem, daß die Funktionalmatrizen von zwei zueinander inversen  $C^1$ -Abbildungen in zugeordneten Punkten zueinander invers sind. Die eindimensionale Version dieses Sachverhalts haben wir schon in Satz (3.1)(f) kennengelernt. An dieser Stelle betrachten wir als Beispiel die Beziehung zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten in der (punktierten) Ebene. Hier haben wir einerseits die Abbildung

$$\text{rect} : \quad \mathbf{p} \mapsto \mathbf{z}, \quad (r, \phi) \mapsto \begin{cases} x := r \cos \phi \\ y := r \sin \phi \end{cases}$$

und andererseits die Umkehrabbildung

$$\text{pol} : \quad \mathbf{z} \mapsto \mathbf{p}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} r := \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi := \arg(x, y) \end{cases},$$

wobei wir die Mehrdeutigkeit des Arguments für einmal außer acht lassen. Die Funktionalmatrix von rect berechnet sich zu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_r & x_\phi \\ y_r & y_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, besitzt diese Matrix folgende Inverse:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{1}{r} \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Dies ist schon die Funktionalmatrix  $\left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right]$  der Umkehrabbildung  $\text{pol}$ , nur leider durch die falschen Variablen ausgedrückt. Wir rechnen sie daher auf  $x$  und  $y$  um; es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \phi_x & \phi_y \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}.$$

Die hier für die partiellen Ableitungen  $r_x, r_y, \phi_x, \phi_y$  erhaltenen Ausdrücke bestätigen 5.1.(6) sowie das Ergebnis von Beispiel 5.1.④.  $\circ$

## Rang und Regularität, Jacobische Determinante

Wir kehren zurück zu einer allgemeinen Abbildung (1). Die Funktionalmatrix

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}}$$

dient nicht nur zur Approximation von Zuwächsen  $\Delta \mathbf{f}$  (siehe Beispiel ①); sie gibt auch Auskunft über das qualitative Verhalten von  $\mathbf{f}$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$ . Hierfür kommt es nicht auf die genauen numerischen Werte der Matrixelemente an, sondern auf die (einzige) geometrische Invariante dieser Matrix, nämlich ihren *Rang*  $r$ . Da es sich um eine  $(m \times n)$ -Matrix handelt, gilt a priori

$$0 \leq r \leq \min\{m, n\}.$$

In den meisten Punkten  $\mathbf{p} \in \text{dom}(f)$  besitzt die Funktionalmatrix den maximal möglichen Rang  $\min\{m, n\}$ . Derartige Punkte heißen **reguläre Punkte** von  $\mathbf{f}$ . Damit wird die früher für Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  gegebene Definition verallgemeinert: Im Fall  $m = 1$  ist

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} = [f_{.1} \ f_{.2} \ \dots \ f_{.n}]_{\mathbf{p}}$$

eine  $(1 \times n)$ -Matrix, ihr Rang also 0 oder 1. Der Rang hat genau dann den Maximalwert 1, wenn  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  ist.

Allgemein läßt sich folgendes sagen: Ist  $\mathbf{p}$  ein regulärer Punkt von  $\mathbf{f}$ , so verhält sich  $\mathbf{f}$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$  gerade so, wie man es aufgrund der Dimensionszahlen  $n$  und  $m$  erwartet. Wir erläutern dieses Prinzip an zwei Beispielen; siehe dazu auch das Beispiel 5.3.③ sowie den Anfang von Abschnitt 6.3, insbesondere Beispiel 6.3.①.

③ Die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := t^3 \\ y(t) := t^2 \end{cases}$$

ist eine Parameterdarstellung der **Neilschen Parabel**

$$\gamma: y = |x|^{2/3} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(Fig. 5.4.4). Die Funktionalmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

besitzt für alle  $t \neq 0$  den Rang 1 und an der Stelle  $t := 0$  den Rang 0. Tatsächlich ist  $\gamma$  überall eine schöne Kurve, außer im Ursprung.  $\bigcirc$

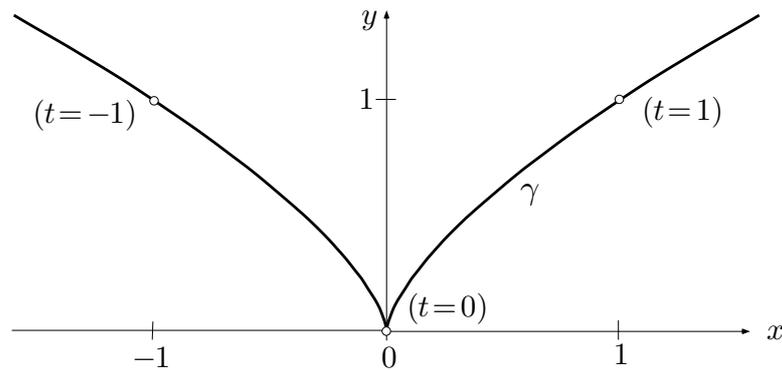


Fig. 5.4.4

① (Forts.) Wir multiplizieren die Kolonnenvektoren

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = \left(-u \sin v, u \cos v, \frac{1}{2\pi}\right)$$

der Funktionalmatrix vektoriell und erhalten

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{1}{2\pi} \sin v, -\frac{1}{2\pi} \cos v, u\right).$$

Es folgt

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \frac{1}{4\pi^2} + u^2 > 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 .$$

Die Vektoren  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$  sind somit durchwegs linear unabhängig. Hieraus schließen wir: Die Funktionalmatrix hat in allen Punkten den Rang 2, die Parameterdarstellung (8) ist also überall regulär. Der Flächencharakter der Schraubenfläche ist tatsächlich nirgends gestört (auch auf der Achse nicht!).  $\circ$

Von besonderem Interesse ist der Fall  $m = n$ , der zum Beispiel bei Koordinatentransformationen auftritt. Hier ist die Funktionalmatrix quadratisch und besitzt somit eine Determinante

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) := \det \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{p}} ,$$

die sogenannte **Funktionaldeterminante** oder **Jacobische Determinante** von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$ . Die Regularitätsbedingung  $r = n$  ist genau dann erfüllt, wenn

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \neq 0$$

ist. In diesem Fall ist die Funktionalmatrix eine reguläre Matrix im Sinn der linearen Algebra und besitzt eine wohlbestimmte inverse Matrix. Diese Invertierbarkeit der Ableitung von  $\mathbf{f}$  impliziert die Invertierbarkeit von  $\mathbf{f}$  selbst. Es gilt nämlich der folgende **Satz über die (lokale) Umkehrabbildung** (siehe die Fig. 5.4.5):

**(5.14)** *Es sei  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung, und an der Stelle  $\mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{f})$  gelte  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \neq 0$ . Dann bildet  $\mathbf{f}$  eine geeignete Umgebung  $U$  von  $\mathbf{p}$  bijektiv auf eine Umgebung  $V$  von  $\mathbf{q} := \mathbf{f}(\mathbf{p})$  ab, und die Umkehrabbildung*

$$\mathbf{g} := (\mathbf{f}|_U)^{-1} : \quad V \rightarrow U$$

*ist stetig differenzierbar.*

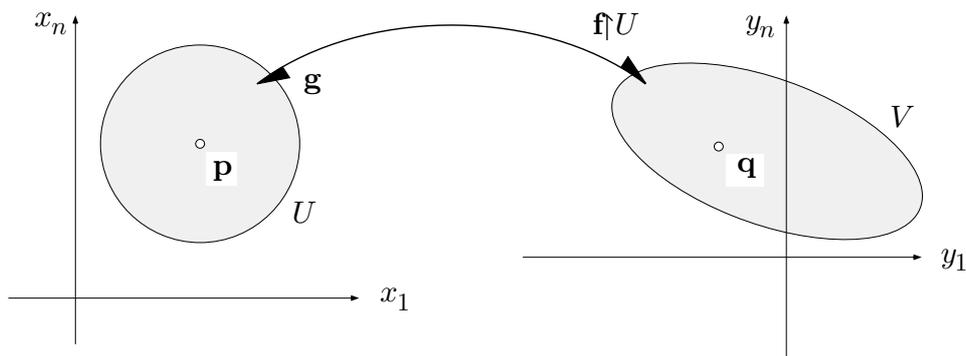


Fig. 5.4.5

(Ohne Beweis) — Dieser fundamentale Satz ist wie der Satz über implizite Funktionen ein reiner Existenzsatz; er liefert keine Formeln für  $\mathbf{g}$ , falls  $\mathbf{f}$  durch Ausdrücke gegeben ist.

## Variablentransformation bei mehrfachen Integralen

Die Jacobische Determinante spielt auch eine Rolle in der Integralrechnung. Es geht da um die Variablentransformation bei mehrfachen Integralen

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}), \quad (9)$$

wobei hier  $f$  nichts mit den vorher betrachteten  $\mathbf{f}$ 's zu tun hat.

Wir haben schon am Schluß von Abschnitt 4.5 gesehen, daß es unter Umständen von Vorteil ist, den Integrationsbereich  $B$  mit Hilfe von anderen Koordinaten zu beschreiben; oft erhält dabei auch der Integrand  $f$  ein einfacheres Aussehen. Man hat dann einen “Phantombereich”  $\tilde{B}$  in einem Hilfsraum der Variablen  $\mathbf{u}$  sowie eine im wesentlichen bijektive Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(\cdot) : \tilde{B} \rightarrow B, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u})$$

des eigentlichen Integrationsbereichs  $B$  (Fig. 5.4.6). Die Funktion  $f$  erscheint in den neuen Koordinaten als Pullback

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) := f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) .$$

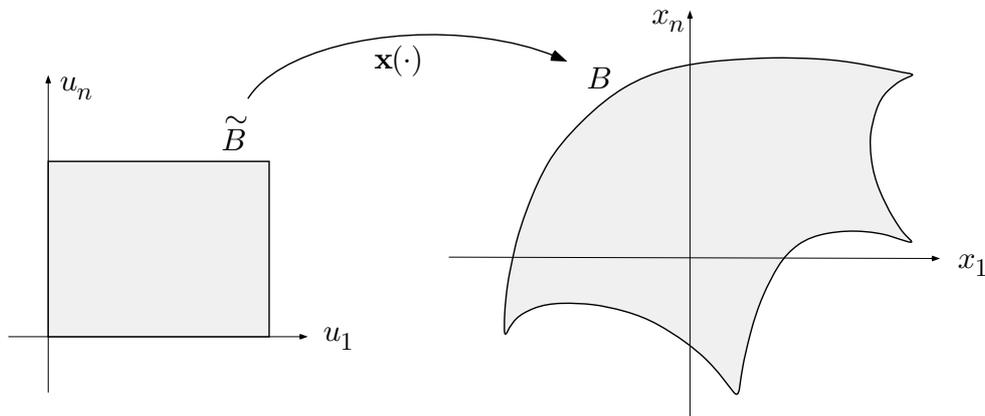


Fig. 5.4.6

Es geht nun darum, den für (9) erforderlichen Integrationsprozess in den Phantombereich  $\tilde{B}$  zurückzuverlegen. Hierüber gilt der folgende Satz:

(5.15) ( $B, \tilde{B}, f, \tilde{f}$  und  $\mathbf{x}(\cdot)$  haben die angegebene Bedeutung.)

$$\int_B f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(\mathbf{u}) |J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})| d\mu(\mathbf{u}) .$$

Die Sätze (4.17) (Polarkoordinaten) und (4.18) (Kugelkoordinaten) sind natürlich Spezialfälle dieses Satzes. Wir überlassen es dem Leser, die Jacobische Determinante der Transformation (2) zu berechnen. Es ergibt sich tatsächlich

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \end{bmatrix} = r^2 \cos \theta .$$

□ Wir beweisen Satz (5.15) im dreidimensionalen Fall und für eine Transformation

$$\mathbf{r}(\cdot) : \tilde{B} \rightarrow B, \quad (u, v, w) \mapsto (x, y, z) . \quad (10)$$

Man denke sich den Phantombereich  $\tilde{B}$  in kleine achsenparallele Teilquader  $\tilde{B}_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) mit ‘‘Anfangsecke’’  $\mathbf{p}_k$  zerlegt und betrachte zunächst ein festes  $\tilde{B}_k$  (Fig. 5.4.7) mit Kantenlängen  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ . Die Transformation (10) führt  $\tilde{B}_k$  über in ein Klötzchen  $B_k \subset B$ ; eine Ecke von  $B_k$  befindet sich im Punkt  $\mathbf{q}_k := \mathbf{r}(\mathbf{p}_k)$ . Dieses Klötzchen läßt sich fast nicht unterscheiden von einem Parallelepiped  $P$ , und zwar wird  $P$  aufgespannt von den drei Vektoren

$$\mathbf{r}_u(\mathbf{p}_k)\Delta u, \quad \mathbf{r}_v(\mathbf{p}_k)\Delta v, \quad \mathbf{r}_w(\mathbf{p}_k)\Delta w .$$

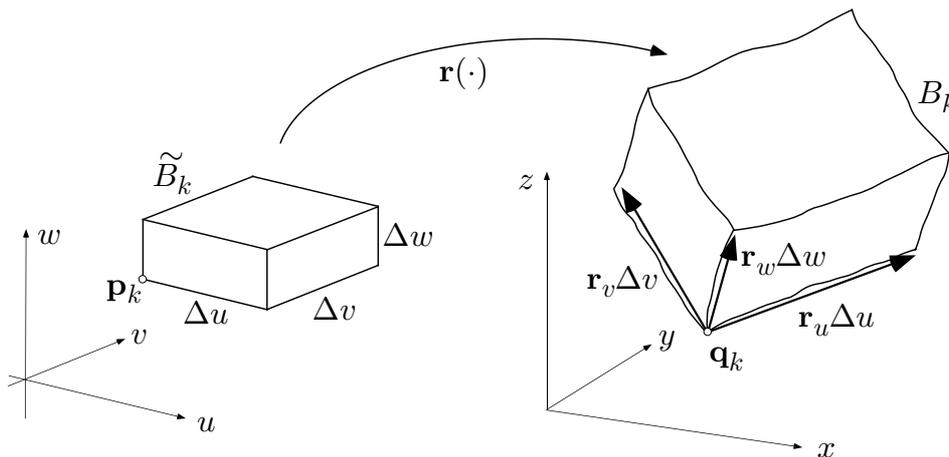


Fig. 5.4.7

$P$  besitzt somit das Volumen

$$\mu(P) = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w]_{\mathbf{p}_k}| \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Hier ist das Spatprodukt rechter Hand nichts anderes als die Jacobische Determinante  $J_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_k)$ . Wir haben daher mit vertretbarem Fehler

$$\mu(B_k) \doteq \mu(P) = |J_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_k)| \mu(\tilde{B}_k) .$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nunmehr aus der folgenden Kette von "Gleichungen":

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) d\mu(x, y, z) &\stackrel{(*)}{\doteq} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{q}_k) \mu(B_k) \doteq \sum_{k=1}^N \tilde{f}(\mathbf{p}_k) |J_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_k)| \mu(\tilde{B}_k) \\ &\doteq \int_{\tilde{B}} f(u, v, w) |J_{\mathbf{r}}(u, v, w)| d\mu(u, v, w) . \end{aligned}$$

An der Stelle (\*) wurde benutzt, daß die Darstellung (10) "im wesentlichen" bijektiv ist, so daß die Klötzchen  $B_k$  zusammen den Integrationsbereich  $B$  gerade einfach überdecken. ┘

④ Es soll das polare Trägheitsmoment der Ellipse

$$B := \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

bezüglich  $O$  bestimmt werden — gemeint ist das Integral

$$\Theta := \int_B (x^2 + y^2) d\mu(x, y) .$$

In sinngemäßer Abwandlung von Polarkoordinaten verwenden wir für  $B$  die Parameterdarstellung

$$(t, \phi) \mapsto \begin{cases} x := at \cos \phi \\ y := bt \sin \phi \end{cases}$$

mit dem Phantombereich

$$\tilde{B} := [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

(Fig. 5.4.8). Die Funktionalmatrix

$$\begin{bmatrix} x_t & x_\phi \\ y_t & y_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \phi & -at \sin \phi \\ b \sin \phi & bt \cos \phi \end{bmatrix}$$

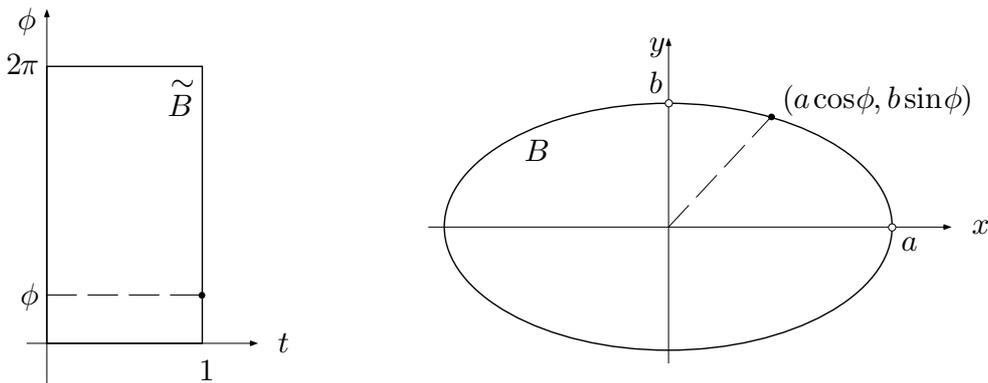


Fig. 5.4.8

besitzt die Determinante

$$J(t, \phi) = abt .$$

Damit erhalten wir nach Satz (5.15):

$$\Theta = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(t, \phi) |J(t, \phi)| d\mu(t, \phi) = \int_{\tilde{B}} (a^2 t^2 \cos^2 \phi + b^2 t^2 \sin^2 \phi) abt d\mu(t, \phi) .$$

Hier sind sowohl der Integrationsbereich  $\tilde{B}$  wie der Integrand Produkt eines “ $t$ -Faktors” mit einem “ $\phi$ -Faktor”; folglich ist auch das Integral ein derartiges Produkt:

$$\begin{aligned} \Theta &= ab \int_0^1 t^3 dt \cdot \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) d\phi \\ &= ab \cdot \frac{1}{4} \cdot (a^2 \pi + b^2 \pi) = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) . \end{aligned}$$

○

## Aufgaben

1. Die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} := \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

sei definiert durch

$$y_i := \frac{x_i}{1 - x_1 - x_2 - x_3} \quad (1 \leq i \leq 3) .$$

Berechne die Funktionaldeterminante  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ .

2. In welchen Punkten der  $(u, v)$ -Ebene ist die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u^2 + 2v, 2v^2 - u, u + v)$$

nicht regulär?

3. Betrachte die komplex differenzierbare Funktion  $f(z) := (1+z)(i-z)$  bzw. die zugehörige Abbildung  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . In welchen Punkten ist  $d\mathbf{f}$  nicht regulär? Welchen Rang hat dort  $d\mathbf{f}$ ?

4. Die komplexe Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto w := z^3$$

läßt sich via  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  als Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v)$$

auffassen.

- (a) Bestimme  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $x$  und  $y$ .
  - (b) Berechne die Funktionaldeterminante  $J_{\mathbf{f}}(x, y)$ .
  - (c) In welchen Punkten der  $(x, y)$ -Ebene ist  $\mathbf{f}$  nicht regulär?
5. Im  $(x, y, z)$ -Raum werden die beiden Flächen  $S_1: z = y^2$  und  $S_2: z = x^3$  betrachtet. Ihre Schnittkurve  $\gamma$  besitzt im Ursprung eine Singularität.
- (a) Stelle eine instruktive Figur dieser Situation her.
  - (b) Mit dem Auftreten einer Singularität mußte von vorneherein gerechnet werden. Warum?
6. Der Körper  $B \subset \mathbb{R}^3$  entsteht durch eine geringfügige Deformation der Einheitskugel, und zwar trifft der von  $\mathbf{0}$  ausgehende Strahl mit geographischen Daten  $(\phi, \theta)$  die Oberfläche von  $B$  im Abstand

$$r(\phi, \theta) := 1 + \varepsilon \sin \phi \cos \theta \quad \left( \phi \in \mathbb{R}/(2\pi), \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right),$$

$\varepsilon$  eine sehr kleine positive Zahl. Bestimme das Volumen von  $B$ .

7. In Fig. 5.6.17 ist eine **Astroide**

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0 \text{ fest})$$

dargestellt. Berechne den eingeschlossenen Flächeninhalt. (*Hinweis:* Stelle den im ersten Quadranten liegenden Teil der Fläche in naheliegender Weise als Bild eines Kreissektors dar.)

## 5.5 Extrema

### 1. Lektion: Kritische Punkte

Im mehrdimensionalen Environment sehen Extremalaufgaben typischer Weise folgendermaßen aus: Gegeben sind eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sowie eine Menge  $M \subset \text{dom}(f)$ . Im allgemeinen liegt  $f$  als Ausdruck vor, und  $M$  wird durch Gleichungen und Ungleichungen beschrieben.

$$\text{Bsp: } f(x, y, z) := xy + 2yz + 3zx, \\ M := \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Gesucht sind die Zahlen

$$\min_{\mathbf{x} \in M} f(\mathbf{x}), \quad \max_{\mathbf{x} \in M} f(\mathbf{x})$$

sowie die Punkte  $\mathbf{x} \in M$ , in denen diese **globalen Extrema** von  $f$  auf  $M$  angenommen werden. Die Menge  $M$  ist typischer Weise ein echt  $n$ -dimensionaler Bereich  $B$  mit niedrigerdimensionalen Seitenflächen, Kanten und Ecken oder selber ein niedrigerdimensionales Objekt, etwa ein Flächenstück im dreidimensionalen Raum, siehe das obige Beispiel.

Wir gehen bei der weiteren Diskussion davon aus, daß in  $M$  eine Extremalstelle der gesuchten Art tatsächlich vorhanden ist. Satz (3.2) garantiert, daß diese Annahme zutrifft, wenn  $f$  stetig ist und  $M$  kompakt.

Wie im eindimensionalen Fall hilft uns die Differentialrechnung, lokale Extremalstellen im Inneren eines Bereichs  $B$  zum Vorschein zu bringen. Innere Punkte  $\mathbf{x}$  eines Bereichs  $B \subset \mathbb{R}^n$  sind dadurch gekennzeichnet, daß man von einem solchen  $\mathbf{x}$  aus in allen Richtungen des  $\mathbb{R}^n$  ein Stück weit gehen kann, ohne  $B$  zu verlassen. Das spielt in dem folgenden Lemma eine entscheidende Rolle.

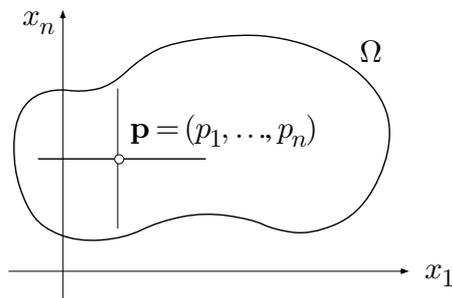


Fig. 5.5.1

**(5.16)** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion. Ist  $f$  an der Stelle  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \Omega$  lokal extremal, so ist  $\mathbf{p}$  notwendigerweise ein kritischer Punkt von  $f$ ; das heißt: Es gilt

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad f_{.k}(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n) .$$

┌ Ist  $f$  im Punkt  $\mathbf{p}$  (Fig. 5.5.1) zum Beispiel lokal maximal, so ist auch die partielle Funktion

$$\psi(x_1) := f(x_1, p_2, \dots, p_n)$$

der *einen* Variablen  $x_1$  in dem inneren Punkt  $p_1$  ihres Definitionsbereichs lokal maximal, folglich ist

$$f_{.1}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \psi'(p_1) = 0 .$$

Da dieses Argument für alle Koordinatenrichtungen gilt, folgt die Behauptung.

Man kann es auch so sehen: Ist  $\nabla f(\mathbf{p}) =: \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ , so nimmt  $f$  zu, wenn man den Punkt  $\mathbf{p}$  in spitzem Winkel zu  $\mathbf{A}$  verläßt (Fig. 5.5.2), und  $f$  nimmt ab, wenn man  $\mathbf{p}$  in stumpfem Winkel zu  $\mathbf{A}$  verläßt. An einer derartigen Stelle  $\mathbf{p}$  kann  $f$  nicht lokal extremal sein. ┘

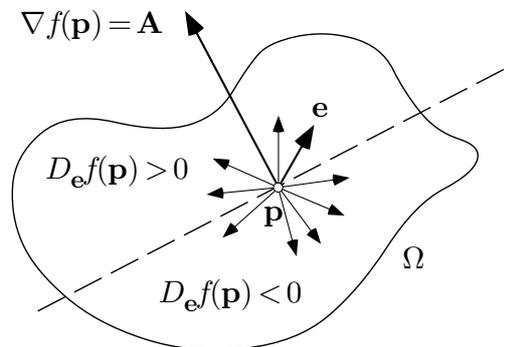


Fig. 5.5.2

Aus Lemma (5.16) folgt: Wird das gesuchte globale Extremum im Inneren des  $n$ -dimensionalen Bereichs  $B$  angenommen, so kommt es bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} f_{.1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{.n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} , \quad (1)$$

bzw. in Variablen  $x, y$ :

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

automatisch zum Vorschein. Die betreffende Extremalstelle  $\mathbf{p} \in B$  ist ja auch lokale Extremalstelle und somit nach Lemma (5.16) ein kritischer Punkt der Funktion  $f$ .

Die Lösungsmenge von (1) kann aber außer  $\mathbf{p}$  noch weitere Punkte enthalten: kritische Punkte von  $f$ , die nicht in  $B$  liegen, und solche, die vom falschen Typ sind. Die ersteren sind sofort zu streichen, die zweiten mit Hilfe eines Wertvergleichs auszumerzen.

① Die in Beispiel 5.2.④ betrachtete Funktion

$$f(x, y) := \cos(x + 2y) + \cos(2x + 3y)$$

ist in der ganzen Ebene definiert, stetig und in beiden Variablen  $2\pi$ -periodisch. Wendet man Satz (3.2) auf  $f$  und den "Fundamentalbereich"  $[-\pi, \pi]^2$  an, so folgt, daß  $f$  auf der Menge  $M := \mathbb{R}^2$  globale Extrema annimmt. Da  $M$  offen ist, sind die Extremalstellen notwendigerweise kritische Punkte von  $f$ , gehören also zur Menge der Punkte  $\mathbf{z}_{kl} := (k\pi, l\pi)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

Man berechnet

$$f(\mathbf{z}_{00}) = 2, \quad f(\mathbf{z}_{10}) = f(\mathbf{z}_{01}) = 0, \quad f(\mathbf{z}_{11}) = -2,$$

und aus Periodizitätsgründen sind das schon alle kritischen Werte. Der Wertvergleich zeigt

$$\min_{\mathbf{z} \in M} f(\mathbf{z}) = -2, \quad \max_{\mathbf{z} \in M} f(\mathbf{z}) = 2,$$

wie erwartet. — Für den hier verfolgten Zweck (Bestimmung der globalen Extrema von  $f$ ) ist es also nicht nötig, die kritischen Punkte weiter zu analysieren.  $\circ$

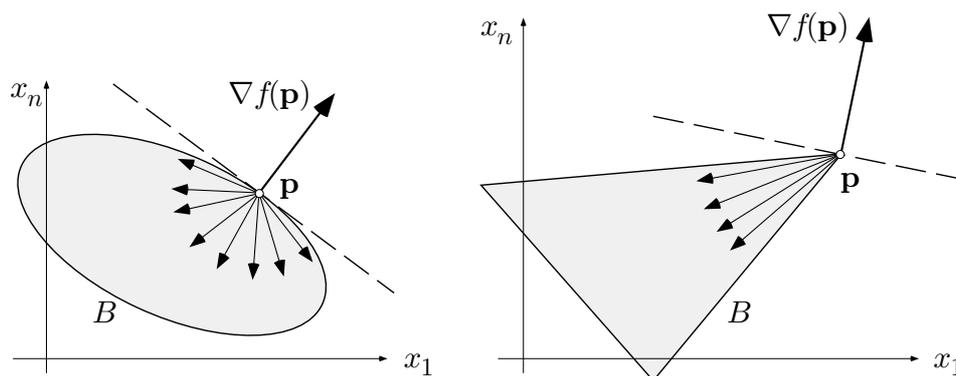


Fig. 5.5.3

## Der Suchalgorithmus für globale Extrema

Wird aber das gesuchte globale Extremum in einem Randpunkt  $\mathbf{p}$  des Bereichs  $B$  angenommen, so braucht  $\nabla f$  in dem betreffenden Punkt nicht zu verschwinden. Die Figur 5.5.3 zeigt dazu zwei Beispiele: Alle von  $\mathbf{p}$  aus ins Innere von  $B$  weisenden Richtungen bilden mit  $\nabla f(\mathbf{p})$  einen stumpfen Winkel; folglich nimmt  $f$  in allen von  $\mathbf{p}$  aus erlaubten Richtungen ab. Der Punkt  $\mathbf{p}$  könnte also ohne weiteres globale Maximalstelle von  $f$  auf  $B$  sein, obwohl  $\nabla f(\mathbf{p})$  nicht verschwindet.

② Hier noch ein ganz simples Beispiel: Es sei

$$f(x, y, z) := z$$

und  $B$  die volle Einheitskugel. Dann gilt natürlich

$$\max_{\mathbf{r} \in B} f(\mathbf{r}) = 1,$$

und Maximalstelle ist der Nordpol  $(0, 0, 1)$ . Andererseits ist

$$\nabla f(x, y, z) \equiv (0, 0, 1) \neq \mathbf{0}.$$

Die Funktion  $f$  besitzt also keine kritischen Punkte, und die Auflösung des Gleichungssystems (1) bringt nichts. ○

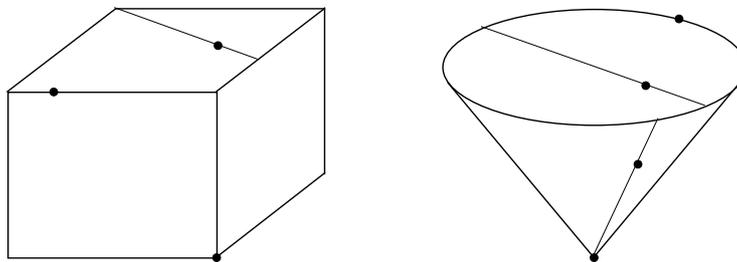


Fig. 5.5.4

Die Figur 5.5.4 belegt den folgenden Sachverhalt: Jeder Randpunkt  $\mathbf{p}$  von  $B$  liegt im “relativen Inneren” einer Seitenfläche oder einer Kante von  $B$ , oder  $\mathbf{p}$  ist eine “Ecke” von  $B$ . Das gibt uns die Chance, auch randständige Extremalstellen mit Hilfe der Differentialrechnung zum Vorschein zu bringen: Es sei nämlich  $S$  eine derartige  $d$ -dimensionale “Seitenfläche”,  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^d$  ein geeigneter Parameterbereich und

$$\mathbf{x}(\cdot) : \tilde{S} \rightarrow S, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u}) \quad (2)$$

eine Parameterdarstellung von  $S$  (in den folgenden Beispielen ist immer  $d = 1$  oder  $d = 2$ ). Der Pullback

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) := f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \quad (\mathbf{u} \in \tilde{S})$$

“produziert” dann gerade die Funktionswerte von  $f$  auf dieser Seitenfläche.

Wir nehmen jetzt an, es sei der “relativ innere” Punkt  $\mathbf{p} \in S$  eine globale Maximalstelle von  $f$  auf  $B$ , und es sei  $\mathbf{a} \in \tilde{S}$  der zugehörige Parameterpunkt (Fig. 5.5.5). Dann gilt

$$\forall \mathbf{u} \in \tilde{S} : \quad \tilde{f}(\mathbf{u}) \leq \tilde{f}(\mathbf{a}) .$$

Somit liegt folgende Situation vor: Der Punkt  $\mathbf{a}$  ist aufgrund unserer Annahme über  $\mathbf{p}$  ein innerer Punkt der Menge  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^d$ , und  $\tilde{f}$  ist an der Stelle  $\mathbf{a}$  lokal maximal. Nach Lemma (5.16) muß daher gelten:

$$\nabla \tilde{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

(bzw.  $\tilde{f}'(\mathbf{a}) = 0$ , falls  $S$  eindimensional ist). Folglich kommt der Punkt  $\mathbf{a}$  (bzw.  $a$ ) beim Auflösen der Gleichung  $\nabla \tilde{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , das heißt:

$$\tilde{f}_{.k}(u_1, \dots, u_d) = 0 \quad (1 \leq k \leq d) \quad (\text{bzw. } \tilde{f}'(t) = 0)$$

zum Vorschein, eventuell zusammen mit anderen kritischen Punkten  $\mathbf{a}_i \in \tilde{S}$ . Die zugehörigen Punkte  $\mathbf{p}_i := \mathbf{x}(\mathbf{a}_i)$  auf  $S$  wollen wir **bedingt kritische Punkte** von  $f$  (bezüglich  $S$ ) nennen; der hauptsächlich interessierende Punkt  $\mathbf{p}$  befindet sich bestimmt dabei.

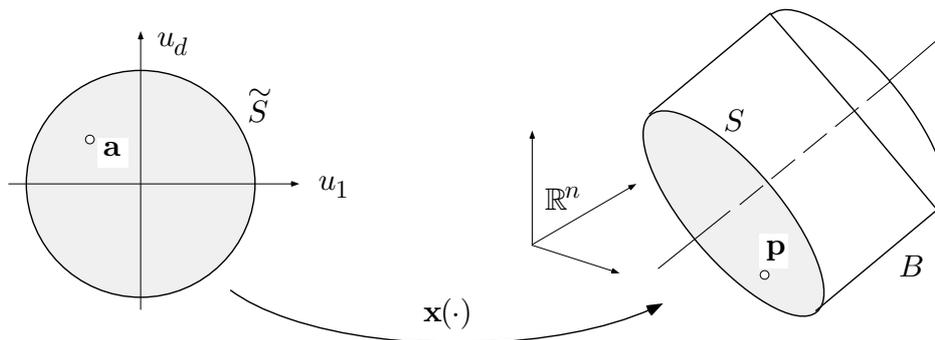


Fig. 5.5.5

Nach diesen Ausführungen ist klar, wie man zur Berechnung der globalen Extrema einer Funktion  $f$  auf einem  $n$ -dimensionalen Bereich  $B$  vorzugehen hat:

- Man bestimme alle kritischen Punkte von  $f$  im Inneren von  $B$  sowie
- die bedingt kritischen Punkte im “relativen Inneren” jeder  $d$ -dimensionalen Seitenfläche,  $0 < d < n$ .

Zu dieser Kollektion von Punkten füge man

- die Ecken von  $B$

hinzu und hat dann im allgemeinen eine endliche Liste von Punkten (“Kandidaten”)

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\} \subset B. \quad (3)$$

Diese Liste enthält notwendigerweise alle Maximalstellen von  $f$  auf  $B$ ; somit ist

$$\max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq N} f(\mathbf{p}_i),$$

und analog für das Minimum. Nachdem man die Liste (3) einmal hat, können also die globalen Extrema durch einen einfachen Wertvergleich ermittelt werden.

③ Es sollen die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) := x^3 - 18x^2 + 81x + 12y^2 - 144y + 24xy$$

auf dem Bereich

$$B := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10\}$$

(Fig. 5.5.6) bestimmt werden.

Wir suchen zunächst die kritischen Punkte von  $f$  im Inneren von  $B$  mit Hilfe der Gleichungen

$$(f_x =) \quad 3x^2 - 36x + 81 + 24y = 0, \quad (4)$$

$$(f_y =) \quad 24y - 144 + 24x = 0. \quad (5)$$

Aus (5) folgt  $y = 6 - x$ . Wird dies in (4) eingesetzt, so resultiert für  $x$  die quadratische Gleichung

$$3x^2 - 36x + 81 + 24(6 - x) = 3(x^2 - 20x + 75) = 0$$

mit den Lösungen  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 15$ . Von diesen ist die zweite zu verwerfen, da sie keinen Punkt in  $B$  liefert. Somit erhalten wir den einzigen kritischen Punkt  $P_1 := (5, 1)$  im Inneren von  $B$ .

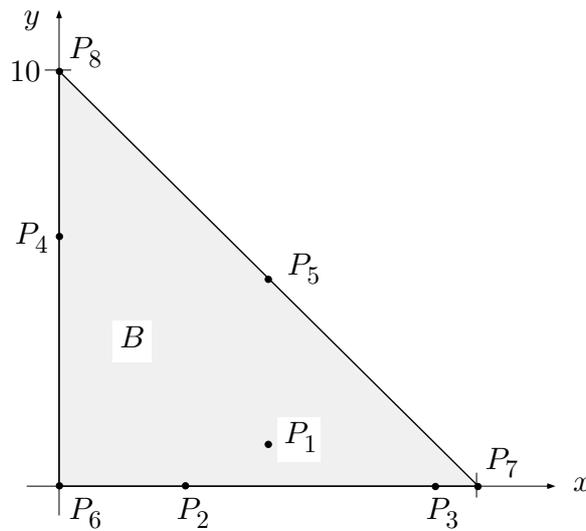


Fig. 5.5.6

Wir müssen nun die bedingt kritischen Punkte von  $f$  auf den drei Kanten von  $B$  bestimmen. Für die untere Kante müssen wir die Funktion

$$g_1(x) := f(x, 0) = x^3 - 18x^2 + 81x$$

(das ist der Pullback von  $f$  bezüglich der Parameterdarstellung  $x \mapsto (x, 0)$ ) untersuchen. Die Ableitung

$$g_1'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 3(x^2 - 12x + 27)$$

besitzt die beiden Nullstellen  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 9$ , die die beiden bedingt kritischen Punkte  $P_2 := (3, 0)$ ,  $P_3 := (9, 0)$  anzeigen.

Für die vertikale Kante haben wir analog die Funktion

$$g_2(y) := f(0, y) = 12y^2 - 144y$$

zu betrachten. Die Ableitung

$$g_2'(y) = 24y - 144$$

besitzt die einzige Nullstelle  $y = 6$ , was uns den weiteren Punkt  $P_4 := (0, 6)$  liefert.

Die dritte Kante schließlich hat die Gleichung  $y = 10 - x$ . Wir bilden daher die Funktion

$$\begin{aligned} g_3(x) &:= f(x, 10 - x) \\ &= x^3 - 18x^2 + 81x + 12(10 - x)^2 - 144(10 - x) + 24x(10 - x) \\ &= x^3 - 30x^2 + 225x - 240 \end{aligned}$$

mit der Ableitung

$$g'_3(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x^2 - 20x + 75) .$$

Die Nullstellen sind  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 15$ , wobei die zweite gleich gestrichen werden kann. Damit haben wir den letzten bedingt kritischen Punkt  $P_5 := (5, 5)$ .

Wir fügen noch die Eckpunkte  $P_6 := (0, 0)$ ,  $P_7 := (10, 0)$ ,  $P_8 := (0, 10)$  hinzu und haben damit die endgültige Kandidatenliste. Die zugehörigen Funktionswerte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$P_i$	(5,1)	(3,0)	(9,0)	(0,6)	(5,5)	(0,0)	(10,0)	(0,10)
$f(P_i)$	68	108	0	-432	260	0	10	-240

Dieser Tabelle entnehmen wir:

$$\min_{(x,y) \in B} f(x,y) = f(0,6) = -432, \quad \max_{(x,y) \in B} f(x,y) = f(5,5) = 260 .$$

○

④ Es sollen die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := -\sqrt{3}x + 3y + 2z$$

auf der Einheitskugel  $B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  bestimmt werden.

Der Gradient  $\nabla f(x, y, z) \equiv (-\sqrt{3}, 3, 2)$  ist durchwegs  $\neq \mathbf{0}$ ; folglich werden die gesuchten Extrema sicher nicht im Inneren von  $B$  angenommen. Für die Oberfläche  $\partial B$  verwenden wir die Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot) : (\phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x = \cos \theta \cos \phi \\ y = \cos \theta \sin \phi \\ z = \sin \theta \end{cases} \quad \left( \phi \in \mathbb{R}/2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right), \quad (6)$$

wobei allerdings Nord- und Südpol extra betrachtet werden müssen, da diese beiden Punkte von  $\mathbf{r}(\cdot, \cdot)$  nicht produziert werden. Die Funktion  $f$  erhält in den neuen Variablen die Form

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\phi, \theta) &= f(x(\phi, \theta), y(\phi, \theta), z(\phi, \theta)) \\ &= (-\sqrt{3} \cos \phi + 3 \sin \phi) \cos \theta + 2 \sin \theta . \end{aligned}$$

Wir haben somit das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{f}_\phi =) & \quad (\sqrt{3} \sin \phi + 3 \cos \phi) \cos \theta = 0 \\ (\tilde{f}_\theta =) & \quad (\sqrt{3} \cos \phi - 3 \sin \phi) \sin \theta + 2 \cos \theta = 0 \end{aligned} \right\}$$

aufzulösen. Aus der ersten Gleichung folgt wegen  $\cos \theta \neq 0$  nacheinander

$$\sqrt{3} \sin \phi + 3 \cos \phi = 0, \quad \tan \phi = -\sqrt{3}$$

mit den Lösungen  $\phi_1 = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\phi_2 = \frac{2\pi}{3}$ . Setzen wir in der zweiten Gleichung  $\phi := -\frac{\pi}{3}$ , so erhalten wir für  $\theta$  nacheinander die Gleichungen

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \sin \theta + 2 \cos \theta = 0, \quad 2\sqrt{3} \sin \theta + 2 \cos \theta = 0, \quad \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

und dies liefert den Wert  $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ . Analog erhält man für  $\phi := \frac{2\pi}{3}$  aus der zweiten Gleichung den Wert  $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ .

Hiernach besitzt  $\tilde{f}$  die beiden kritischen Punkte

$$\mathbf{a}_1 := \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right), \quad \mathbf{a}_2 := \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

in der  $(\phi, \theta)$ -Ebene. Zu diesen gehören vermöge (6) die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\mathbf{p}_1 := \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{p}_2 := \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

von  $f$  auf  $\partial B$ . Die Kandidatenliste ist noch durch die beiden Pole

$$\mathbf{p}_3 := (0, 0, 1), \quad \mathbf{p}_4 := (0, 0, -1)$$

zu ergänzen, worauf der Wertvergleich durchgeführt werden kann. Aufgrund von

$$f(\mathbf{p}_1) = -4, \quad f(\mathbf{p}_2) = 4, \quad f(\mathbf{p}_3) = 2, \quad f(\mathbf{p}_4) = -2$$

liefert er

$$\min_{\mathbf{r} \in B} f(\mathbf{r}) = -4, \quad \max_{\mathbf{r} \in B} f(\mathbf{r}) = 4.$$

Wir werden auf dieses Beispiel zurückkommen. Die bedingt kritischen Punkte  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  lassen sich nämlich auf wesentlich einfachere Weise bestimmen, und die Punkte  $\mathbf{p}_3$ ,  $\mathbf{p}_4$  sollten von Rechts wegen gar nicht in Erscheinung treten, da sie nichts mit dem gegebenen Problem, sondern nur etwas mit der für  $\partial B$  gewählten Parameterdarstellung zu tun haben.  $\bigcirc$

## Bedingt kritische Punkte, geometrisch betrachtet

Wir sind hier immer davon ausgegangen, daß die  $d$ -dimensionalen Seitenflächen eines Bereichs  $B$  in Parameterdarstellung vorliegen. Eine derartige Parameterdarstellung ist jedoch nicht immer greifbar, oder sie kann zu umständlichen Rechnungen führen wie im vorangehenden Beispiel. Vor allem aber gibt es Extremalaufgaben, die von Anfang an nicht in der bis jetzt verwendeten geometrischen Einkleidung daherkommen, sondern als sogenannte **Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen**. Hier wird das Maximum (Minimum) einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}$  gesucht, wobei aber die an sich unabhängigen und gleichberechtigten Variablen  $x_1, \dots, x_n$  durch  $r$  Gleichungen der Form

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

in ihrer Variabilität eingeschränkt sind. Diese  $r$  Nebenbedingungen, meist ist  $r = 1$ , definieren eine "Fläche"  $S \subset \mathbb{R}^n$  der Dimension (= "Anzahl Freiheitsgrade")  $d := n - r$ . Nur die Punkte  $\mathbf{x} \in S$  werden zur Konkurrenz zugelassen, und die Funktionswerte in den Punkten  $\mathbf{x} \notin S$  fallen vollständig außer Betracht. Die gesuchte Größe

$$\max_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$$

ist das **bedingte Maximum** von  $f$  bezüglich  $S$ , und die Punkte  $\mathbf{p} \in S$ , wo dieses Maximum angenommen wird, sind **bedingte Maximalstellen** von  $f$ ; analog für das Minimum.

⑤ Die  $n$  nichtnegativen Zahlen  $x_k$  haben die vorgegebene Summe  $s > 0$ :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s. \quad (7)$$

Welches ist der maximal mögliche Wert des Produkts dieser  $n$  Zahlen? — Es geht hier um das Maximum der Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

unter der Nebenbedingung (7) und der weiteren Einschränkung

$$x_k \geq 0 \quad (1 \leq k \leq n),$$

oder eben um das bedingte Maximum von  $f$  bezüglich der durch (7) definierten  $(n - 1)$ -dimensionalen Fläche  $S \subset \mathbb{R}^n$ . ○

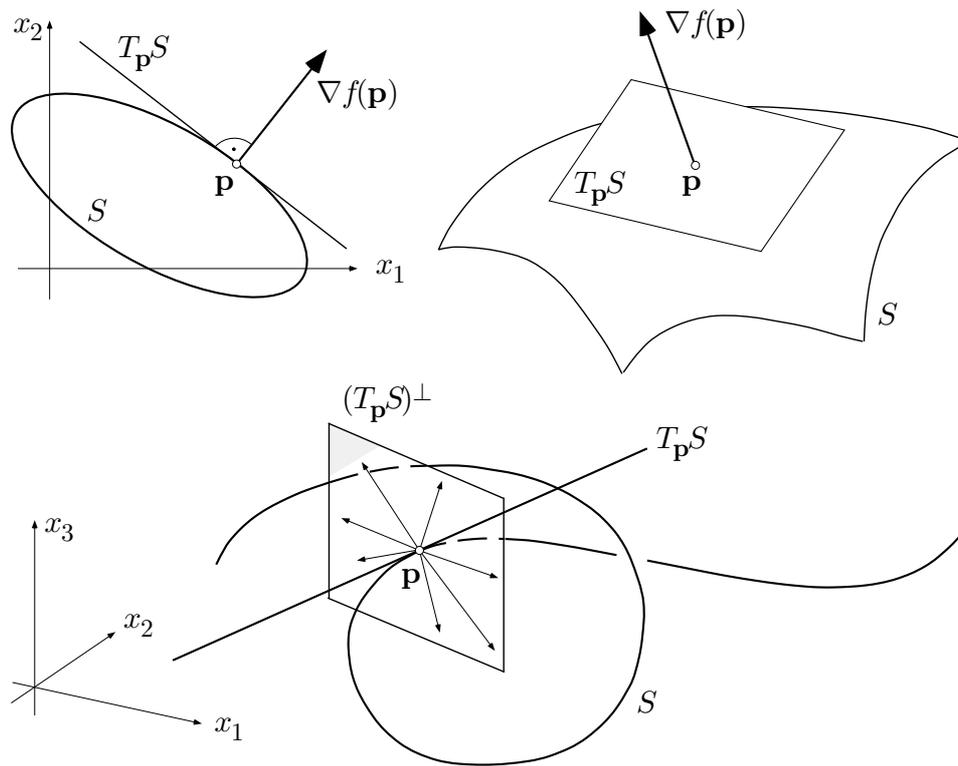


Fig. 5.5.7

Um hier weiterzukommen, benötigen wir eine Charakterisierung der bedingt kritischen Punkte (s.o.), die nicht auf eine vorgegebene Parameterdarstellung von  $S$  Bezug nimmt. Die folgende geometrische Erklärung ist äquivalent mit der früher gegebenen (ohne Beweis): Der Punkt  $\mathbf{p} \in S$  ist ein **bedingt kritischer Punkt** von  $f$  bezüglich  $S$ , wenn der Gradient  $\nabla f(\mathbf{p})$  auf der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$  senkrecht steht. Mit Hilfe dieses Begriffs können wir folgende “bedingte Version” von Lemma (5.16) formulieren, siehe dazu die Fig. 5.5.7:

**(5.17)** *Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion und  $S \subset \text{dom}(f)$  eine  $d$ -dimensionale “Fläche”. Ist  $f$  im Punkt  $\mathbf{p} \in S$  bedingt lokal extremal bezüglich  $S$ , so ist  $\mathbf{p}$  ein bedingt kritischer Punkt von  $f$ ; das heißt: Es ist*

$$\nabla f(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}S .$$

□ Steht  $\nabla f(\mathbf{p}) =: \mathbf{A}$  nicht senkrecht auf  $T_{\mathbf{p}}S$ , so gibt es in  $T_{\mathbf{p}}S$  eine Richtung  $\mathbf{e}$ , die mit  $\mathbf{A}$  einen spitzen Winkel bildet. Verläßt man  $\mathbf{p}$  längs einer Kurve  $\gamma \subset S$  in Richtung  $\mathbf{e}$  (Fig. 5.5.8), so nimmt  $f$  zu wegen

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} > 0 ;$$

in der entgegengesetzten Richtung nimmt  $f$  ab wegen

$$D_{-\mathbf{e}}f(\mathbf{p}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} < 0 .$$

Unter diesen Umständen kann  $f$  im Punkt  $\mathbf{p}$  nicht bedingt lokal extremal sein.  $\perp$

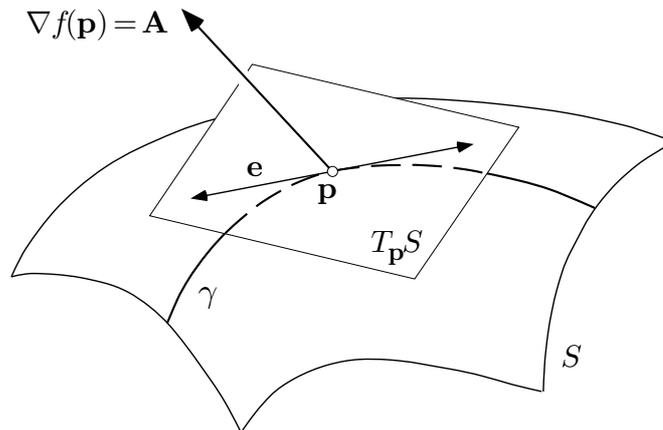


Fig. 5.5.8

## Die Methode von Lagrange

Wie findet man die bedingt kritischen Punkte? — Die Menge  $S$  der zugelassenen Punkte sei zunächst durch *eine* Gleichung (Nebenbedingung)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

definiert, wobei wir annehmen wollen, daß in allen Punkten  $\mathbf{x} \in S$  gilt:

$$\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} .$$

Dann ist  $S$  nach Satz (5.11) bzw. seinem Analogon für Funktionen  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , eine glatte  $(n - 1)$ -dimensionale "Fläche" und besitzt in jedem Punkt  $\mathbf{p}$  eine Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ , deren eindimensionales orthogonales Komplement  $(T_{\mathbf{p}}S)^\perp$ , vulgo: **Normale**, erzeugt wird von  $\nabla F(\mathbf{p})$ . Hieraus folgt: Ist  $\mathbf{p}$  ein bedingt kritischer Punkt von  $f$  bezüglich  $S$ , so gilt  $F(\mathbf{p}) = 0$  und nach Lemma (5.17) *zusätzlich*

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla F(\mathbf{p})$$

für ein geeignetes  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Fig. 5.5.9). Der Punkt  $\mathbf{p}$  kommt daher bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} F(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_{.k}(x_1, \dots, x_n) = \lambda F_{.k}(x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq k \leq n) \end{array} \right\}$$

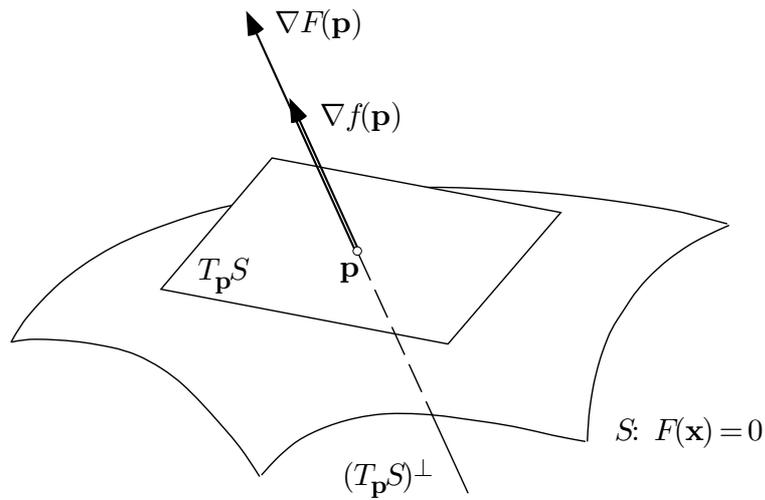


Fig. 5.5.9

von  $n+1$  Gleichungen in den  $n+1$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n, \lambda$  zum Vorschein. (Der Wert von  $\lambda$  wird an sich nicht benötigt.)

⑤ (Forts.) Die Menge  $S$  der zugelassenen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist ein sogenanntes  $(n-1)$ -**Simplex** im  $\mathbb{R}^n$ , insbesondere eine kompakte Menge (siehe die Fig. 5.5.10). In jedem Randpunkt dieses Simplex ist mindestens ein  $x_k = 0$  und damit auch  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Es folgt: Die Produktfunktion  $f$  nimmt auf  $S$  ein globales Maximum an, und zwar in einem relativ inneren Punkt  $\mathbf{p} \in S$ . Nach Lemma (5.17) ist  $\mathbf{p}$  ein bedingt kritischer Punkt von  $f$  bezüglich der Nebenbedingung

$$F(x_1, \dots, x_n) := x_1 + x_2 + \dots + x_n - s = 0.$$

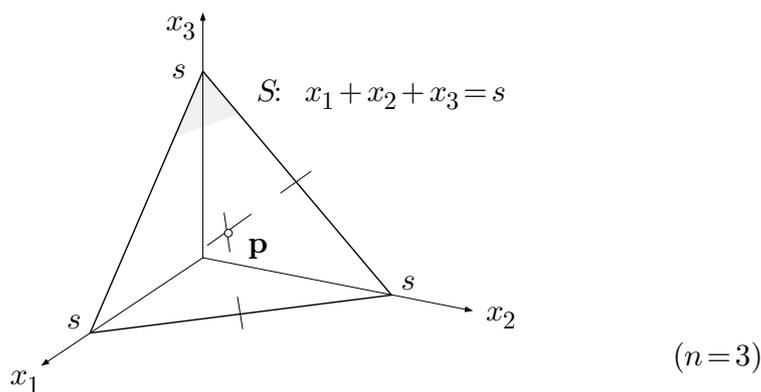


Fig. 5.5.10

Die  $n$  Gleichungen

$$f_{.k}(\mathbf{x}) = \lambda F_{.k}(\mathbf{x}) \quad (1 \leq k \leq n)$$

lauten im vorliegenden Fall:

$$x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n = \lambda \cdot 1 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Multiplizieren wir die  $k$ -te Gleichung mit  $x_k$ , so folgt

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \lambda x_k \quad (1 \leq k \leq n).$$

Da hier die linke Seite von  $k$  nicht abhängt, müssen alle  $x_k$  denselben Wert haben, und aufgrund der Nebenbedingung ist das notwendigerweise der Wert

$$p_k := \frac{s}{n} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Damit ist der gesuchte bedingt kritische Punkt  $\mathbf{p}$  gefunden. Nach der Vorbemerkung gilt

$$\forall \mathbf{x} \in S : \quad f(x_1, \dots, x_n) \leq f(p_1, \dots, p_n);$$

somit haben wir

$$\forall \mathbf{x} \in S : \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n, \quad (8)$$

und unser am Anfang gestelltes Problem ist gelöst. Ziehen wir noch in (8) auf beiden Seiten die  $n$ -te Wurzel, so erhalten wir die berühmte **Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel** von  $n$  nichtnegativen Zahlen:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (x_k \geq 0),$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen nur dann, wenn alle  $x_k$  denselben Wert haben. ○

Wir diskutieren noch den folgenden Fall: Die Menge  $S$  der zugelassenen Punkte ist definiert durch zwei Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \wedge \quad G(x, y, z) = 0$$

in den Variablen  $x, y, z$ . Ein derartiges  $S$  läßt sich auffassen als Schnittkurve der beiden (gewöhnlichen) Flächen

$$S^F : F(x, y, z) = 0, \quad S^G : G(x, y, z) = 0,$$

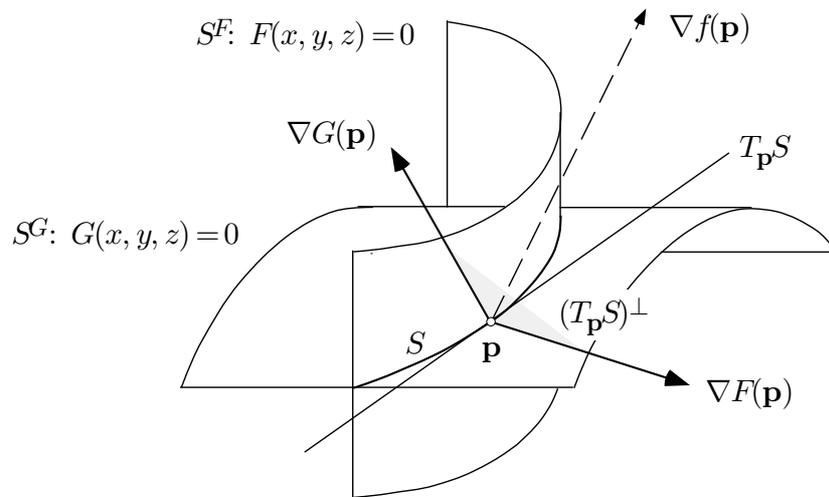


Fig. 5.5.11

wobei wir voraussetzen wollen, daß der Schnitt in allen Punkten  $\mathbf{p} \in S$  **transversal**, das heißt: nicht schleifend, erfolgt. Die Tangente  $T_{\mathbf{p}}S$  liegt in beiden Tangentialebenen  $T_{\mathbf{p}}S^F$ ,  $T_{\mathbf{p}}S^G$  und steht damit nach Satz (5.11) senkrecht auf den beiden Vektoren  $\nabla F(\mathbf{p})$ ,  $\nabla G(\mathbf{p})$ . Hieraus folgt (Fig. 5.5.11): Die Ebene  $(T_{\mathbf{p}}S)^\perp$  der auf  $T_{\mathbf{p}}S$  senkrecht stehenden Vektoren wird gerade von  $\nabla F(\mathbf{p})$  und  $\nabla G(\mathbf{p})$  aufgespannt; das heißt, es ist

$$(T_{\mathbf{p}}S)^\perp = \{ \lambda \nabla F(\mathbf{p}) + \mu \nabla G(\mathbf{p}) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} .$$

Es sei jetzt  $\mathbf{p}$  bedingt kritischer Punkt der Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$  bezüglich  $S$ . Nach Lemma (5.17) ist dann  $\nabla f(\mathbf{p}) \in (T_{\mathbf{p}}S)^\perp$ , somit gilt

$$F(\mathbf{p}) = 0, \quad G(\mathbf{p}) = 0$$

und zusätzlich

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla F(\mathbf{p}) + \mu \nabla G(\mathbf{p})$$

für geeignete  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Hieraus folgt: Der Punkt  $\mathbf{p}$  kommt bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, & G(x, y, z) &= 0 \\ f_x(x, y, z) &= \lambda F_x(x, y, z) + \mu G_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda F_y(x, y, z) + \mu G_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda F_z(x, y, z) + \mu G_z(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

von 5 Gleichungen in den 5 Unbekannten  $x, y, z, \lambda, \mu$  zum Vorschein.

Unsere Überlegungen führen per saldo zu dem folgenden allgemeinen Ansatz: Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion, und es sei die  $d$ -dimensionale "Fläche"  $S \subset \text{dom}(f)$  definiert durch die  $r := n - d$  Gleichungen

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

mit  $C^1$ -Funktionen  $F_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Man bilde nun mit  $r$  Hilfsvariablen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die sogenannte **Lagrangesche Prinzipalfunktion**

$$\Phi(\mathbf{x}, \lambda) := f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 F_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_r F_r(x_1, \dots, x_n)$$

(ein rein formales Konstrukt ohne geometrische Interpretation). Die Hilfsvariablen  $\lambda_j$  heißen **Lagrangesche Multiplikatoren**. Dann gilt der folgende Satz, der zusammen mit Lemma (5.17) ermöglicht, bedingte lokale Extremalstellen von  $f$  auf  $S$  herauszubekommen:

**(5.18)** ( *$S, f$  und  $\Phi$  haben die angegebene Bedeutung.*) Die bedingt kritischen Punkte von  $f$  auf  $S$  kommen bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} F_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 \leq j \leq r) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0 \quad (1 \leq k \leq n) \end{array} \right\}$$

( $r + n$  Gleichungen in  $n + r$  Unbekannten) zum Vorschein.

## Zwei Beispiele

④ (Forts.) Die Oberfläche  $\partial B$  der Einheitskugel ist gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Zur Bestimmung der bedingt kritischen Punkte von  $f$  auf  $\partial B$  setzen wir die Prinzipalfunktion

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, \lambda) &:= f(x, y, z) - \lambda F(x, y, z) \\ &= -\sqrt{3}x + 3y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

an. Nach Satz (5.18) haben wir jetzt das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (\Phi_x =) \quad -\sqrt{3} - 2\lambda x = 0 \\ (\Phi_y =) \quad 3 - 2\lambda y = 0 \\ (\Phi_z =) \quad 2 - 2\lambda z = 0 \end{array} \right\}$$

nach  $x, y, z$  und allenfalls  $\lambda$  aufzulösen. Es folgt

$$x = \frac{-\sqrt{3}}{2\lambda}, \quad y = \frac{3}{2\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

und somit

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 \right) = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Hiernach ist  $\lambda = \pm 2$ , und wir erhalten die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\mathbf{p}_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{p}_2 = \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right),$$

wie vorher, während die "Geister"  $\mathbf{p}_3$  und  $\mathbf{p}_4$  nicht mehr auftauchen.  $\circ$

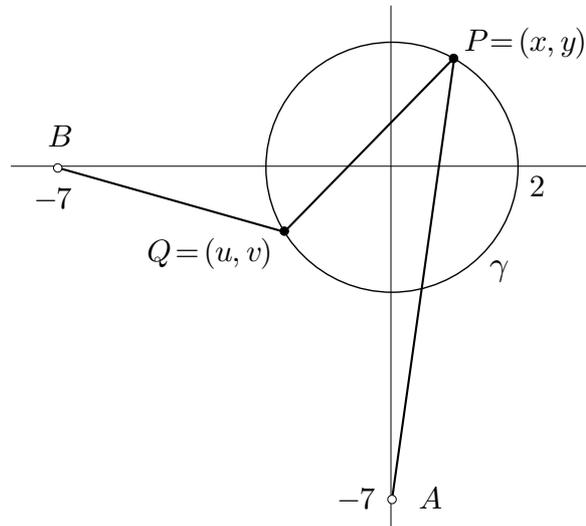


Fig. 5.5.12

⑥ Gegeben sind die Punkte  $A := (0, -7)$  und  $B := (-7, 0)$  sowie der Kreis  $\gamma$  vom Radius 2 um  $O$  (Fig. 5.5.12). Es sollen zwei Punkte  $P, Q \in \gamma$  so bestimmt werden, daß die Größe

$$d(P, Q) := |AP|^2 + |PQ|^2 + |QB|^2$$

maximal (minimal) wird. Mit  $P := (x, y)$ ,  $Q := (u, v)$  wird  $d$  eine Funktion der vier Variablen  $x, y, u, v$ , wobei diese vier Variablen den zwei Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &:= x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ G(u, v) &:= u^2 + v^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

unterworfen sind. Die Nebenbedingungen legen eine zweidimensionale Fläche  $S \subset \mathbb{R}^4$  fest. Da  $P$  und  $Q$  unabhängig voneinander auf dem Kreis  $\gamma$  gewählt werden können, ist  $S$  das kartesische Produkt von zwei Kreisen, also eine Torusfläche. Wir bilden die Prinzipalfunktion

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, u, v, \lambda, \mu) &:= d(x, y, u, v) - \lambda F(x, y) - \mu G(u, v) \\ &= x^2 + (y + 7)^2 + (x - u)^2 + (y - v)^2 + (u + 7)^2 + v^2 \\ &\quad - \lambda(x^2 + y^2 - 4) - \mu(u^2 + v^2 - 4)\end{aligned}$$

und erhalten neben (9) die folgenden Gleichungen für die bedingt stationären Punkte:

$$\left. \begin{array}{l} (\Phi_x =) \quad 2x + 2(x - u) \quad -2\lambda x = 0 \\ (\Phi_y =) \quad 2(y + 7) + 2(y - v) \quad -2\lambda y = 0 \\ (\Phi_u =) \quad 2(u - x) + 2(u + 7) \quad -2\mu u = 0 \\ (\Phi_v =) \quad 2(v - y) + 2v \quad -2\mu v = 0 \end{array} \right\} .$$

Multipliziert man hier die erste Gleichung mit  $-y$ , die zweite mit  $x$  und addiert, so hebt sich einiges heraus, und es ergibt sich

$$2(uy - vx) + 14x = 0 . \quad (10)$$

Analog: Multipliziert man die dritte Gleichung mit  $v$ , die vierte mit  $-u$  und addiert, so erhält man nach Vereinfachung

$$2(uy - vx) + 14v = 0 ,$$

zusammen mit (10) also

$$v = x . \quad (11)$$

Hieraus ergibt sich weiter wegen (9) die Relation

$$u^2 = 4 - v^2 = 4 - x^2 = y^2$$

und somit (a):  $u = y$ , oder (b):  $u = -y$ .

Wir können nun  $u$  und  $v$  aus (10) eliminieren. Im Fall (a) erhalten wir die Gleichung  $2(y^2 - x^2) + 14x = 0$ , zusammen mit  $x^2 + y^2 = 4$  also

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

mit den beiden Lösungen  $x = 4$  und  $x = -\frac{1}{2}$ . Die erste ist wegen  $|x| > 2$  zu verwerfen; zu der zweiten gehören die  $y$ -Werte  $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ . Aufgrund von (11) und (a) erhalten wir damit die beiden folgenden Punktepaare  $(P, Q)$ :

$$\begin{aligned}P_1 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), & Q_1 &= \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right); \\ P_2 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), & Q_2 &= \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

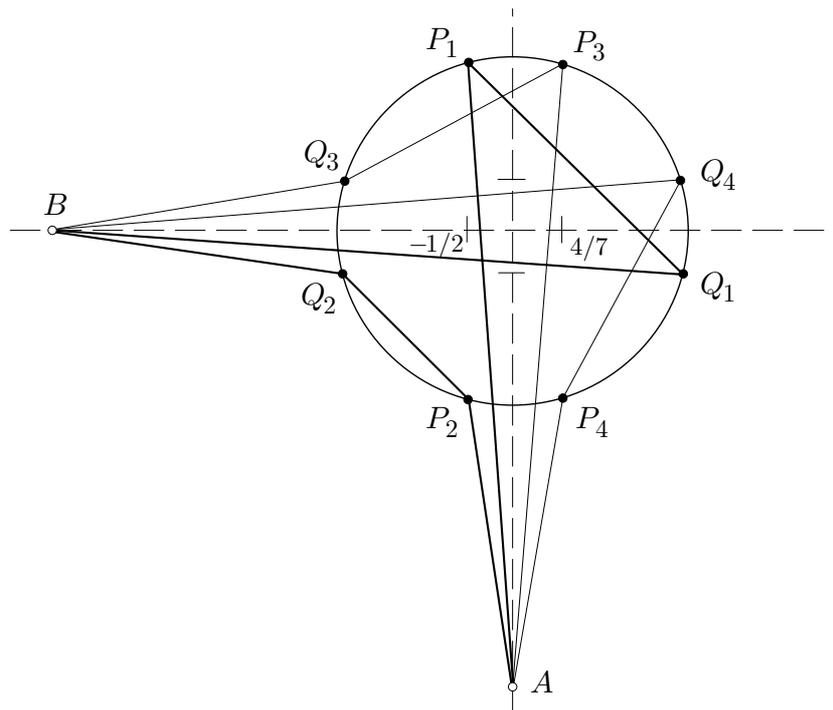


Fig. 5.5.13

Im Fall (b) hingegen liefert die Elimination von  $u$  und  $v$  aus (10) zunächst

$$-2(y^2 + x^2) + 14x = 0,$$

und dies führt im Verein mit  $x^2 + y^2 = 4$  auf eine lineare Gleichung für  $x$  mit der Lösung  $x = \frac{4}{7}$ . Hierzu gehören die  $y$ -Werte  $y = \pm \frac{6\sqrt{5}}{7}$ , und wir erhalten mit Hilfe von (11) und (b) die beiden weiteren Punktepaare

$$\begin{aligned} P_3 &= \left( \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\sqrt{5} \right), & Q_3 &= \left( -\frac{6}{7}\sqrt{5}, \frac{4}{7} \right); \\ P_4 &= \left( \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\sqrt{5} \right), & Q_4 &= \left( \frac{6}{7}\sqrt{5}, \frac{4}{7} \right). \end{aligned}$$

Die Funktion  $d(\cdot)$  besitzt also auf der Torusfläche  $S \subset \mathbb{R}^4$  vier bedingt stationäre Punkte

$$(P_k, Q_k) = (x_k, y_k, u_k, v_k) \quad (1 \leq k \leq 4).$$

Zeichnen wir die zugehörigen Streckenzüge in die Ausgangsfigur ein, so sehen wir (Fig. 5.5.13), daß  $d$  für  $(P_1, Q_1)$  maximal und für  $(P_2, Q_2)$  minimal wird. Die Punktepaare  $(P_3, Q_3)$  und  $(P_4, Q_4)$  gehören zu Sattelpunkten der Funktion  $d(\cdot)$  auf  $S$ . Man kann beweisen, daß es bei einer  $C^1$ -Funktion auf einer Torusfläche notwendigerweise derartige Sattelpunkte gibt.  $\bigcirc$

## Aufgaben

1. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x - y - z$$

auf der Schnittkurve des elliptischen Zylinders  $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$  mit der Ebene  $3x - 4z = 0$ .

2. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 8x - 6y$$

auf dem Bereich  $B$  der Fig. 5.5.14.

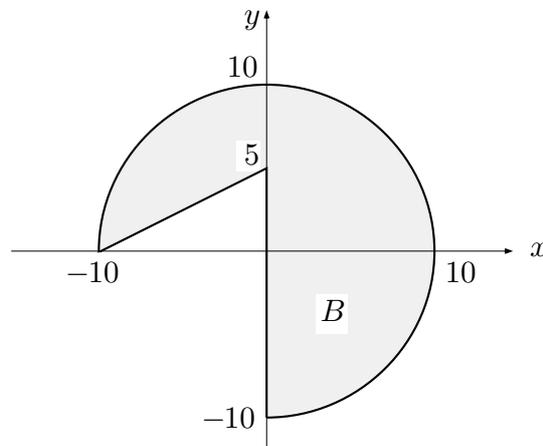


Fig. 5.5.14

3. Die **Norm** einer linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist definiert als

$$\|L\| := \max\{|L\mathbf{x}| \mid |\mathbf{x}| = 1\}.$$

Berechne die Norm der linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit der Matrix

$$[L] := \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(*Hinweis:* Bestimme  $\max |L\mathbf{z}|^2$  auf der Menge der Einheitsvektoren  $\mathbf{z}$ .)

4. Man stelle eine anschauliche Skizze der Menge

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 5, \quad yz + zx + xy = 8\}$$

her und diskutierte die bezüglich  $C$  bedingt stationären Punkte der Funktion  $f(x, y, z) := xyz$ .

5. Bestimme die globalen Extremalwerte (Minimum und Maximum) der Funktion  $f(x, y) := x + 2y$  auf dem Bereich  $B := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$  sowie die Stellen, in denen diese Extremalwerte angenommen werden.
6. Bestimme den Durchmesser, das heißt: den größtmöglichen Abstand zwischen zwei Punkten des Ovals

$$B := \{(x, y) \mid 11x^4 + 5y^4 \leq 55\} .$$

(*Hinweis:* Aus Symmetriegründen geht der "Durchmesser" durch  $(0, 0)$ .)

7. Bestimme die globalen Extrema der Funktion  $f(x, y) := x^2 + y^2 + 7x - 2y$  auf dem Bereich  $B := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 3\}$ . Figur!
8. Bestimme den Durchmesser des in der Fig. 5.5.15 dargestellten herzförmigen Bereiches  $B$  in der  $(x, y)$ -Ebene. (*Hinweis:* Geometrisch argumentieren; dann wird nur ganz wenig Rechnung benötigt.)

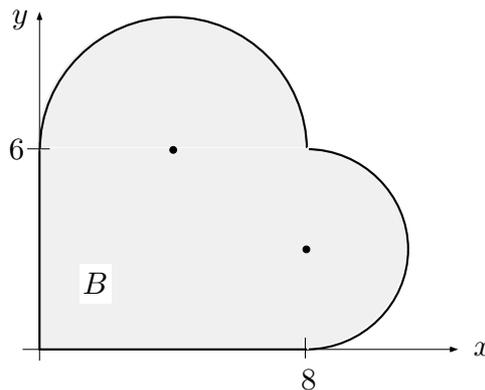


Fig. 5.5.15

9. Beweise: Für beliebige  $x, y, z \geq 0$  gilt

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left( \frac{x + y + z}{3} \right)^3 .$$

(*Hinweis:* Dies läßt sich in eine Extremalaufgabe verwandeln: Es geht um das Minimum der Funktion  $f(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3$  auf Flächen  $x + y + z = a$ .)

10. Berechne die globalen Extrema der Funktion  $f(x, y, z) := x + 3z$  auf der Menge  $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^3 = x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Figur!

## \*5.6 Kurvenscharen in der Ebene

### Reguläre und singuläre Scharelemente

Eine **einparametrische Kurvenschar**  $\Gamma$  in der Ebene, im folgenden einfach eine **Kurvenschar** genannt, ist eine “kurvenwertige Funktion”

$$\Gamma : \mathbb{R} \curvearrowright \text{“Kurven in der } (x, y)\text{-Ebene”}, \quad c \mapsto \gamma_c,$$

also eine Vorschrift, die für jedes  $c$  eines geeigneten Intervalls eine Kurve  $\gamma_c$  in der  $(x, y)$ -Ebene festlegt. Dabei hat es die Meinung, daß die  $\gamma_c$  stetig von  $c$  abhängen: Ist  $c' \doteq c$ , so liegen die Kurven  $\gamma_{c'}$  und  $\gamma_c$  nahe beieinander und sehen ähnlich aus. Die Variable  $c$  heißt in diesem Zusammenhang **Scharparameter** — das hat nichts, aber auch gar nichts mit Parameterdarstellungen von einzelnen Kurven oder Flächen zu tun. Der Scharparameter  $c$  “numeriert” sozusagen die einzelnen Kurven der Schar. Liegt der Punkt  $(x_0, y_0)$  auf der Kurve  $\gamma_{c_0}$  (Fig. 5.6.1), so nennen wir das Tripel  $(x_0, y_0, c_0)$  ein **Scharelement** an der Stelle  $(x_0, y_0)$  und schreiben dafür  $(x_0, y_0, c_0) \in \Gamma$ .

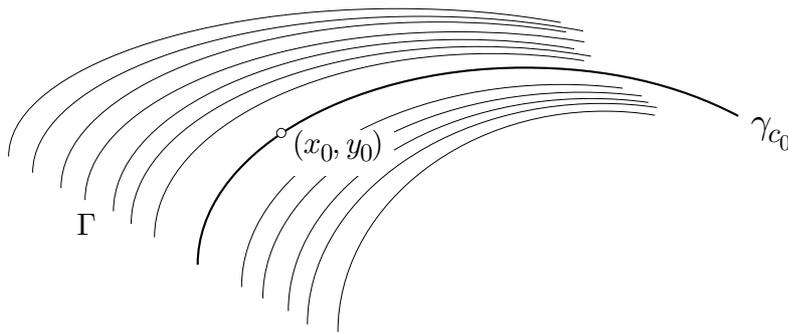


Fig. 5.6.1

Da schon eine einzelne Kurve  $\gamma$  in ganz verschiedener Weise präsentiert werden kann, kommen auch die Kurvenscharen in verschiedenen Erscheinungsformen daher. Am interessantesten ist die implizite Form

$$\Gamma : \quad F(x, y, c) = 0. \quad (1)$$

Hier ist  $F(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion von drei Variablen, und für jedes feste  $c \in \mathbb{R}$  definiert (1) “grundsätzlich” eine Kurve

$$\gamma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, c) = 0\}.$$

Die Formen  $y = f(x, c)$ , eine Schar von Graphen, und  $F(x, y) = c$ , eine Schar von Niveaulinien, lassen sich offensichtlich unter (1) subsumieren.

① Die Schar

$$\Gamma_1 : \quad (x - c)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$$

besteht aus den Kreisen vom Radius 1 mit Zentren auf der  $x$ -Achse (siehe die Fig. 5.6.2). Durch jeden Punkt  $(x, y)$  mit  $|y| < 1$  gehen genau zwei Scharkurven, durch die Punkte  $(x, \pm 1)$  geht genau eine Scharkurve, und durch die Punkte  $(x, y)$  mit  $|y| > 1$  geht keine Kurve der Schar.

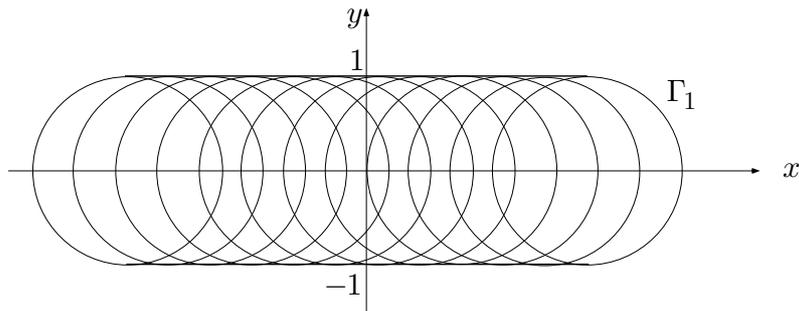


Fig. 5.6.2

Die Schar

$$\Gamma_2 : \quad y = \frac{1}{c - x} \quad (c \in \mathbb{R})$$

besteht aus Hyperbeln, und zwar hat die Hyperbel  $\gamma_c$  die  $x$ -Achse sowie die Gerade  $x = c$  als Asymptoten (Fig. 5.6.3). Die  $x$ -Achse selbst gehört nicht zur Schar.

Die Schar

$$\Gamma_3 : \quad \cos \alpha x + \sin \alpha y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi))$$

besteht aus allen Geraden durch den Ursprung, die Schar

$$\Gamma_4 : \quad x^2 + y^2 = R \quad (R \geq 0)$$

aus den konzentrischen Kreisen um  $(0, 0)$ , die Schar

$$\Gamma_5 : \quad xy - c = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$$

aus Hyperbeln und dem Achsenpaar (Fig. 5.6.5). Siehe dazu auch die Figur 5.3.8. ○

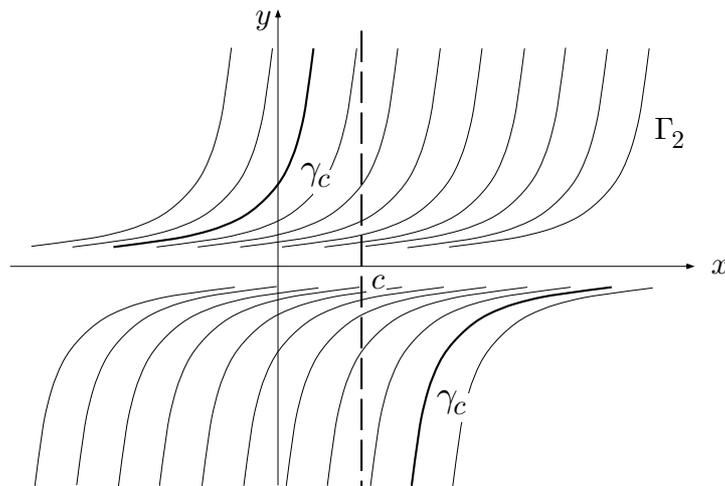


Fig. 5.6.3

Schon diese wenigen Beispiele zeigen, daß eine Kurvenschar (1) interessante “Singularitäten” aufweisen kann. Am auffallendsten sind die beiden *Envelopen* (Hüllkurven)  $y = \pm 1$  der Schar  $\Gamma_1$ ; wir werden darauf zurückkommen.

Unter einer “Singularität” versteht man allgemein folgendes: Ein geometrisches Objekt, zum Beispiel ein Vektorfeld, eine Kurven- oder eine Flächenschar, erfülle ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  in homogener Weise. Die Flächen liegen also überall schön nebeneinander wie die Seiten eines Buches oder die Häute einer Zwiebel. Da gibt es nun immer wieder isolierte Ausnahmepunkte (oder auch gewisse “Phasengrenzen” usw.), wo die Homogenität gestört ist, und die werden dann **Singularitäten** des betrachteten Objekts genannt. Eine Achterschleife hat in ihrem Doppelpunkt, eine Schar konzentrischer Kugeln im gemeinsamen Zentrum eine Singularität. Es zeigt sich, daß die globalen Gestaltmerkmale des Gesamtobjekts auf geheimnisvolle Weise mit algebraischen Daten der auftretenden Singularitäten verknüpft sind.

Wir wollen ein Scharelement  $(x_0, y_0, c_0)$  von (1) **regulär** nennen, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$(F_x, F_y)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq (0, 0), \quad (2)$$

$$(F_c)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq 0. \quad (3)$$

Die erste Bedingung (2) garantiert nach Satz (5.10), daß die “Kurve”

$$\gamma_{c_0} : \quad F(x, y, c_0) = 0$$

in der Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0)$  tatsächlich eine glatte Kurve ist.

Aus der zweiten Bedingung (3) folgt nach dem Satz über implizite Funktionen (5.9), daß (1) in der Umgebung von  $(x_0, y_0, c_0)$  nach  $c$  aufgelöst werden kann

und somit äquivalent ist mit einer Gleichung der Form

$$g(x, y) = c \quad (4)$$

für eine gewisse  $C^1$ -Funktion  $g(\cdot, \cdot)$ . Die Scharcurven  $\gamma_c$  sind also Niveaulinien dieser Funktion  $g(\cdot, \cdot)$ . Die Formel für die Ableitung einer implizit definierten Funktion liefert im vorliegenden Fall

$$\nabla g(x_0, y_0) = \left( -\frac{F_x}{F_c}, -\frac{F_y}{F_c} \right)_{(x_0, y_0, c_0)} \neq \mathbf{0},$$

somit liegen diese Niveaulinien in der Nähe von  $(x_0, y_0)$  schön nebeneinander (siehe die Bemerkung im Anschluß an Beispiel 5.3.③).

Die meisten Scharelemente sind regulär. Es gilt der folgende Satz (ohne Beweis), siehe dazu die Fig. 5.6.1:

**(5.19)** *Ist  $(x_0, y_0, c_0)$  ein reguläres Scharelement, so sieht die Schar in der unmittelbaren Umgebung von  $(x_0, y_0)$  und für  $c$  in der Nähe von  $c_0$  aus wie eine Schar von parallelen Geraden.*

① (Forts.) Für die Schar  $\Gamma_1$  ist

$$F_x = 2(x - c), \quad F_y = 2y, \quad F_c = 2(c - x).$$

Die Scharelemente  $(1, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) \in \Gamma_1$  sind regulär (Fig. 5.6.4). Die Scharelemente  $(0, \pm 1, 0)$ , allgemein:  $(a, \pm 1, a)$ , sind singulär, da dort die Bedingung (3) verletzt ist. Die zugehörigen Punkte  $(a, \pm 1) \in \mathbb{R}^2$  formieren sich gerade zu den Enveloppen der Schar  $\Gamma_1$ .

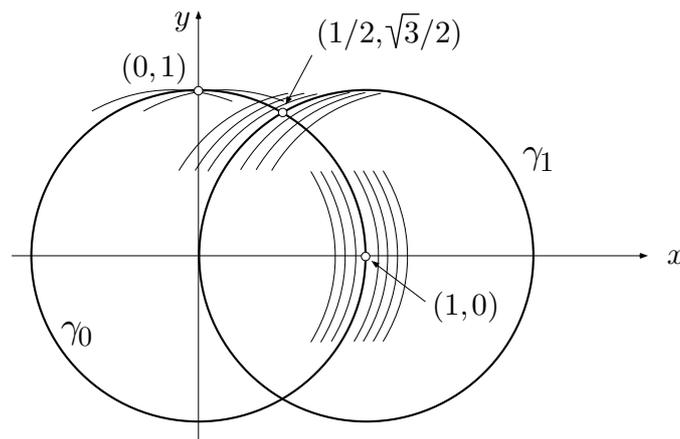


Fig. 5.6.4

Für die Schar  $\Gamma_5$  haben wir

$$F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_c = -1.$$

Hier ist also  $(0, 0, 0)$  das einzige singuläre Scharelement. In der Tat ist der Kurvencharakter der Scharkurve  $\gamma_0$  im Ursprung defekt (Fig. 5.6.5).  $\bigcirc$

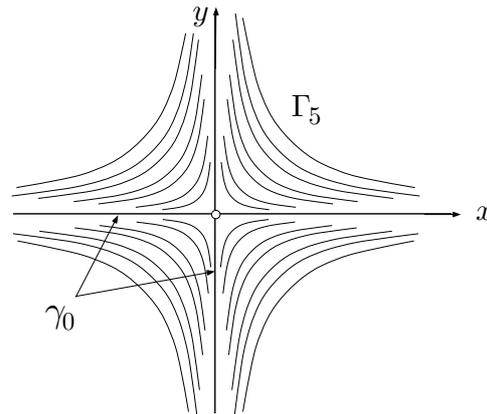


Fig. 5.6.5

## Lösungsscharen von Differentialgleichungen

Die Lösungskurven einer Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

bilden ebenfalls eine Kurvenschar, und zwar geht durch jeden Punkt von  $\Omega$  genau eine Scharkurve. Durch die Differentialgleichung wird allerdings nur die Gestalt der einzelnen Scharkurven festgelegt, nicht aber ihre "Numerierung". So kann man etwa die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y' = y \quad (y > 0)$$

in der Form

$$\gamma_c : y = e^{x-c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

schreiben, aber auch in der Form

$$\gamma_C : y = Ce^x \quad (C > 0).$$

Damit erhebt sich natürlich die Frage, ob sich *jede* Kurvenschar (1) durch eine Differentialgleichung repräsentieren läßt. Beim Übergang von der Schargleichung (1) zur Differentialgleichung geht, wie gesagt, die Numerierung der Scharcurven verloren, aber der effektive “geometrische Gehalt” der Kurvenschar ist in der Differentialgleichung vollumfänglich gespeichert.

Es sei  $(x_0, y_0, c_0)$  ein reguläres Scharelement der Schar (1), und zwar setzen wir ausdrücklich

$$F_y(x_0, y_0, c_0) \neq 0 \quad (5)$$

voraus. Die Scharcurve  $\gamma_{c_0}$  besitzt die Gleichung

$$\gamma_{c_0} : \quad F(x, y, c_0) = 0 .$$

Wegen (5) läßt sich diese Gleichung in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  nach  $y$  auflösen. Das heißt: Die Scharcurve  $\gamma_{c_0}$  läßt sich dort als Graph einer Funktion

$$x \mapsto y(x)$$

auffassen, und die Steigung dieses Graphen hat an der Stelle  $x_0$  (Fig. 5.6.6) den Wert

$$y' = - \frac{F_x(x_0, y_0, c_0)}{F_y(x_0, y_0, c_0)} . \quad (6)$$

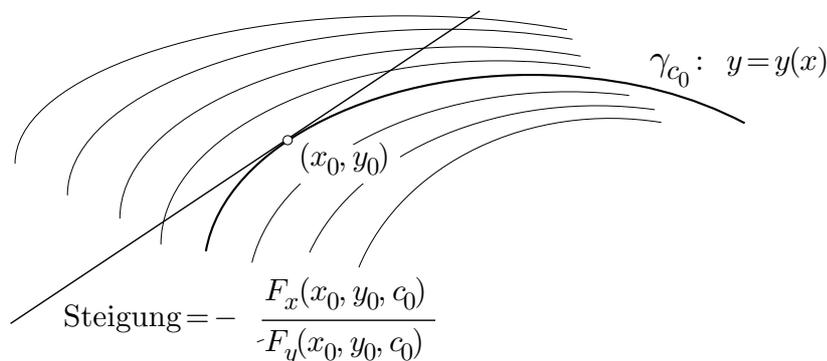


Fig. 5.6.6

Nach dieser Formel läßt sich auch für alle Punkte  $(x, y)$  in einer Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  die zugehörige Steigung ausrechnen. Durch diese Punkte gehen allerdings andere Scharcurven  $\gamma_c$ , so daß wir die Variation des Scharparameters  $c$  mitberücksichtigen müssen. Dies wird durch die Bedingung (3) in befriedigender Weise ermöglicht: Die Schargleichung (1) läßt sich in der Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0, c_0)$  dazu benutzen, die “Nummer”  $c$  der durch  $(x, y)$  gehenden Scharcurve als  $C^1$ -Funktion von  $x$  und  $y$  auszudrücken:  $c = g(x, y)$ ,

siehe (4). Damit erhalten wir anstelle von (6) eine richtiggehende Differentialgleichung

$$y' = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_y(x, y, g(x, y))} \quad (=: f(x, y)),$$

die für jeden Punkt  $(x, y)$  eines gewissen Gebietes  $\Omega$  die Steigung der durch  $(x, y)$  gehenden Scharcurve angibt.

Diese grundsätzlichen Überlegungen lassen sich zu dem folgenden Rezept verdichten:

Um die Differentialgleichung einer Kurvenschar (1) zu erhalten, differenziere man die Schargleichung

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

“total” nach  $x$ :

$$F_x(x, y, c) + F_y(x, y, c) y' = 0, \quad (7)$$

und eliminiere den Scharparameter  $c$  aus (1) und (7).

① (Forts.) Wir führen dieses Programm durch für die Schar

$$\Gamma_1: \quad (x - c)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

“Totale” Differentiation nach  $x$  liefert

$$2(x - c) + 2y y' = 0.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen läßt sich  $x - c$  eliminieren. Es ergibt sich

$$y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0,$$

was bereits als Differentialgleichung der Schar  $\Gamma_1$  angesprochen werden kann. Auflösung nach  $y'$  liefert

$$y' = \pm \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (0 < |y| \leq 1),$$

wobei sich natürlich bemerkbar macht, daß durch jeden Punkt  $(x, y)$  mit  $|y| < 1$  zwei Scharcurven gehen. Wir stellen übrigens fest, daß die Enveloppen  $y \equiv \pm 1$  ebenfalls Lösungen dieser Differentialgleichung sind.

Für die Schar

$$\Gamma_5: \quad xy - c = 0$$

erhält man durch “totale” Differentiation sofort

$$y + xy' = 0,$$

und die nachträgliche Elimination von  $c$  entfällt. Die gesuchte Differentialgleichung lautet also

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

○

## Orthogonaltrajektorien

Es sei  $\Gamma$  eine Kurvenschar, die ein Gebiet  $\Omega$  der  $(x, y)$ -Ebene **schlicht** überdeckt, das heißt: Durch jeden Punkt  $(x, y) \in \Omega$  geht genau eine Scharkurve  $\gamma$ . Eine **Orthogonaltrajektorie** dieser Schar ist eine Kurve  $\sigma$  in  $\Omega$ , die in allen ihren Punkten die Scharkurve durch den betreffenden Punkt senkrecht schneidet (Fig. 5.6.7).

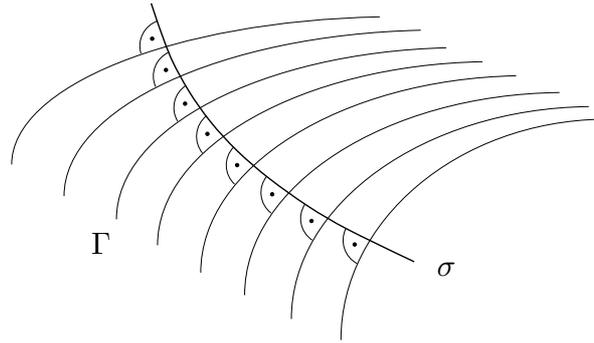


Fig. 5.6.7

In Wirklichkeit gibt es eine ganze Schar  $\Gamma^\perp$  von Orthogonaltrajektorien, und die beiden Scharen  $\Gamma$  und  $\Gamma^\perp$  überziehen zusammen das Gebiet  $\Omega$  wie ein Koordinatennetz die Ebene (Fig. 5.6.8). — Wie läßt sich die Schar  $\Gamma^\perp$  bestimmen?

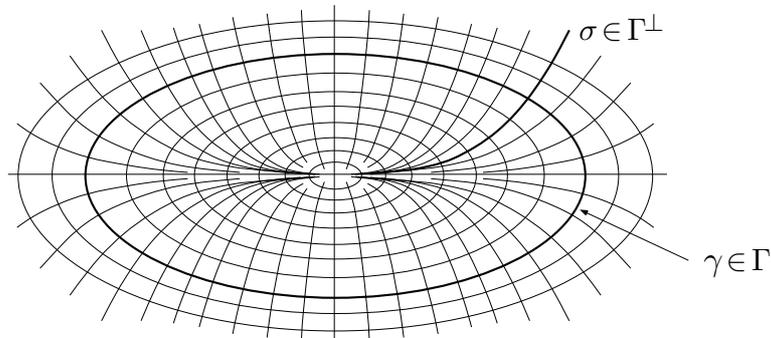


Fig. 5.6.8

Wir dürfen schon annehmen, daß  $\Gamma$  durch eine Differentialgleichung festgelegt ist:

$$y' = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

wobei wir die Punkte  $(x, y)$ , in denen die Scharkurve eine vertikale oder eine horizontale Tangente besitzt, außer acht lassen. Wir wenden nun analytische Geometrie an (Fig. 5.6.9): Hat die Scharkurve  $\gamma \in \Gamma$  im Punkt  $(x, y)$

die Steigung  $f(x, y)$ , so hat die durch diesen Punkt gehende Orthogonaltrajektorie  $\sigma$  dort notwendigerweise die Steigung  $-\frac{1}{f(x, y)}$ . Hieraus folgt: Die Orthogonaltrajektorien der Schar  $\Gamma$  genügen der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Durch allgemeine Integration dieser Differentialgleichung erhält man die gesuchte Schar  $\Gamma^\perp$  in der Form

$$\Gamma^\perp : \quad G(x, y, C) = 0$$

mit einem neuen Scharparameter  $C$ .

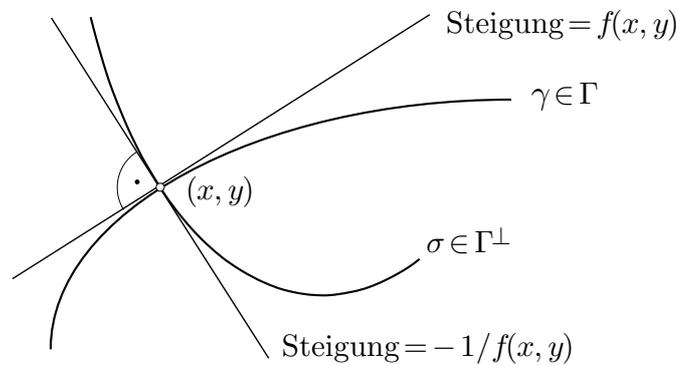


Fig. 5.6.9

② Wir bestimmen die Orthogonaltrajektorien zur Schar

$$\Gamma : \quad y = ce^x \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

(Fig. 5.6.10). Die Differentialgleichung dieser Schar lautet bekanntlich:  $y' = y$ , so daß wir als Differentialgleichung von  $\Gamma^\perp$  folgendes erhalten:

$$y' = -\frac{1}{y}.$$

Hieraus folgt nacheinander  $2yy' = -2$ ,  $y^2 = -2x + C$ . Die Orthogonaltrajektorien der Exponentialkurven (8) sind also die Parabeln

$$x = \frac{1}{2}(C - y^2).$$

○

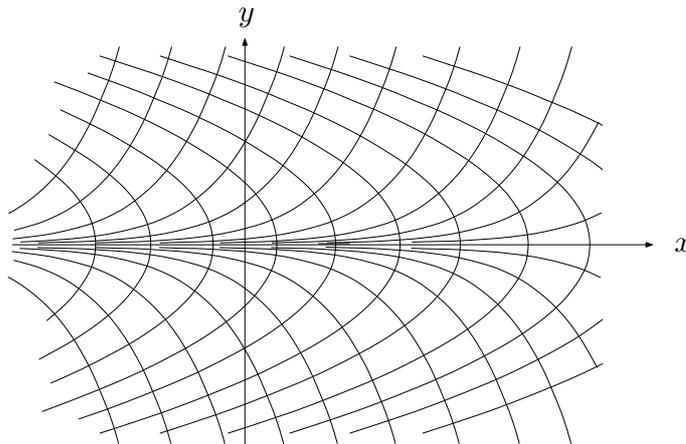


Fig. 5.6.10

③ Es sei

$$\Gamma : \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2 \quad (9)$$

die Schar der Kreise, die die  $x$ -Achse im Ursprung berühren. Um die zugehörige Orthogonalschar  $\Gamma^\perp$  bestimmen zu können, benötigen wir erst die Differentialgleichung der Schar  $\Gamma$ . Wir differenzieren also (9) “total” nach  $x$  und erhalten

$$2x + 2(y - c)y' = 0 .$$

Hieraus folgt  $c = x/y' + y$ . Setzen wir das in (9) ein, so ergibt sich ( $c^2$  hebt sich heraus):

$$x^2 + y^2 - 2y\left(\frac{x}{y'} + y\right) = 0$$

und somit

$$-\frac{2xy}{y'} = y^2 - x^2 .$$

Dies ist im wesentlichen die Differentialgleichung der Schar  $\Gamma$ . Ersetzen wir hier rein formal  $y'$  durch  $-1/y'$ , so erhalten wir automatisch die Differentialgleichung der Schar  $\Gamma^\perp$ ; sie lautet:

$$2xyy' = y^2 - x^2 . \quad (10)$$

Es liegt nahe, die neue unbekannte Funktion

$$u := y^2 \quad (11)$$

einzuführen. Dann ist  $u' = 2yy'$ , und (10) geht über in die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$xu' = u - x^2 . \quad (12)$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$u' = \frac{u}{x}$$

ist vom Eulerschen Typ und hat die allgemeine Lösung  $u(x) = Cx$ . Für die Lösungen von (12) machen wir daher den Ansatz (“Variation der Konstanten”):

$$u = C(x)x \tag{13}$$

und erhalten für die neue unbekannte Funktion  $C(\cdot)$  die Differentialgleichung

$$x(C'x + C) = Cx - x^2 .$$

Hieraus folgt  $C' \equiv -1$  und weiter

$$C(x) = -x + 2\tilde{C}$$

mit einer neuen Integrationskonstanten  $\tilde{C}$ . Wir erhalten daher mit (11) und (13):

$$y^2 = u(x) = -x^2 + 2\tilde{C}x .$$

Dies ist äquivalent mit

$$y^2 + (x - \tilde{C})^2 = \tilde{C}^2 ;$$

die gesuchten Orthogonaltrajektorien sind also Kreise, die die  $y$ -Achse im Ursprung berühren (Fig. 5.6.11).

A posteriori ist natürlich klar, daß sich die beiden Arten von Kreisen in allen Punkten rechtwinklig schneiden, wenn sie das im Ursprung tun.  $\bigcirc$

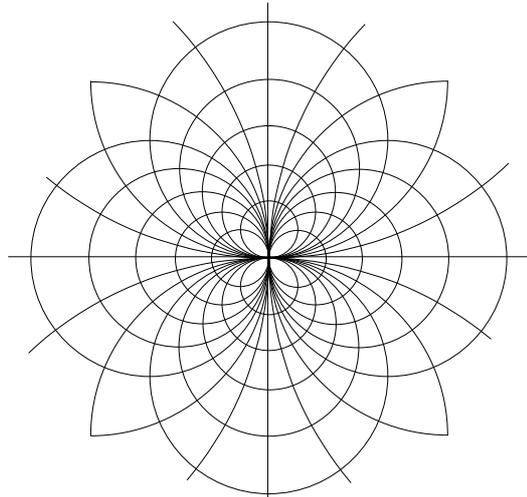


Fig. 5.6.11

## Enveloppen

Zum Dessert wenden wir uns den Scharelementen zu, bei denen die Bedingung (3), nicht aber die Bedingung (2) verletzt ist; wir wollen sie **singuläre Scharelemente 2. Art** nennen. Diese Scharelemente  $(x, y, c)$  genügen simultan den beiden Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad (1)$$

$$F_c(x, y, c) = 0. \quad (14)$$

Wenn wir etwas sehen wollen, so müssen wir die Punkte  $(x, y)$  herauspräparieren, die einem derartigen Scharelement angehören.

Es sei also  $(x_0, y_0, c_0)$  ein singuläres Scharelement 2. Art, wobei wir annehmen wollen, es sei

$$F_{cc}(x_0, y_0, c_0) \neq 0.$$

Dann läßt sich die Gleichung (14) in einer Umgebung von  $(x_0, y_0, c_0)$  nach  $c$  auflösen. Das heißt: Es gibt eine  $C^1$ -Funktion  $\psi(\cdot, \cdot)$  der Variablen  $x$  und  $y$ , so daß (14) in dieser Umgebung äquivalent ist mit

$$c = \psi(x, y); \quad (15)$$

dabei ist natürlich  $\psi(x_0, y_0) = c_0$ . Setzen wir (15) in (1) ein, so resultiert die Gleichung

$$(f(x, y) :=) \quad F(x, y, \psi(x, y)) = 0, \quad (16)$$

und man überlegt sich leicht, daß  $(1) \wedge (14)$  in der Umgebung von  $(x_0, y_0, c_0)$  äquivalent ist mit  $(15) \wedge (16)$ .

Die Punkte  $(x, y)$  in der Nähe von  $(x_0, y_0)$ , die einem singulären Scharelement 2. Art angehören, genügen somit notwendigerweise der Gleichung (16). Dies ist aber die Gleichung einer glatten Kurve  $\varepsilon$  durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ . Um das nachzuweisen, müssen wir nach Satz (5.10) den Gradienten  $\nabla f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  betrachten. Wir haben nach der Kettenregel

$$\nabla f = (F_x + F_c \cdot \psi_x, F_y + F_c \cdot \psi_y).$$

An der Stelle  $(x_0, y_0, \psi(x_0, y_0))$  ist  $F_c = 0$ , somit ergibt sich (Fig. 5.6.12):

$$\nabla f(x_0, y_0) = (F_x(x_0, y_0, c_0), F_y(x_0, y_0, c_0)) \neq \mathbf{0}.$$

Damit haben wir nicht nur bewiesen, daß  $\varepsilon$  eine glatte Kurve ist, sondern zusätzlich, daß  $\varepsilon$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  dieselbe Tangente hat wie die durch diesen Punkt gehende Scharkurve

$$\gamma_{c_0} : \quad F(x, y, c_0) = 0.$$

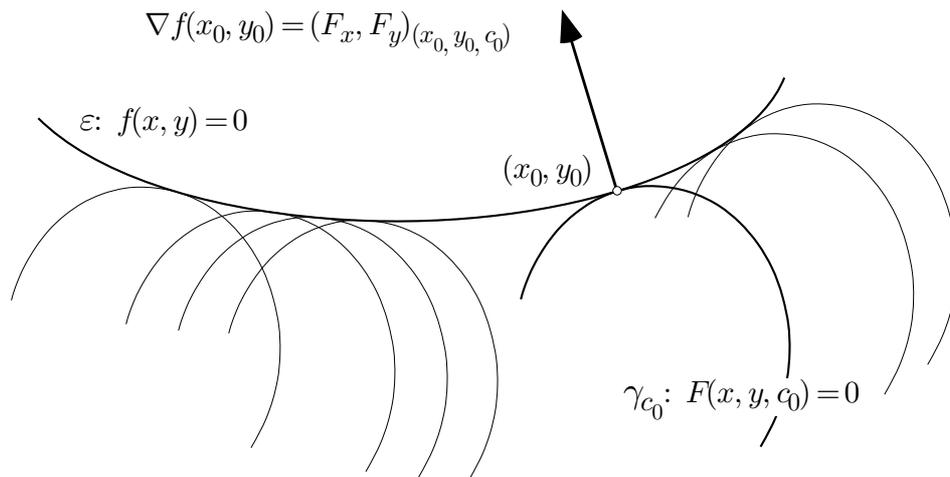


Fig. 5.6.12

Man nennt  $\varepsilon$  eine **Enveloppe** oder **Hüllkurve** der Schar  $\Gamma$ . Die Enveloppe berührt (nicht nur im Punkt  $(x_0, y_0)$ , sondern) in allen ihren Punkten eine Scharkurve und trennt “im allgemeinen” den von den Scharkurven bedeckten vom unbedeckten Teil der Ebene (vgl. die Schar  $\Gamma_1$  in Beispiel ①).

Besitzt eine Schar  $\Gamma$  überhaupt eine Enveloppe, so ergibt sich die Enveloppe durch Elimination des Scharparameters  $c$  aus den Gleichungen (1) und (14). Man kann diese Gleichungen auch nach  $x$  und  $y$  auflösen und erhält dann eine Parameterdarstellung der Enveloppe mit  $c$  als Parameter.

① (Forts.) Für die Schar  $\Gamma_1$  ist

$$F(x, y, c) := (x - c)^2 + y^2 - 1$$

und

$$F_c(x, y, c) = 2(c - x) .$$

Eliminiert man  $c$  aus  $F_c = 0$  und  $F = 0$ , so ergibt sich  $y^2 = 1$ , das heißt:  $y \equiv \pm 1$ , in Übereinstimmung mit dem Augenschein.  $\bigcirc$

④ Die Mündungsgeschwindigkeit eines Geschützes betrage  $v_0$ . Man soll den von  $(0, 0, 0)$  aus bestrichenen Raumbereich ermitteln.

Es genügt, die  $(\rho, z)$ -Meridian-Halbebene zu betrachten. Bezeichnen wir die einstellbare Elevation des Rohres mit  $\alpha$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , so ist die zugehörige Flugbahn eines Geschosses gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \rho &= v_0 \cos \alpha \cdot t \\ z &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0) ,$$

unter  $g$  die Erdbeschleunigung verstanden (Fig. 5.6.13). Hieraus eliminieren wir zunächst  $t$  und erhalten folgende Gleichung dieser Flugbahn:

$$z = \tan \alpha \cdot \rho - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \rho^2 .$$

Wir setzen noch  $\tan \alpha =: c$ ; dann erscheint die Schar  $\Gamma$  aller Flugbahnen in der folgenden Gestalt:

$$\Gamma : \quad z = c\rho - \frac{g}{2v_0^2}(1 + c^2)\rho^2 \quad (c \in \mathbb{R}) . \quad (17)$$

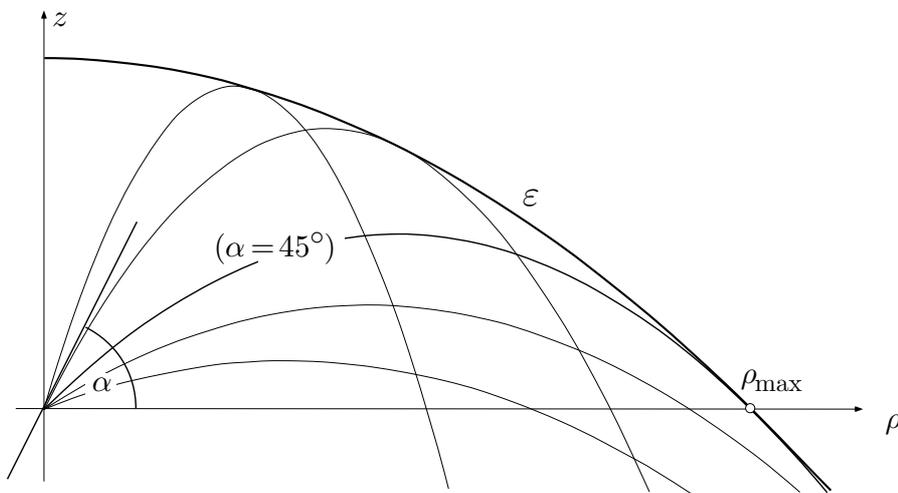


Fig. 5.6.13

Der von dem Geschütz bestrichene Teil der Halbebene wird von dem unerreichbaren Teil getrennt durch die Enveloppe  $\varepsilon$  dieser Kurvenschar. Um  $\varepsilon$  zu bestimmen, haben wir die Schargleichung (17) partiell nach  $c$  abzuleiten:

$$0 = \rho - \frac{g}{2v_0^2} \cdot 2c \cdot \rho^2 , \quad (18)$$

und  $c$  aus den Gleichungen (17)  $\wedge$  (18) zu eliminieren. Aus (18) folgt  $c = \frac{v_0^2}{g\rho}$ . Setzen wir dies in (17) ein, so ergibt sich

$$z = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2v_0^2} \left( 1 + \frac{v_0^4}{g^2 \rho^2} \right) \rho^2 ;$$

die gesuchte Enveloppe hat also die Gleichung

$$\varepsilon : \quad z = z(\rho) := \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \rho^2$$

und ist ebenfalls eine Parabel.

Indem man die Enveloppe mit der Achse  $z = 0$  schneidet, erhält man die maximale horizontale Schußweite

$$\rho_{\max} = \frac{v_0^2}{g};$$

sie wird übrigens mit der Rohrelevation  $\alpha := 45^\circ$  erreicht. Um das einzusehen, genügt es, die Steigung der Enveloppe im Schnittpunkt mit der  $\rho$ -Achse zu berechnen. Man findet  $z'(\rho_{\max}) = -1$ .  $\circ$

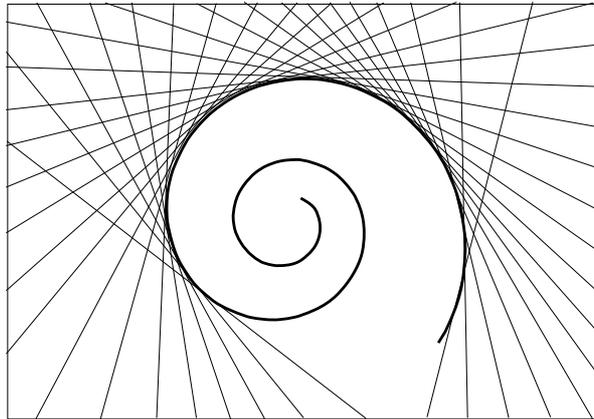


Fig. 5.6.14

## Geradenscharen

*Bsp:* Die Tangenten an eine gegebene krumme Kurve  $\varepsilon$  bilden eine Geradenschar, und  $\varepsilon$  ist die Enveloppe dieser Schar (Fig. 5.6.14).

Wir betrachten eine allgemeine Geradenschar

$$\Gamma = (g_m)_{m \in I},$$

wobei wir allerdings von vornherein die (unterschiedliche) Steigung  $m$  der Geraden als Scharparameter wählen. Der  $y$ -Achsenabschnitt  $q$  von  $g_m$  (siehe

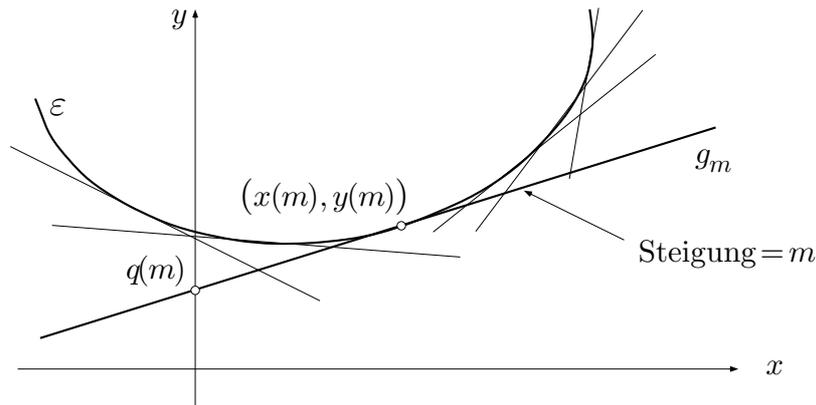


Fig. 5.6.15

die Fig. 5.6.15) hängt in bestimmter Weise von  $m$  ab; somit sieht dann die Schargleichung folgendermaßen aus:

$$\Gamma : \quad y = mx + q(m) \quad (m \in I), \quad (19)$$

dabei ist  $q(\cdot)$  eine gegebene Funktion.

Um die Enveloppe  $\varepsilon$  dieser Schar zu bestimmen, differenzieren wir (19) partiell nach  $m$  und erhalten die weitere Gleichung

$$0 = x + q'(m). \quad (20)$$

Aus (19)^(20) läßt sich unter Umständen die Variable  $m$  eliminieren. Man kann aber auch (19)^(20) nach  $x$  und  $y$  auflösen und erhält dann folgende Parameterdarstellung der Enveloppe:

$$\varepsilon : \quad m \mapsto \begin{cases} x(m) = -q'(m) \\ y(m) = q(m) - mq'(m) \end{cases} \quad (m \in I). \quad (21)$$

Diese Darstellung liefert für jedes  $m \in I$  einen Enveloppenpunkt (Fig. 5.6.15), und zwar den Punkt  $(x(m), y(m))$ , in dem die Schargerade  $g_m$  die Enveloppe berührt.

Wir leiten noch die Differentialgleichung der Geradenschar (19) her. Differenzieren wir (19) "total" nach  $x$ , so ergibt sich

$$y' = m; \quad (22)$$

und indem wir  $m$  aus (19) und (22) eliminieren, erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$y = y'x + q(y'). \quad (23)$$

Eine allgemeine Geradenschar (19) läßt sich also charakterisieren durch eine sogenannte **Clairautsche Differentialgleichung** (23). Zahlreiche geometrische Probleme, in denen Tangenten eine Rolle spielen, führen auf eine Differentialgleichung von diesem Typ.

Die Lösungen einer gegebenen Clairautschen Differentialgleichung (23) sind zunächst einmal die Geraden (19). Die Enveloppe (21) dieser Geradenschar ist aber *auch* eine Lösung von (23), da die Enveloppe in allen ihren Punkten dieselbe Steigung hat wie die Schargerade durch den betreffenden Punkt. Man nennt  $\varepsilon$  eine **singuläre Lösung** der Differentialgleichung (23). In vielen Fällen ist es die einzig wirklich interessierende Lösung.

Merke: "Singuläre Lösungen" von Differentialgleichungen werden durch einen Ansatz für die "allgemeine Lösung" in der Regel nicht zum Vorschein gebracht, sondern sind zusätzlich herauszupräparieren.

⑤ Durch Separation der Variablen erhält man als "allgemeine Lösung" der Differentialgleichung  $y' = y^2$  die Funktionenschar

$$y = \frac{1}{c - x} \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

Zusätzlich gibt es noch die "singuläre Lösung"  $y(x) \equiv 0$ . ○

⑥ Gesucht sind die Kurven, deren Tangenten Achsenabschnitte der Quadratsumme 1 besitzen.

Es seien  $\gamma$  eine derartige Kurve,  $(x_0, y_0)$  ein Punkt von  $\gamma$  und

$$\mathcal{T}_0 : \quad y = y_0 + m(x - x_0)$$

die Tangente an  $\gamma$  in diesem Punkt.  $\mathcal{T}_0$  besitzt die Achsenabschnitte

$$p = -\frac{1}{m}(y_0 - mx_0), \quad q = y_0 - mx_0$$

(Fig. 5.6.16); die Größen  $x_0, y_0, m$  sind daher aufgrund der Aufgabenstellung untereinander verknüpft durch die Bedingung

$$(p^2 + q^2 =) \quad \left( \frac{1}{m^2} + 1 \right) (y_0 - mx_0)^2 = 1 ,$$

und hieraus folgt

$$y_0 = mx_0 \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} . \quad (24)$$

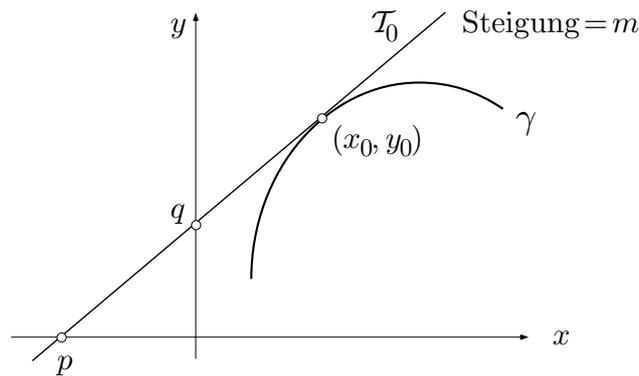


Fig. 5.6.16

Nun war ja  $(x_0, y_0)$  ein beliebiger Punkt von  $\gamma$  und  $m$  die Steigung von  $\gamma$  im Punkt  $(x_0, y_0)$ . Unterdrücken wir daher in (24) den Index '0' und schreiben wir  $y'$  anstelle von  $m$ , so erhalten wir für  $\gamma$  die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = y' x \pm \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind zunächst einmal die Geraden

$$g_m : y = mx \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (m \in \mathbb{R}),$$

deren Achsenabschnitte die Quadratsumme 1 besitzen. Diese Geraden sind ihre eigenen Tangenten und erfüllen damit trivialerweise die Bedingungen der Aufgabe.

Die Geradenschar besitzt aber noch eine Enveloppe  $\varepsilon$ . In unserem Beispiel ist

$$q(m) = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

und folglich

$$q'(m) = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} - \frac{m \cdot 2m}{2(m^2 + 1)^{3/2}} \right) = \pm \frac{1}{(m^2 + 1)^{3/2}}.$$

Aufgrund von (21) ergibt sich daher folgende Parameterdarstellung der Enveloppe:

$$\varepsilon : m \mapsto \begin{cases} x(m) = \mp \frac{1}{(m^2 + 1)^{3/2}} \\ y(m) = \pm \frac{m^3}{(m^2 + 1)^{3/2}} \end{cases}.$$

Wir eliminieren den Parameter  $m$ , indem wir den Ausdruck

$$|x(m)|^{2/3} + |y(m)|^{2/3} = \frac{1}{m^2 + 1} + \frac{m^2}{m^2 + 1} = 1$$

betrachten. Die Punkte von  $\varepsilon$  genügen somit der Gleichung

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1 .$$

Die Enveloppe, es handelt sich um eine sogenannte **Astroide** (Fig. 5.6.17), besitzt vier charakteristische Spitzen.  $\bigcirc$

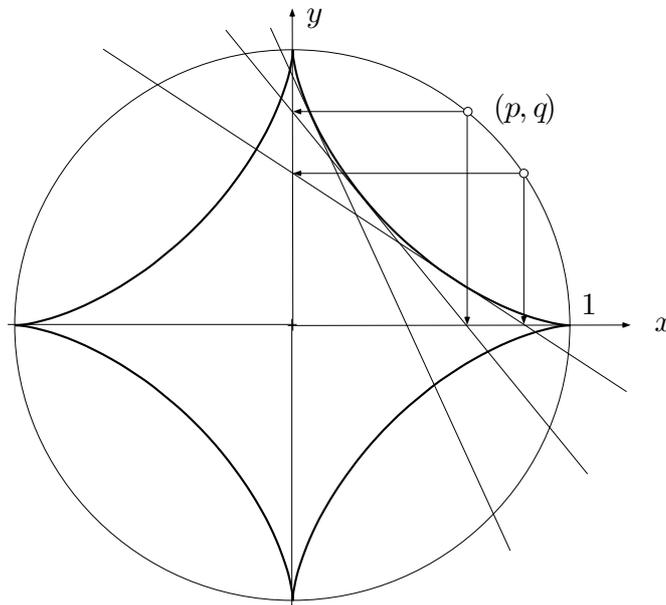


Fig. 5.6.17

## Aufgaben

1. Charakterisiere die Schar der Ellipsen mit den Brennpunkten  $(\pm 1, 0)$  durch ihre Differentialgleichung und bestimme die Orthogonaltrajektorien dieser Ellipsenschar. Beschreibe das Ergebnis in Worten.
2. Bestimme die **Falllinien**, das sind die Kurven steilsten Anstiegs gegenüber Horizontalebene  $z = \text{const.}$ , auf der Fläche

$$z = x^2 + xy + y^2 .$$

3. Auf den halbkreisförmigen Spiegel (Rand einer Teetasse!)

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0$$

fällt von links her parallel zur  $x$ -Achse Licht ein. Bestimme die Schargleichung sowie die Enveloppe der reflektierten Strahlen. Stelle eine sorgfältige Figur her. Die Enveloppe hat ihrerseits eine Singularität.

4. Bestimme die Enveloppen der folgenden Kurvenscharen und zeichne jedesmal eine Figur!

(a)  $\cos \alpha x + \sin \alpha y = 3 \quad (\alpha : \text{Scharparameter}),$

(b)  $y = Cx + C^2,$

(c)  $(x - C)^2 - y^3 = 0.$  Was geht hier schief?

5. Bestimme die Menge der Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , die von keiner Ellipse

$$E_{a,b} := \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

mit Flächeninhalt  $\pi$  überdeckt werden können.

6. Die Kurve  $\gamma$  in Fig. 5.6.18 besitzt die Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := \cos t + t \sin t \\ y(t) := \sin t - t \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

- (a) Bestimme die Schargleichung der Kurvennormalen von  $\gamma$ . (*Hinweis:* Scharparameter ist  $t$ !)
- (b) Bestimme die Enveloppe dieser Normalenschar und beschreibe das Resultat in Worten.

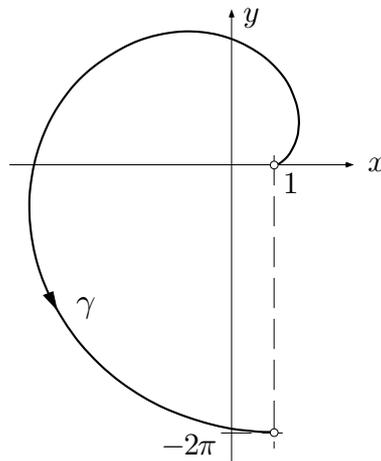


Fig. 5.6.18

# 6

## Vektoranalysis

### 6.1 Vektorfelder, Linienintegrale

#### Verschiedene Arten von Feldern

Alles, was folgt, spielt sich in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum ab; mit  $\mathbb{R}^n$  ist also immer  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  gemeint.

Ein **Feld** ist eine skalar- oder vektorwertige Funktion im  $\mathbb{R}^n$ , die aber nicht als Abbildung irgendwohin, geschweige denn als Graph interpretiert wird. Vielmehr stellt man sich vor, daß der Funktionswert  $f(\mathbf{x})$  oder  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  direkt am jeweiligen Punkt  $\mathbf{x}$  angeschrieben oder angeheftet ist. Handelt es sich dabei um eine zahlenwertige Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so spricht man von einem **Skalarfeld**. Typische Beispiele sind Temperatur- oder Druckverteilungen, das Potential eines elektrostatischen Feldes, die Ladungsdichte einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Ein Skalarfeld wird am besten mit Hilfe von Niveaulinien bzw. Niveauflächen (Isothermen, Isobaren, Äquipotentialflächen usw.) visualisiert.

Nun zu den Vektorfeldern. — Jeder Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  besitzt einen Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ ; das ist eine Kopie des  $\mathbb{R}^n$  mit Ursprung an der Stelle  $\mathbf{x}$  des Grundraums (Fig. 6.1.1, siehe auch die Fig. 5.4.1). Eine Vorschrift  $\mathbf{K}(\cdot)$ , die für jeden Punkt  $\mathbf{x}$  eines Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  einen Vektor

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$$

definiert, heißt ein **Vektorfeld** auf  $\Omega$  (Fig. 6.1.2). Man sagt, der Vektor  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  sei im Punkt  $\mathbf{x}$  **angeheftet**. Typische Beispiele für Vektorfelder sind die Felder der Elektrostatik und -dynamik, das Gravitationsfeld eines Himmelskörpers,

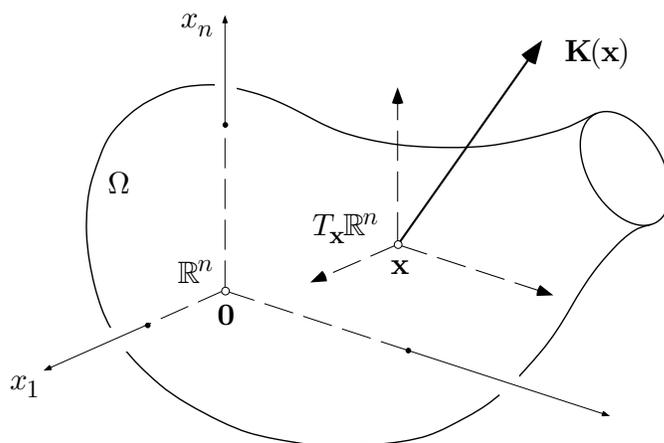


Fig. 6.1.1

das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, die Massenstromdichte eines Gases (Bewegungen der Atmosphäre!), das Gradientenfeld eines Skalarfelds (s.u.).

Für Vektorfelder verwenden wir im allgemeinen große halbfette lateinische Buchstaben, zum Beispiel  $\mathbf{K}$ , wenn wir eher an ein Kraftfeld denken, und kleine halbfette Buchstaben, zum Beispiel  $\mathbf{v}$ , wenn wir eher an ein Strömungsfeld denken. In Wirklichkeit besteht zwischen diesen beiden Arten von Feldern ein subtiler mathematischer Unterschied: Kraftfelder werden längs (1-dimensionalen) Kurven integriert; das Resultat stellt geleistete Arbeit, eventuell eine Potentialdifferenz dar. Strömungsfelder werden über  $(n - 1)$ -dimensionale Flächenstücke integriert; der Wert des Integrals ist die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die betreffende Fläche strömt.

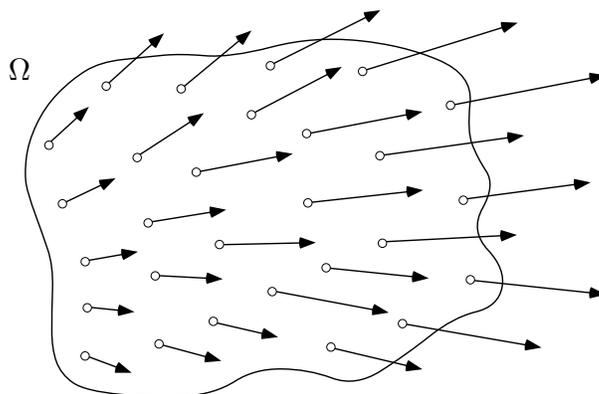


Fig. 6.1.2

Ein Vektorfeld in der Ebene (Fig. 6.1.3) hat zwei Koordinaten:

$$\mathbf{K}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = (K_1(x_1, x_2), K_2(x_1, x_2)),$$

ein Vektorfeld im Raum deren drei:

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

bzw.

$$\mathbf{K}(x_1, x_2, x_3) = (K_1(x_1, x_2, x_3), K_2(x_1, x_2, x_3), K_3(x_1, x_2, x_3)) .$$

Die einzelnen Koordinaten  $P(\cdot), \dots, K_i(\cdot)$  sind reellwertige Funktionen von zwei oder drei Variablen.  $\mathbf{K}$  ist ein  $C^r$ -**Vektorfeld**, wenn seine Koordinaten  $r$ -mal stetig differenzierbar sind.

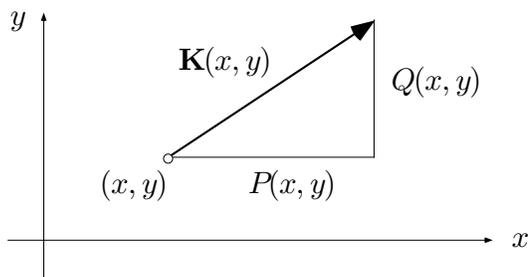


Fig. 6.1.3

## Beispiele

① Wir betrachten das Gravitationsfeld der Erde, innerhalb und außerhalb, wobei wir natürlich eine konstante Dichte zugrundelegen. Es seien  $R$  der Erdradius,  $g$  die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche und  $m$  eine Probemasse an der Stelle  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $|\mathbf{r}| =: r$ . Wie wir in Beispiel 4.5.⑨ gesehen haben, wird die Probemasse überall gerade so stark angezogen, wie wenn die gesamte weiter innen liegende Erdmasse in  $\mathbf{0}$  konzentriert wäre. Somit hat die Anziehungskraft  $\mathbf{K}$  für  $r \leq R$  den Betrag

$$K(r) = C \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \frac{1}{r^2}$$

mit einer geeigneten Konstanten  $C$ , und wegen  $K(R) = mg$  folgt

$$K(r) = mg \frac{r}{R} \quad (0 \leq r \leq R)$$

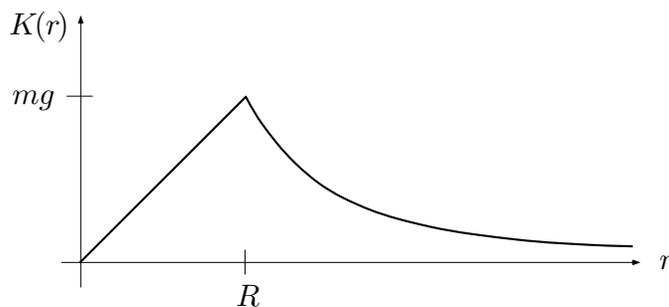


Fig. 6.1.4

(Fig. 6.1.4). Ist  $r \geq R$ , so ist unabhängig von  $r$  die ganze Erdmasse wirksam. Für diese  $r$  gilt daher

$$K(r) = C' \cdot \frac{1}{r^2}$$

mit einem geeigneten  $C'$ , und durch Eichung an der Erdoberfläche ergibt sich

$$K(r) = mg \frac{R^2}{r^2} \quad (r \geq R) .$$

Die Anziehungskraft  $\mathbf{K}$  ist stets auf den Ursprung hin gerichtet. An der Stelle  $\mathbf{r}$  wird diese Richtung repräsentiert durch den Einheitsvektor  $\mathbf{e} := -\mathbf{r}/r$  (Fig. 6.1.5). Damit erhalten wir

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -K(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{cases} -\frac{mgr}{R} \frac{\mathbf{r}}{r} & (0 \leq r \leq R) , \\ -\frac{mgR^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} & (r \geq R) \end{cases}$$

bzw. in Koordinaten:

$$\mathbf{K}(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{mgr}{R} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) & (0 \leq r \leq R) , \\ -\frac{mgR^2}{r^2} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) & (r \geq R) . \end{cases}$$

○

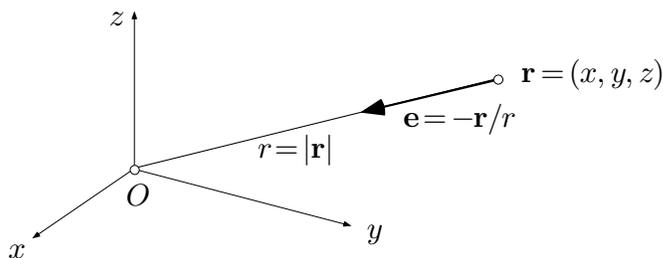


Fig. 6.1.5

② Es sei  $\mathbf{e}$  ein im Ursprung des  $\mathbb{R}^3$  angehefteter Einheitsvektor. Rotiert der “Weltäther” mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Achse  $\mathbf{e}$ , so entsteht ein Strömungsfeld  $\mathbf{v}$ , und zwar ist  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  nach Beispiel 1.6.⑧ gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{e} \times \mathbf{x} = \vec{\omega} \times \mathbf{x},$$

wobei  $\vec{\omega} := \omega \mathbf{e}$  den Winkelgeschwindigkeitsvektor bezeichnet (Fig. 6.1.6). In Koordinaten ausgeschrieben sieht das folgendermaßen aus:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1).$$

Die einzelnen Koordinatenfunktionen von  $\mathbf{v}$  sind also lineare Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  ( $\vec{\omega}$  ist fest). ○

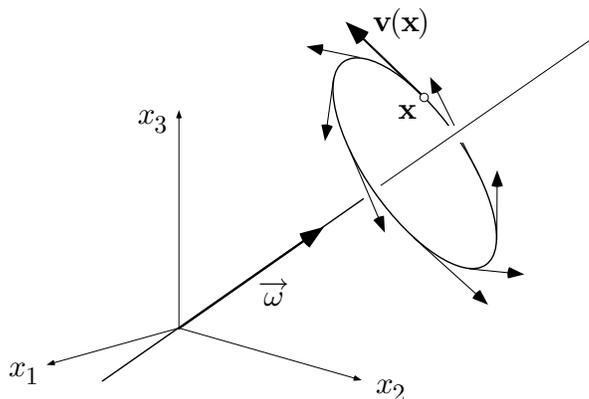


Fig. 6.1.6

Ist  $f$  ein  $C^1$ -Skalarfeld im Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , so ist in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  der Gradient  $\nabla f(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$  erklärt. Somit ist

$$\nabla f = (f_{,1}, \dots, f_{,n})$$

(bzw.  $= (f_x, f_y)$  oder  $= (f_x, f_y, f_z)$ ) ein Vektorfeld auf  $\Omega$ , das sogenannte **Gradientenfeld** von  $f$ . Die Feldvektoren stehen überall senkrecht auf den Niveaulinien (Niveauflächen) von  $f$ . Viele Vektorfelder  $\mathbf{K}$  lassen sich als Gradientenfeld eines geeigneten  $f$  auffassen, aber nicht alle.

③ Das im punktierten Raum  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  definierte Vektorfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) := \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0}),$$

$C$  eine positive oder negative Konstante, heißt **Coulombfeld**. Die von Punktladungen im Ursprung erzeugten elektrischen Felder sowie das Gravitationsfeld einer Punktmasse sind von diesem Typ. Das Coulombfeld kann als Gradientenfeld eines Skalarfeldes aufgefaßt werden, und zwar des Feldes

$$f(\mathbf{r}) := -\frac{C}{r} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0}).$$

(Wie man darauf kommt, werden wir später sehen.) — Zum Beweis setzen wir  $-C/r =: \phi(r)$ ; dann gilt nach der Kettenregel und 5.1.(6):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{x}{r};$$

analog für die übrigen Variablen. Es ergibt sich

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{C}{r^2} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{K}(\mathbf{r}),$$

wie behauptet. — Man nennt  $f$  ein **Potential** des Feldes  $\mathbf{K}$ . ○

Allgemein: Ein in allen Punkten  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$  definiertes Feld  $\mathbf{K}$ , das eine Darstellung der Form

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = K(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

zuläßt, heißt ein **Zentralfeld**. Die Feldvektoren  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$  zeigen in allen Punkten  $\mathbf{r}$  zum Ursprung oder in die dazu entgegengesetzte Richtung, und ihr Betrag  $|\mathbf{K}(\cdot)| =: K(\cdot)$  hängt nur von  $r := |\mathbf{r}|$  ab.

Ferner: Ist  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{K}_0$ , so nennt man  $\mathbf{K}$  ein **homogenes Vektorfeld**. Das Erdfeld in einem Labor oder das elektrische Feld zwischen den Platten eines Plattenkondensators werden als homogen angesehen.

Die Nullstellen eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  heißen **singuläre Punkte** von  $\mathbf{v}$ ; sie liegen im allgemeinen isoliert. Alle übrigen Punkte heißen **regulär**.

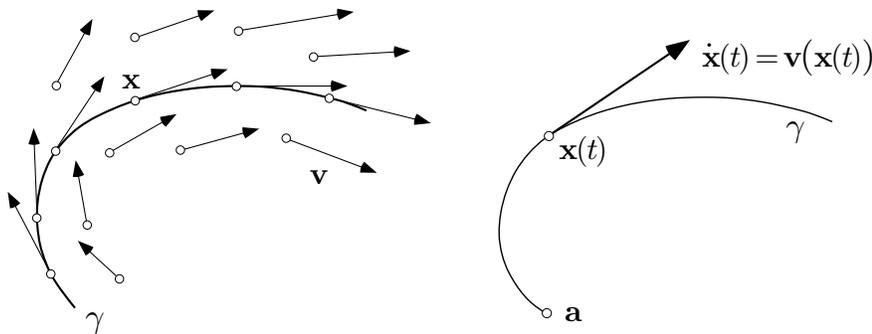


Fig. 6.1.7

## Feldlinien

Es sei  $\mathbf{v}$  ein Vektorfeld in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Kurve  $\gamma$  in  $\Omega$ , deren Tangente in jedem Punkt zum dort angehefteten Feldvektor parallel ist (Fig. 6.1.7, links), heißt eine **Feldlinie** von  $\mathbf{v}$ . Wie wir gleich sehen werden, geht durch jeden regulären Punkt  $\mathbf{x}$  des Feldes  $\mathbf{v}$  genau eine Feldlinie. In den Beispielen ①–③ und bei einem homogenen Feld ist unmittelbar evident, welches die Feldlinien sind. Die Feldlinien eines Gradientenfeldes  $\nabla f$  sind die Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien (Niveaulächen) von  $f$  (Fig. 6.1.8). Beim Übergang vom Vektorfeld zu den Feldlinien geht die Information über Betrag und “Vorzeichen” der Feldvektoren verloren.

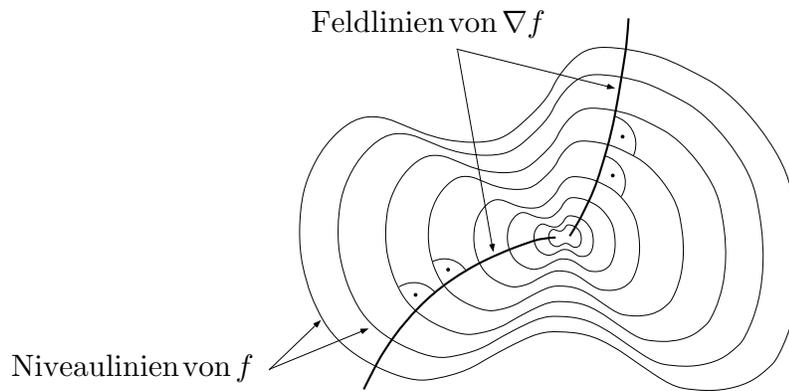


Fig. 6.1.8

Die Feldlinien  $\gamma$  eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  besitzen eine natürliche Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) . \quad (1)$$

Wir verlangen dabei, daß der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  jederzeit *gleich* dem (und nicht nur parallel zum) Feldvektor an der Stelle  $\mathbf{x}(t)$  ist, in Formeln:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$$

(Fig. 6.1.7, rechts). Diese Identität läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die Funktion (1) ist Lösung der ( $t$ -freien) Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) . \quad (2)$$

In Koordinaten ausgeschrieben wird daraus ein System

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= v_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\}$$

von  $n$  (hier: 3) Differentialgleichungen für  $n$  unbekannte Funktionen  $t \mapsto x_i(t)$ . Der Satz über die Existenz von Lösungen eines derartigen Systems garantiert, daß zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (3)$$

genau eine Lösung  $\mathbf{x}(\cdot)$  von (2) existiert, und zwar ist  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  tatsächlich eine Kurve, falls  $\mathbf{a}$  ein regulärer Punkt von  $\mathbf{v}$  ist. (Ist  $\mathbf{v}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , so lautet die Lösung des Anfangswertproblems (2)^(3) einfach  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{a}$ .)

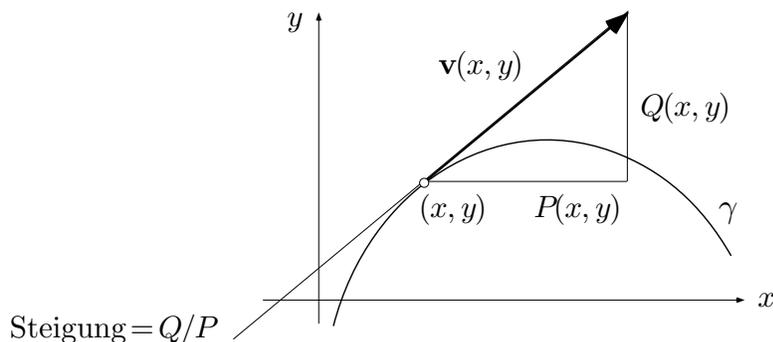


Fig. 6.1.9

Die Feldlinien eines *ebenen* Vektorfeldes  $\mathbf{v} = (P, Q)$  lassen sich schon mit Hilfe einer einzigen Differentialgleichung bestimmen, wobei allerdings der “natürliche” Parameter  $t$  gar nicht ins Spiel kommt. Wie man der Figur 6.1.9 entnimmt, ist nämlich die Steigung  $y'$  der durch den Punkt  $(x, y)$  gehenden Feldlinie gegeben durch

$$y' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Das ist auch schon die angesagte Differentialgleichung.

④ Die Feldlinien des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y) := \left( \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

(Fig. 6.1.10) vom konstanten Betrag  $|\mathbf{v}(x, y)| \equiv \sqrt{2}$  genügen der homogenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

jedenfalls abseits der Winkelhalbierenden  $x = y$ . Wie wir in Beispiel 4.6.⑨ gesehen haben, sind die Lösungskurven dieser Differentialgleichung die logarithmischen Spiralen

$$r(\phi) = C e^{\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

(Polarkoordinaten). Die “natürliche” Parameterdarstellung würde diese Spiralen mit konstanter Absolutgeschwindigkeit  $\sqrt{2}$  abfahren. ○

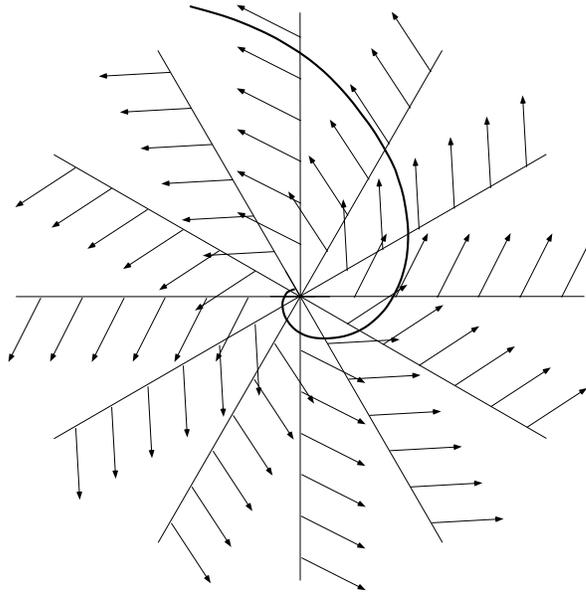


Fig. 6.1.10

## Begriff des Linienintegrals

Die Vektoranalysis handelt von den Möglichkeiten und Wirkungen des Differenzierens und Integrierens im Zusammenhang mit Skalar- und Vektorfeldern. Ein Beispiel dafür haben wir schon kennengelernt: Der “Operator”  $\nabla$  liefert zu jedem Skalarfeld  $f$  ein Vektorfeld  $\nabla f$ , das mit  $f$  in einem bestimmten geometrisch oder physikalisch interpretierbaren Zusammenhang steht. Weitere derartige **Differentialoperatoren** ( $\text{div}$ ,  $\text{rot}$ ,  $\Delta$ ) werden wir in den folgenden Abschnitten einführen und beschreiben.

An dieser Stelle behandeln wir eine Weise zu integrieren, die in gewissem Sinn die Gradientenbildung rückgängig macht (vgl. den Satz (6.1)!). Es geht um den Begriff des Linienintegrals.

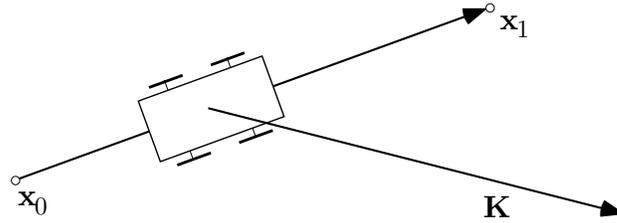


Fig. 6.1.11

Schiebt ein homogenes Kraftfeld  $\mathbf{K}$  ein Wägelchen auf gerader Bahn von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}_1$  (Fig. 6.1.11), so leistet es dabei bekanntlich die Arbeit

$$W = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) .$$

Wir betrachten jetzt ein variables Kraftfeld  $\mathbf{K}$ , und anstelle der geraden Bahn sei eine glatte Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

gegeben. Es sei weiter

$$\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

eine hinreichend feine Teilung des Intervalls  $[a, b]$  und  $\mathbf{x}(t_k) =: \mathbf{x}_k$ . Schiebt jetzt das Kraftfeld  $\mathbf{K}$  unser Wägelchen längs der Kurve  $\gamma$  von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}_N$  (Fig. 6.1.12), so können wir die dabei geleistete Arbeit folgendermaßen veranschlagen:

$$\begin{aligned} W &\doteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}(t_k)) \cdot \mathbf{x}'(t_k) (t_{k+1} - t_k) \\ &\doteq \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt . \end{aligned}$$

Aufgrund dieser physikalischen Betrachtungen nennt man das Integral

$$\int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \tag{4}$$

das **Linienintegral** oder **Arbeitsintegral** von  $\mathbf{K}$  längs  $\gamma$  und bezeichnet es in suggestiver Weise mit

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

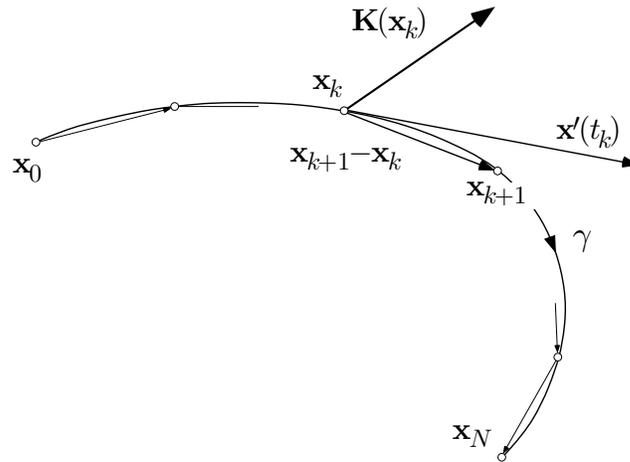


Fig. 6.1.12

Für die konkrete Berechnung hat man die Parameterdarstellung von  $\gamma$  ins Vektorfeld  $\mathbf{K}$  einzusetzen und das **vektorielle Linienelement**  $d\mathbf{x}$  ebenfalls durch  $t$  auszudrücken:

$$d\mathbf{x} := \mathbf{x}'(t)dt .$$

In Koordinaten sieht das folgendermaßen aus: Es seien

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

ein Vektorfeld und

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (P, Q, R) \cdot (x', y', z') dt \\ &= \int_a^b \left( P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(\dots)y'(t) + R(\dots)z'(t) \right) dt . \end{aligned}$$

Für ein Vektorfeld  $\mathbf{K} = (P, Q)$  und eine Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

in der Ebene gilt analog

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt .$$

Im Hinblick auf die rechte Seite dieser Gleichung verwendet man anstelle von

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$$

häufig die Schreibweise

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy),$$

wobei die Differentiale  $dx$  und  $dy$  *at runtime* durch  $x'(t)dt$  und  $y'(t)dt$  zu ersetzen sind.

Der Wert eines Linienintegrals hängt nicht von der für  $\gamma$  gewählten Parameterdarstellung ab, wohl aber von der Richtung, in der  $\gamma$  durchlaufen wird. Bezeichnet  $-\gamma$  "die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve  $\gamma$ ", so gilt

$$\int_{-\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}.$$

Diese Dinge leuchten aufgrund der physikalischen Interpretation ohne weiteres ein.

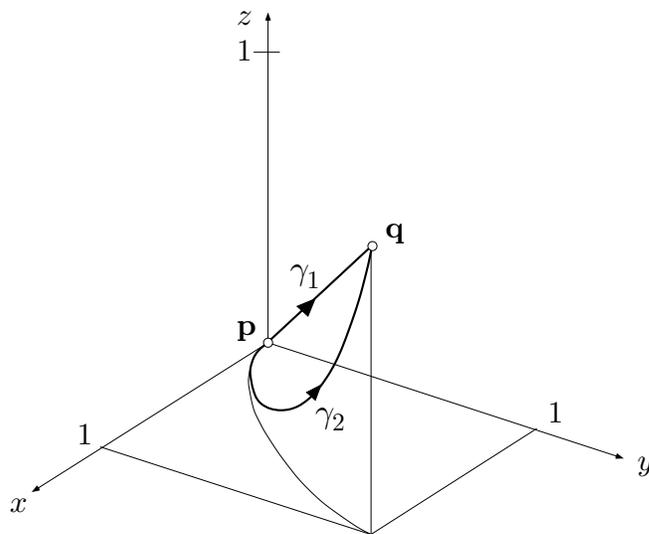


Fig. 6.1.13

⑤ Wir betrachten im  $(x, y, z)$ -Raum das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (y^2, xz, 1),$$

ferner die zwei Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{cases} x(t) := t \\ y(t) := t \\ z(t) := t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \gamma_2 : t \mapsto \begin{cases} x(t) := t \\ y(t) := t^2 \\ z(t) := t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(Fig. 6.1.13), die beide den Punkt  $\mathbf{p} := (0, 0, 0)$  mit dem Punkt  $\mathbf{q} := (1, 1, 1)$  verbinden. Für die Linienintegrale von  $\mathbf{K}$  längs  $\gamma_1$  und längs  $\gamma_2$  erhalten wir

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (y^2(t)x'(t) + x(t)z(t)y'(t) + 1 \cdot z'(t)) dt ;$$

dabei sind rechter Hand die Parameterdarstellungen der  $\gamma_i$  einzusetzen. Es ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + t^4 \cdot 2t + 1 \cdot 3t^2) dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{3} = \frac{23}{15}.$$

Zu verschiedenen Verbindungen derselben zwei Punkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  können also durchaus verschiedene Werte des Linienintegrals gehören.  $\circ$

## 1-Ketten

Wir haben in der Definition (4) des Linienintegrals vorausgesetzt, daß die Kurve  $\gamma$  glatt ist oder jedenfalls eine  $C^1$ -Parameterdarstellung besitzt. Wir können aber diese Definition ausdehnen auf beliebige “formale Summen”

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$$

von glatten Kurven  $\gamma_i$ , indem wir das Linienintegral längs einer derartigen **Kette**  $\gamma$  definieren durch

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} := \int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \dots + \int_{\gamma_r} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}.$$

Unter die Ketten fallen insbesondere die glatten Kurven “mit Ecken”, auch **stückweise glatte Kurven** genannt (Fig. 6.1.14, links). Eine Kette kann aber auch aus mehreren getrennten Stücken bestehen. Zum Beispiel besitzt der Kreisring  $B$  rechts in Fig. 6.1.14 den Randzyklus (s.u.)  $\partial B = \gamma_b - \gamma_a$ .

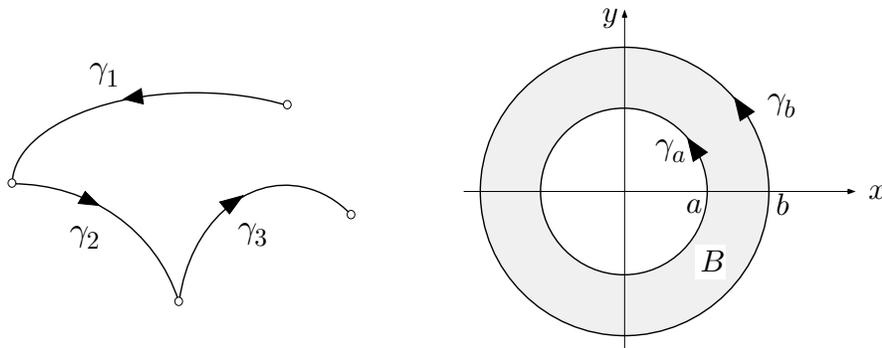


Fig. 6.1.14

⑥ Es sei  $\partial B := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$  der im Gegenuhreigersinn durchlaufene Rand des Quadrats  $B := [0, 1]^2$  in der  $(x, y)$ -Ebene (Fig. 6.1.15) und

$$(P(x, y), Q(x, y)) := (x^3 + xy^2, x^2y - y^5)$$

ein Vektorfeld. Es soll das Integral

$$W := \int_{\partial B} (Pdx + Qdy)$$

berechnet werden. — Wir setzen zur Abkürzung

$$\int_{\gamma_i} (Pdx + Qdy) =: W_i \quad (1 \leq i \leq 4);$$

dann ist (definitionsgemäß)

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 .$$

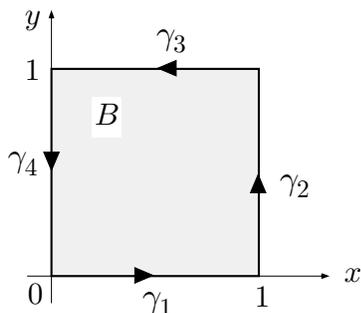


Fig. 6.1.15

Für  $\gamma_1$  können wir  $x$  als Parameter nehmen, und  $y$  ist  $\equiv 0$ . Dann ist  $x$  auch Integrationsvariable, und es ist  $x'(x) \equiv 1$ ,  $y'(x) \equiv 0$ . Wir erhalten somit

$$W_1 = \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_0^1 P(x, 0) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} .$$

Für  $\gamma_2$  können wir  $y$  als Parameter nehmen, und  $x$  ist  $\equiv 1$ . Folglich wird  $y$  Integrationsvariable, und es ist  $x'(y) \equiv 0$ ,  $y'(y) \equiv 1$ . Damit erhalten wir

$$W_2 = \int_0^1 Q(1, y) dy = \int_0^1 (y - y^5) dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} .$$

Die Teilstücke  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  durchlaufen wir lieber in umgekehrter Richtung, wobei allerdings die Vorzeichen richtigzustellen sind. Es ergibt sich

$$W_3 = - \int_0^1 P(x, 1) dx = \int_1^0 (x^3 + x) dx = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4},$$

$$W_4 = - \int_0^1 Q(0, y) dy = \int_0^1 y^5 dy = \frac{1}{6}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$W = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = 0.$$

Wie wir noch sehen werden, ist dieses Ergebnis kein Zufall. In Wirklichkeit ist das Linienintegral dieses Feldes für jeden geschlossenen Weg gleich 0.

○

## Konservative Felder

Wir haben in Beispiel ⑤ gesehen, daß das Linienintegral eines Vektorfeldes längs verschiedenen Kurven von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$  verschiedene Werte annehmen kann. Ein Vektorfeld  $\mathbf{K}$  heißt **konservativ**, wenn dieses Phänomen *nicht* auftritt, in anderen Worten: wenn der folgende Sachverhalt zutrifft:

(a) Für je zwei Kurven  $\gamma_1, \gamma_2 \subset \text{dom}(\mathbf{K})$  mit denselben Anfangs- und Endpunkten gilt:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Dies ist äquivalent mit dem folgenden: Das Feld  $\mathbf{K}$  ist **konservativ**, wenn

(b) für alle geschlossenen Kurven  $\gamma \subset \text{dom}(\mathbf{K})$  gilt:

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (6)$$

□ (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt  $\mathbf{p}$ . Die Kurve  $\gamma$  verbindet die gleichen Punkte miteinander wie die “konstante Kurve”  $\gamma_*$  in  $\mathbf{p}$ . Das Integral längs  $\gamma_*$  ist aber trivialerweise = 0. Mit (a) folgt daher (6), und da  $\gamma$  beliebig war, (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Laufen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  beide von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$ , so ist die Kette  $\gamma_1 - \gamma_2$  eine geschlossene Kurve  $\gamma$  (Fig. 6.1.16), und mit (b) folgt (5). Da  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \gamma_1, \gamma_2$  beliebig waren, ist damit (a) erwiesen. □

Der Name “konservativ” steht mit physikalischen Vorstellungen in Zusammenhang: Für die Bewegung in derartigen Feldern gilt der Satz von der Erhaltung der Energie. Wir beweisen:

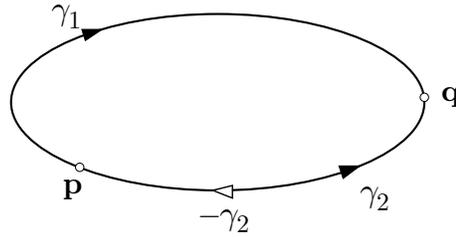


Fig. 6.1.16

(6.1) (a) *Gradientenfelder sind konservativ.*

(b) *Ist  $\mathbf{K} = \nabla f$ , so gilt für alle von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$  laufenden Kurven  $\gamma$ :*

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) . \quad (7)$$

Ist  $\mathbf{K} = \nabla f$  für ein geeignetes  $f$ , so nennt man  $f$  ein **Potential** des Feldes  $\mathbf{K}$ ; ein Gradientenfeld wird daher auch als **Potentialfeld** bezeichnet. Die Behauptung (b) besagt: Bei einem Potentialfeld ist das Linienintegral längs einer beliebigen Kurve gleich der Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve. Die eindimensionale Version von (7) ist die vertraute Formel

$$\int_p^q f'(t) dt = f(q) - f(p) .$$

□ Es genügt, (b) zu beweisen, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß  $\gamma$  eine  $C^1$ -Parameterdarstellung

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

besitzt; dabei ist  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{x}(b) = \mathbf{q}$  (Fig 6.1.17). Für die Hilfsfunktion

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}(t))$$

gilt nach der Kettenregel (5.3):

$$\phi'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) .$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt = \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a) \\ &= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad \square$$

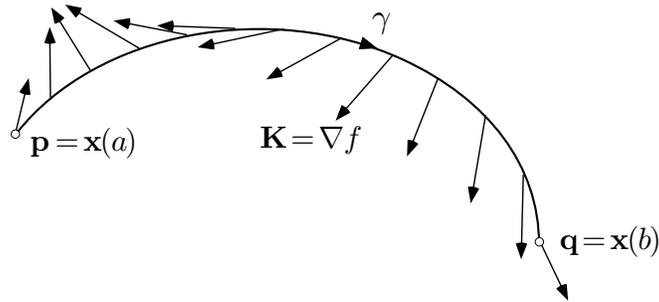


Fig. 6.1.17

⑥ (Forts.) Wie man sofort verifiziert, ist  $(P, Q)$  das Gradientenfeld der Funktion

$$f(x, y) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^6}{6},$$

also konservativ. Folglich ist das Linienintegral dieses Feldes längs beliebigen geschlossenen Kurven, insbesondere längs  $\partial B$ , gleich 0. Ferner gilt zum Beispiel

$$\int_{\gamma_3} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma_3} \nabla f \cdot d\mathbf{z} = f(0, 1) - f(1, 1) = -\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{3}{4}.$$

○

## Konservative Vektorfelder besitzen ein Potential

Von Satz (6.1)(a) gilt nun auch die Umkehrung (Satz (6.2)(a)); somit sind konservative Felder und Gradientenfelder in Wirklichkeit ein und dasselbe. Im zweiten Teil von (6.2) wird angenommen, daß der Definitionsbereich  $\Omega$  des betrachteten Feldes  $\mathbf{K}$  **zusammenhängend** ist, das heißt: daß sich je zwei Punkte  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$  tatsächlich durch eine in  $\Omega$  gelegene Kurve miteinander verbinden lassen.

(6.2) (a) *Konservative Vektorfelder besitzen ein Potential.*

(b) *Es sei  $\mathbf{K}$  ein konservatives Vektorfeld auf dem zusammenhängenden Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{p}_0$  ein beliebiger, aber fester Punkt von  $\Omega$ . Dann ist*

$$f(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \quad (8)$$

ein Potential von  $\mathbf{K}$ ; dabei bezeichnet  $\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}}$  das Integral längs irgendeiner in  $\Omega$  gelegenen Kurve von  $\mathbf{p}_0$  nach  $\mathbf{p}$ . Zweitens gilt: Die sämtlichen Potentiale von  $\mathbf{K}$  auf  $\Omega$  sind die Funktionen  $f + \text{const.}$  .

□ Es genügt, (b) zu beweisen. Nach Annahme über  $\mathbf{K}$  und über  $\Omega$  ist die Funktion  $f$  jedenfalls wohldefiniert. Wir müssen zeigen, daß  $\nabla f = \mathbf{K}$  ist. Hierzu halten wir den Punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  für einen Moment fest und betrachten die partielle Funktion

$$\psi(x_1) := f(x_1, p_2, \dots, p_n) \quad (p_1 - h < x_1 < p_1 + h) .$$

Es gilt

$$\psi(x_1) = f(\mathbf{p}) + \int_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} , \quad (9)$$

wobei

$$\sigma : t \mapsto (t, p_2, \dots, p_n) \quad (p_1 \leq t \leq x_1) \quad (10)$$

die Verbindungsstrecke der Punkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q} := (x_1, p_2, \dots, p_n)$  bezeichnet, siehe die Fig. 6.1.18. Aus (9) und (10) folgt

$$\psi(x_1) = f(\mathbf{p}) + \int_{p_1}^{x_1} K_1(t, p_2, \dots, p_n) \cdot 1 dt .$$

Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze liefert

$$\psi'(x_1) = K_1(x_1, p_2, \dots, p_n)$$

und damit

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{p}} = \psi'(p_1) = K_1(p_1, p_2, \dots, p_n) ,$$

wie behauptet. Analog schließt man für die anderen Koordinaten.

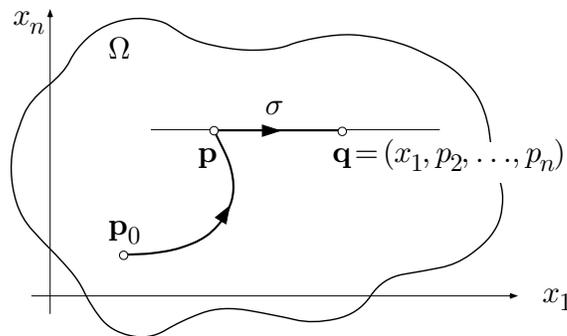


Fig. 6.1.18

Zum Beweis der letzten Behauptung betrachten wir neben  $f$  ein weiteres Potential  $g$ . Es gilt also

$$\nabla f = \nabla g = \mathbf{K} .$$

Für je zwei Punkte  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$  gilt dann (7) sowohl für  $f$  wie für  $g$ . Folglich ist

$$g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$$

und somit

$$g(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}) = g(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}) .$$

Da  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  beliebig waren, folgt  $g - f = \text{const.}$  . — Umgekehrt ist natürlich mit  $f$  auch jede Funktion  $f + \text{const.}$  ein Potential.  $\square$

Wie sieht man einem gegebenen Vektorfeld  $\mathbf{K}$  an, daß es konservativ ist und folglich ein Potential  $f$  (eine “Stammfunktion”) besitzt? Bis man das Linienintegral längs allen geschlossenen Kurven berechnet und als 0 erwiesen hat, ist jedenfalls die erste Sekunde der Ewigkeit vorbei. Wir werden aber im folgenden eine einleuchtende, notwendige und hinreichende “Integrabilitätsbedingung” herleiten. Das Paradoxe daran ist, daß man das Feld differenzieren muß, um zu sehen, ob man es integrieren kann.

## Differentialformen

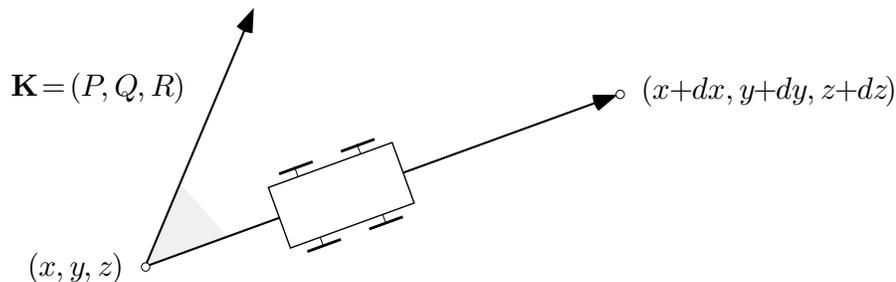


Fig. 6.1.19

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß man die Vektoranalysis auch in einer anderen “Sprache” formulieren kann. Die Objekte des Studiums sind dann nicht die Vektorfelder  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$  bzw.  $\mathbf{K} = (P, Q)$ , sondern die in den Linienintegralen auftretenden Ausdrücke

$$Pdx + Qdy + Rdz \quad \text{bzw.} \quad Pdx + Qdy .$$

Man nennt diese Ausdrücke **Differentialformen**, genauer **1-Formen**, da sie über eindimensionale Ketten integriert werden. Eine 1-Form läßt sich folgendermaßen physikalisch interpretieren (Fig. 6.1.19): Verschiebt das Kraftfeld  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$  ein Wägelchen von  $(x, y, z)$  nach  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , so leistet es in erster Näherung die Arbeit

$$(P, Q, R)_{(x,y,z)} \cdot (dx, dy, dz) = Pdx + Qdy + Rdz .$$

Bei dieser Umsetzung entspricht dem Gradientenfeld

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) \quad \text{bzw.} \quad \nabla f = (f_x, f_y)$$

einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  das sogenannte **totale Differential** von  $f$ :

$$df := f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad \text{bzw.} \quad df := f_x dx + f_y dy .$$

Die Frage, ob ein gegebenes Vektorfeld  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$  ein Potential  $f$  besitzt, lautet dann folgendermaßen: Ist die gegebene 1-Form

$$\omega := Pdx + Qdy + Rdz$$

das totale Differential einer Funktion  $f$ ?

Solange man sich strikt an kartesische Koordinaten hält, sind beide Formulierungen der Theorie gleichwertig. Es läßt sich aber nicht leugnen, daß Differentialformen einen logischeren und einheitlicheren Aufbau der Theorie ermöglichen.

## Aufgaben

1. Produziere ein Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$  mit den folgenden Eigenschaften:
  - (1) Die Kreise, die die  $y$ -Achse im Ursprung berühren, sind Feldlinien.
  - (2) Das Feld ist in der ganzen Ebene definiert und stetig differenzierbar.
2. Produziere ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld  $\mathbf{v}$ , das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,h} : t \mapsto (r \cos t, r \sin t, t - h) \quad (r \geq 0, h \in \mathbb{R})$$

als Feldlinien besitzt.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) := \frac{y^2}{1 - x^2}.$$

Bestimme

- (a) die Gleichung und die Differentialgleichung der Niveaulinien von  $f$ ,
- (b) die Differentialgleichung der Feldlinien des Vektorfeldes  $\nabla f$ ,
- (c) die Gleichung der Feldlinien von  $\nabla f$ .

4. Berechne das Linienintegral  $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$  für

- (a)  $\mathbf{K}(x, y) := (x^2 + y, 2xy)$ ,  $\gamma$  der Einheitskreis mit positivem Umlaufsinne;
- (b)  $\mathbf{K}(x, y) := (x + y, 2x - y)$ ,  $\gamma$  der Bogen der kubischen Parabel  $y = x^3$  von  $(-2, -8)$  bis  $(1, 1)$ ;
- (c)  $\mathbf{K}(x, y, z) := (x^2, y - z, y + z)$ ,  $\gamma$  die Schnittkurve der Einheitskugel mit der Ebene  $z = \frac{1}{2}$  (positiver Umlaufsinne um die  $z$ -Achse);
- (d)  $\mathbf{K}(x, y, z) := (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $\gamma$  die spiralige Kurve

$$\gamma: t \mapsto (t \cos t, t \sin t, t) \quad (0 \leq t \leq R).$$

5. Es sei  $\partial D: t \mapsto e^{it}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) der in positivem Sinn durchlaufene Einheitskreis in der  $z$ -Ebene,  $z = x + iy$ . Berechne, mit sinngemäßer Interpretation der darin auftretenden Symbole, das Linienintegral

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} dz$$

bzw. allgemein die Integrale

$$\int_{\partial D} z^k dz \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

6. Produziere eine geschlossene, glatte (das heißt: reguläre  $C^1$ -) Kurve

$$\gamma: t \mapsto (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

die, als Kette aufgefaßt, gleich 0 ist. (*Hinweis:* Ist  $\gamma$  eine beliebige Kurve, so ist  $\gamma + (-\gamma)$  die Nullkette.)

## 6.2 Die Greensche Formel für ebene Bereiche

### Was ist ein “Integralsatz”?

Im Zentrum der Vektoranalysis stehen die sogenannten **Integralsätze**. Den einfachsten davon (Satz (6.1)(b)) haben wir schon kennengelernt: Ist  $f$  ein Skalarfeld und  $\gamma$  eine beliebige Kurve von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$ , so gilt

$$f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} . \quad (1)$$

Hier steht linker Hand das “Integral” von  $f$  über den “Rand” der Kurve  $\gamma$  und rechter Hand das Integral einer “Ableitung” von  $f$  über die Kurve  $\gamma$  selber. Dabei erscheint als “Rand” einer Kurve die aus dem positiv gezählten Endpunkt und dem negativ gezählten Anfangspunkt bestehende “nulldimensionale Kette” (Fig. 6.2.1). Anstelle von (1) können wir daher in symbolischer Notation schreiben:

$$“ \int_{\partial\gamma} f = \int_{\gamma} df ” . \quad (2)$$

Diese Dualität  $\partial \leftrightarrow d$  finden wir auch bei den weiteren Integralsätzen, nur wird dort über zwei- bzw. dreidimensionale Bereiche und ihre Ränder integriert.



Fig. 6.2.1

Wir beginnen mit einem kompakten Bereich  $B$  in der  $(x, y)$ -Ebene, wobei wir folgendes voraussetzen: Der Rand von  $B$  besteht aus glatten Bögen  $\gamma_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), die so orientiert sind, daß  $B$  zur Linken der  $\gamma_i$  liegt. Man nennt die von den  $\gamma_i$  gebildete Kette

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r =: \partial B$$

den **Randzyklus** von  $B$  (Fig. 6.2.2). Es ist eine Erfahrungstatsache, daß sich die  $\gamma_i$  zu einer oder mehreren *geschlossenen* Kurven zusammenfügen (daher der Name *Zyklus*). Es gilt also “ $\partial(\partial B) = 0$ ”. Diese Formel gehört zu den Urprinzipien der Geometrie und stellt einen sehr allgemeinen und tiefliegenden Sachverhalt dar.

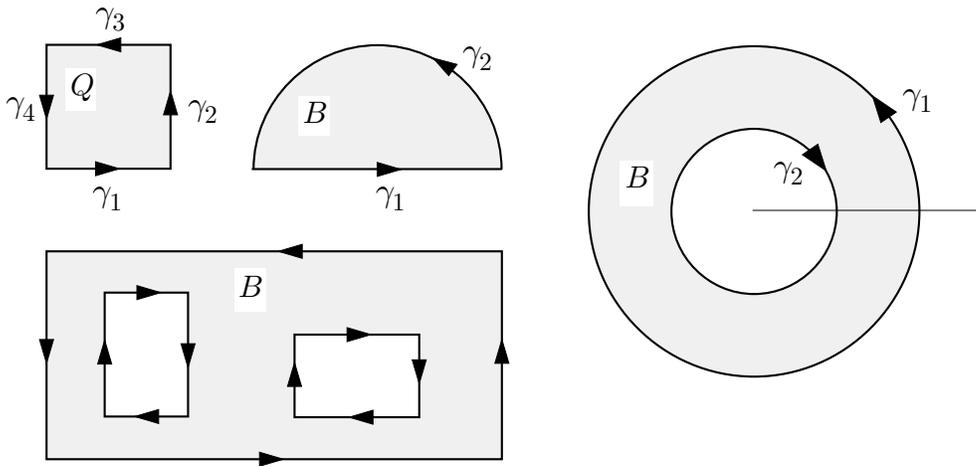


Fig. 6.2.2

Weiter sei  $(P, Q)$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $B$ ; verabredungsgemäß sind dann  $P$  und  $Q$  auf einer offenen Menge  $\Omega \supset B$  definiert. Man kann die in dem folgenden Satz auftretende Größe  $Q_x - P_y$  als eine Art “Ableitung” des Feldes  $(P, Q)$  auffassen (leider gibt es in der hier verwendeten mathematischen Sprache keinen offiziellen Namen dafür). Die **Greensche Formel** (3) ist somit ein Integralsatz der in (2) dargestellten Bauart.

### Die Greensche Formel

**(6.3)** Es seien  $\mathbf{K} := (P, Q)$  ein Vektorfeld auf dem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und  $B \subset \Omega$  ein Bereich mit Randzyklus  $\partial B$ . Dann gilt

$$\int_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y). \quad (3)$$

□ Wir beweisen (3) zunächst für einen dreieckigen “Wimpel”

$$W = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq d\}, \quad (4)$$

wobei wir die Fig. 6.2.3 zugrundelegen.  $W$  besitzt den Randzyklus

$$\partial W = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2.$$

Wir behandeln die Beiträge von  $P$  und von  $Q$  an die beiden Seiten von (3) getrennt voneinander und beginnen mit  $P$ . Dabei benützen wir für  $\gamma_0$  die Parameterdarstellung

$$\gamma_0 : x \mapsto (x, \phi(x)) \quad (a \leq x \leq b).$$

Es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned}
 \int_W (-P_y(x, y)) d\mu(x, y) &= - \int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^d P_y(x, y) dy \right) dx \\
 &= - \int_a^b \left( P(x, d) - P(x, \phi(x)) \right) dx \\
 &= \int_a^b P(x, \phi(x)) dx - \int_a^b P(x, d) dx \\
 &= \int_{\gamma_0} P dx - \int_{\gamma_1} P dx = \int_{\partial W} P dx .
 \end{aligned}$$

Hier haben wir zuletzt benutzt, daß die Strecke  $\gamma_2$  keinen Beitrag an das Integral  $\int_{\partial W} P dx$  liefert, denn längs  $\gamma_2$  ist  $dx = 0$ . Damit ist (3) bezüglich  $P$  bewiesen.

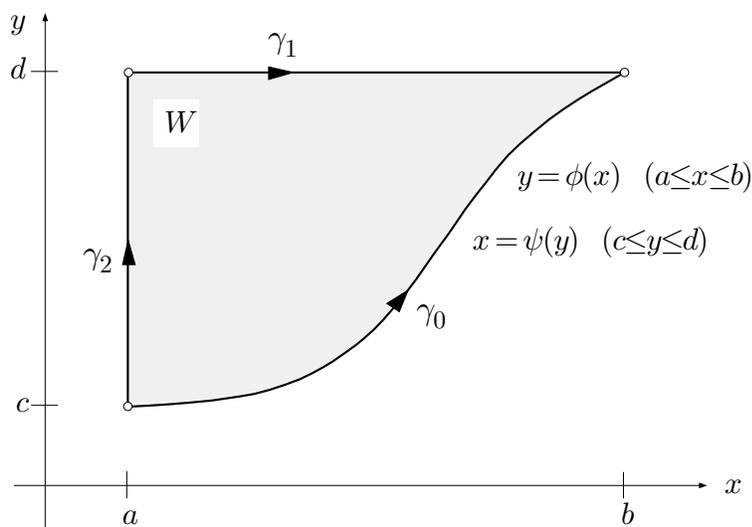


Fig. 6.2.3

Für den Beitrag von  $Q$  ersetzen wir (4) durch

$$W = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a \leq x \leq \psi(y)\}$$

und benützen für  $\gamma_0$  die Parameterdarstellung

$$\gamma_0 : y \mapsto (\psi(y), y) \quad (c \leq y \leq d) .$$

Damit ergibt sich analog wie vorher

$$\begin{aligned}
 \int_W Q_x(x, y) d\mu(x, y) &= \int_c^d \int_a^{\psi(y)} Q_x(x, y) dx dy \\
 &= \int_c^d \left( Q(\psi(y), y) - Q(a, y) \right) dy \\
 &= \int_c^d Q(\psi(y), y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy \\
 &= \int_{\gamma_0} Q dy - \int_{\gamma_2} Q dy = \int_{\partial W} Q dy .
 \end{aligned}$$

Hier haben wir zuletzt benutzt, daß die Strecke  $\gamma_1$  keinen Beitrag an das Integral  $\int_{\partial W} Q dy$  liefert, denn längs  $\gamma_1$  ist  $dy = 0$ .

Damit ist (3) für den in Fig. 6.2.3 dargestellten Wimpel  $W$  bewiesen, und für die Wimpel der Fig. 6.2.4 wird es wohl auch stimmen.

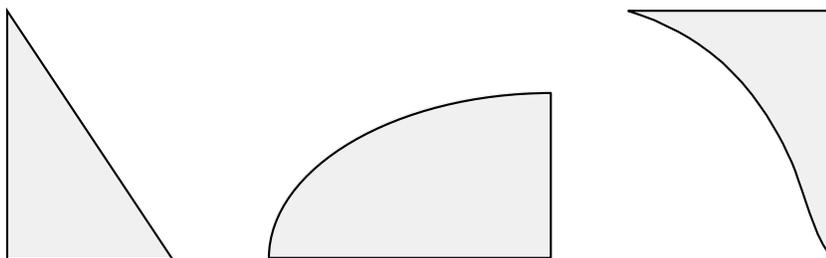


Fig. 6.2.4

Ein allgemeiner Bereich  $B$  der im Satz beschriebenen Art läßt sich durch vertikale und horizontale Schnitte in endlich viele Wimpel  $W_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) zerlegen (Fig. 6.2.5). Dann gilt einerseits

$$\int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y) = \sum_{i=1}^N \int_{W_i} (Q_x - P_y) d\mu(x, y) , \quad (5)$$

andererseits aber auch

$$\int_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \sum_{i=1}^N \int_{\partial W_i} (Pdx + Qdy) . \quad (6)$$

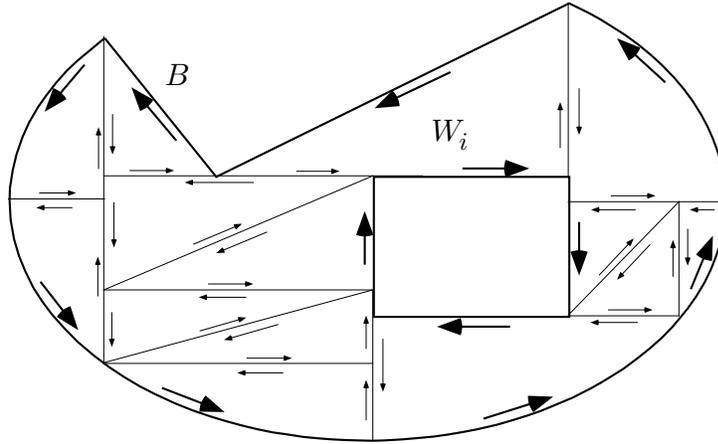


Fig. 6.2.5

Die Integrale längs den im Innern von  $B$  gelegenen Kanten der  $W_i$  heben sich nämlich heraus, da diese Kanten je zweimal gegenläufig abgefahren werden. Somit wird auch rechter Hand in (6) per saldo über  $\partial B$  integriert.

Da nun die Greensche Formel (3) für jedes einzelne  $W_i$  zutrifft, stimmen die Summanden rechts in (5) und (6) paarweise überein; folglich haben auch die linken Seiten dieser Formeln denselben Wert.  $\square$

Wir bringen nun einige Anwendungen der Greenschen Formel.

Als erstes ein “Trick” zur Flächenberechnung. Zu den beiden Vektorfeldern

$$(P(x, y), Q(x, y)) := (0, x) \quad \text{bzw.} \quad := (-y, 0)$$

gehören die 1-Formen  $x dy$  bzw.  $-y dx$ . In beiden Fällen ist  $Q_x - P_y \equiv 1$  und folglich

$$\int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y) = \mu(B) .$$

Wenden wir daher Satz (6.3) auf diese Felder an, so erhalten wir die sogenannten **Flächenformeln**, die den Flächeninhalt eines Bereichs  $B$  als Umlaufintegral darstellen:

$$(6.4) \quad \mu(B) = \begin{cases} \int_{\partial B} x dy , \\ - \int_{\partial B} y dx , \\ \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x dy - y dx) . \end{cases}$$

Diese Formeln sind dann bequem, wenn  $B$  nicht durch Ungleichungen, sondern durch eine Parameterdarstellung von  $\partial B$  festgelegt ist.

① Rollt ein Kreis vom Radius  $a$  einmal auf der  $x$ -Achse ab (Fig. 6.2.6), so beschreibt der auf der Kreisperipherie festgemachte Punkt  $P$  eine **Zykloide**  $\gamma$ . Wir wählen als Parameter den Wälzwinkel  $\tau$  und entnehmen der Figur die folgende Parameterdarstellung von  $\gamma$ :

$$\gamma: \tau \mapsto \begin{cases} x(\tau) = a(\tau - \sin \tau) \\ y(\tau) = a(1 - \cos \tau) \end{cases} \quad (0 \leq \tau \leq 2\pi).$$

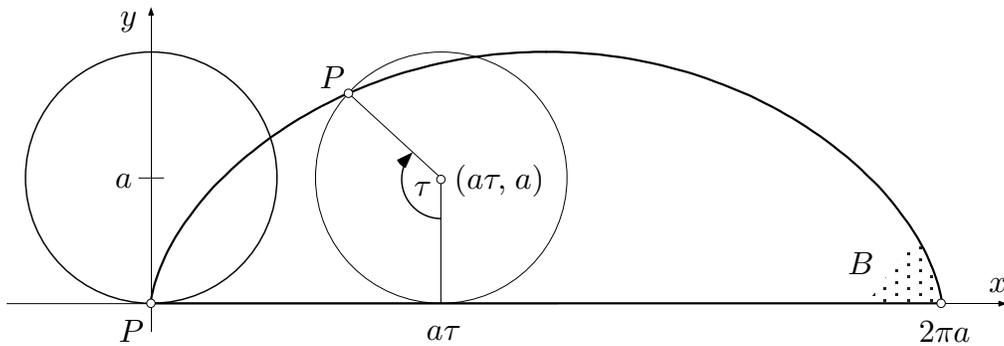
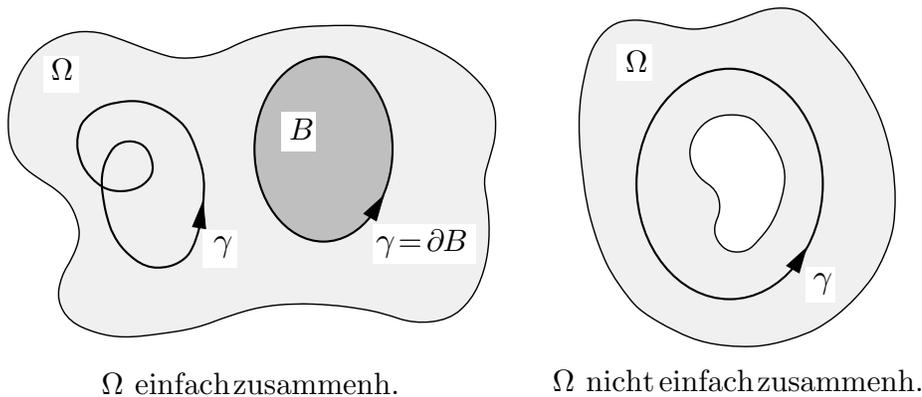


Fig. 6.2.6

Es soll nun der zwischen  $\gamma$  und der  $x$ -Achse eingeschlossene Flächeninhalt  $\mu(B)$  berechnet werden. Hierzu verwenden wir zum Beispiel die zweite Formel des Angebots (6.4); dabei erhalten wir das Integral längs der Grundlinie gratis. Es ergibt sich

$$\mu(B) = - \int_{-\gamma}^{\gamma} y \, dx = \int_0^{2\pi} y(\tau) x'(\tau) \, d\tau = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \tau)^2 \, d\tau = 3\pi a^2. \quad \circ$$



$\Omega$  einfach zusammenh.

$\Omega$  nicht einfach zusammenh.

Fig. 6.2.7

## Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder in der Ebene

Vor allem sind wir nun in der Lage, für Vektorfelder bzw. 1-Formen in der Ebene eine notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingung anzugeben. Dabei tritt überraschenderweise eine geometrische Zusatzbedingung auf, die sich auf das Definitionsgebiet  $\Omega$  des betrachteten Feldes bezieht.

Ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene Kurve  $\gamma \subset \Omega$  innerhalb  $\Omega$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt (Fig. 6.2.7). Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt auch folgendes: Jede geschlossene Kurve  $\gamma \subset \Omega$  berandet eine in  $\Omega$  gelegene 2-Kette, im einfachsten Fall ein Flächenstück  $B \subset \Omega$ , nämlich das Flächenstück, das beim Zusammenziehen überstrichen wird (Fig. 6.2.8–9).

② Hier einige Beispiele von Gebieten in der Ebene und im Raum:

Einfach zusammenhängend?	ja	nein
(a) Gebiete in der Ebene		
$\mathbb{R}^2$	✓	
Kreisscheibe	✓	
$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$		✓
$\mathbb{R}^2 \setminus$ Kreisscheibe		✓
$\mathbb{R}^2 \setminus$ Halbstrahl	✓	
Kreisring		✓
(b) Gebiete im Raum		
$\mathbb{R}^3$	✓	
$\mathbb{R}^3 \setminus$ endlich viele Punkte	✓	
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Vollkugel	✓	
Kugelrinde	✓	
Inneres eines Volltorus		✓
zylindrische Hülse		✓
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Kreislinie		✓
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Gerade		✓

○

Die versprochene Integrabilitätsbedingung lautet nun folgendermaßen:

**(6.5)** Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $(P, Q)$  (bzw. eine 1-Form  $Pdx + Qdy$ ) auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist genau dann ein Potentialfeld  $\nabla f$  (ein totales Differential  $df$ ), wenn gilt:

$$Q_x - P_y \equiv 0. \quad (7)$$

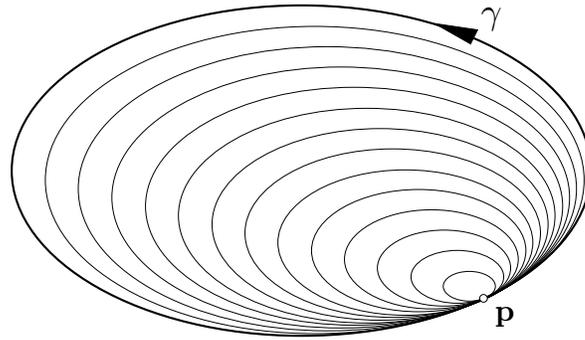


Fig. 6.2.8

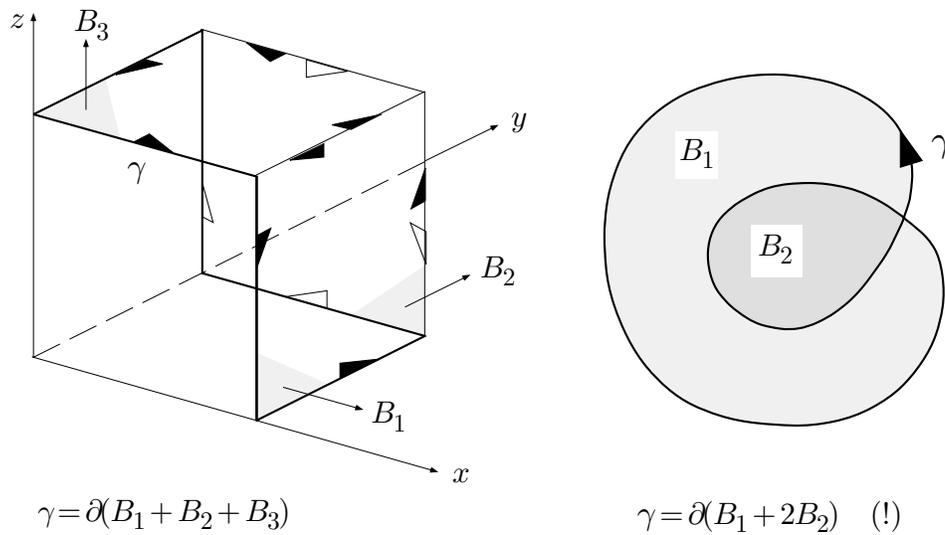


Fig. 6.2.9

□ Die Bedingung (7) ist notwendig: Ist

$$(P, Q) = \nabla f = (f_x, f_y),$$

so gilt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge:

$$Q_x - P_y = (f_y)_x - (f_x)_y \equiv 0.$$

Die Bedingung (7) ist aber auch hinreichend: Es sei  $\gamma$  eine beliebige geschlossene Kurve in  $\Omega$ . Dann gibt es nach Voraussetzung über  $\Omega$  einen Bereich  $B \subset \Omega$  mit  $\gamma = \pm \partial B$  (Fig. 6.2.10), und wir erhalten mit Satz (6.3):

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \pm \int_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \pm \int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y) = 0.$$

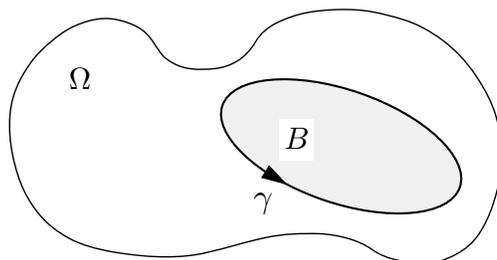


Fig. 6.2.10

Hieraus folgt, da  $\gamma$  beliebig war: Das Feld  $(P, Q)$  ist konservativ oder eben nach Satz (6.2)(a) ein Potentialfeld.  $\square$

Für ein beliebiges, gemeint ist: nicht notwendigerweise einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  läßt sich folgendes sagen: Ist die Bedingung (7) erfüllt, so ist das Feld jedenfalls lokal, das heißt: in einfach zusammenhängenden Teilgebieten, ein Potentialfeld, global aber unter Umständen nicht. Siehe dazu das Beispiel (4) dieses Abschnitts.

(3) Das Feld

$$(P, Q) := (x^3 + xy^2, x^2y - y^5)$$

von Beispiel 6.1.(6) ist in der ganzen Ebene definiert und erfüllt die Integrabilitätsbedingung:

$$Q_x - P_y = 2xy - 2xy \equiv 0 .$$

Dieses Feld ist also ein Potentialfeld: Es gibt eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_x(x, y) = x^3 + xy^2 , \quad (8)$$

$$f_y(x, y) = x^2y - y^5 . \quad (9)$$

Um ein solches  $f$  zu konstruieren, gehen wir folgendermaßen vor: Wir integrieren die rechte Seite von (8) unbestimmt nach  $x$  und erhalten damit eine partikuläre Lösung

$$F(x, y) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}$$

der inhomogenen linearen (partiellen) Differentialgleichung (8). Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$f_x = 0$$

und besitzt nach Satz (5.1) die allgemeine Lösung

$$f(x, y) = g(y) ,$$

$g(\cdot)$  eine willkürliche Funktion der einen Variablen  $y$ . Die allgemeine Lösung der Gleichung (8) ist somit (nach allgemeinen Prinzipien betreffend inhomogene lineare Probleme) gegeben durch

$$f(x, y) = F(x, y) + g(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + g(y) .$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gleichung (9), so folgt für  $g(\cdot)$  die Bedingung

$$x^2 y + g'(y) = x^2 y - y^5 . \quad (10)$$

An dieser Stelle muß die Variable  $x$  vollständig aus der Rechnung herausfallen, und das ist hier auch eingetroffen. Aus (10) folgt

$$g(y) = -\frac{y^6}{6} + C ;$$

die gesuchten Potentialfunktionen sind daher die Funktionen

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^6}{6} + C .$$

○

## Das Gradientenfeld des Arguments (Polarwinkels)

④ Wir betrachten das Feld

$$\mathbf{A}(x, y) := \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(Fig. 6.2.11) in der punktierten Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Die Feldvektoren sind tangential zu den konzentrischen Kreisen um  $\mathbf{0}$  und haben den Betrag

$$|\mathbf{A}(x, y)| = \frac{1}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} .$$

Ein elektrischer Strom  $i$ , der die  $z$ -Achse zum Beispiel von unten nach oben durchfließt (Fig. 6.2.12), erzeugt im umgebenden Raum ein Magnetfeld  $\mathbf{H}$ . Dieses Feld ist in jeder Ebene  $z = \text{const.}$  ein Feld der obigen Art.

Schon ein Blick auf die Figur 6.2.11 zeigt, daß das Feld  $\mathbf{A}$  nicht konservativ sein kann und somit auch kein Potential besitzt. Beim Durchlaufen eines Kreises

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) := (r \cos t, r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ist das Feld ja ständig gleichsinnig parallel zum Tangentialvektor  $\mathbf{z}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ , so daß das Integral

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} \quad (11)$$

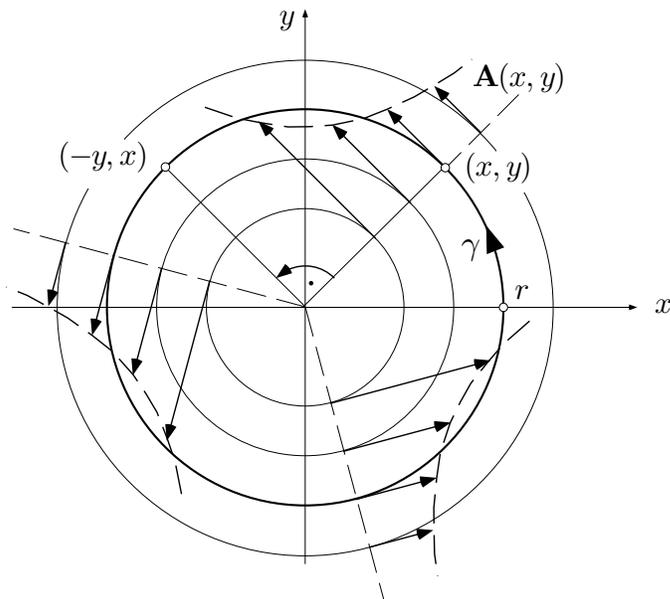


Fig. 6.2.11

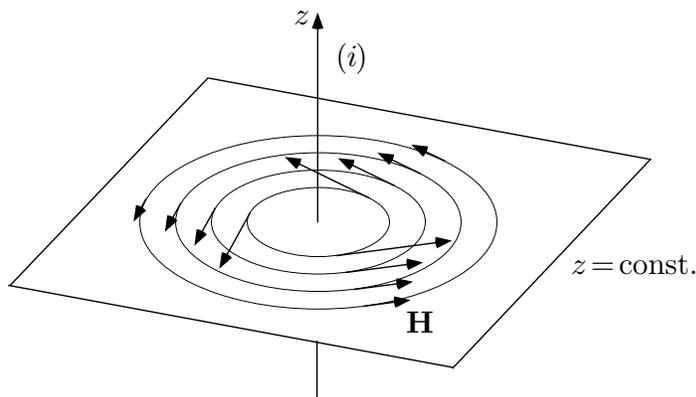


Fig. 6.2.12

bestimmt positiv ausfällt. Die Rechnung liefert

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{A}(\mathbf{z}(t))| \cdot |\mathbf{z}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r dt = 2\pi,$$

unabhängig von  $r$ .

Trotzdem genügt das Feld  $\mathbf{A}$  der Integritätsbedingung (7). Wir könnten das durch Nachrechnen verifizieren:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \dots \equiv 0.$$

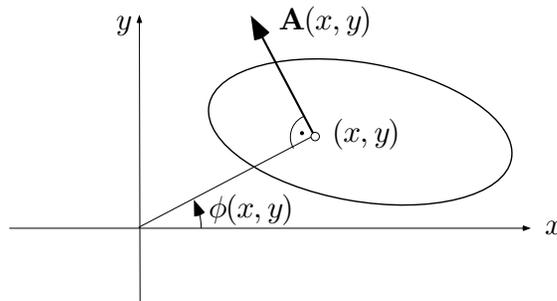


Fig. 6.2.13

Nun trifft es sich aber, daß uns das Feld  $\mathbf{A}$  in Beispiel 5.1.④ schon einmal begegnet ist, und zwar als Gradientenfeld der Argument“funktion“:

$$\mathbf{A} = \nabla \arg .$$

Lokal ist also

$$\mathbf{A} = (\phi_x, \phi_y)$$

mit richtiggehenden Funktionen  $\phi$  (Fig. 6.2.13), und dann ist klar, daß  $\mathbf{A}$  die Bedingung (7) erfüllt. — Ein Widerspruch zu Satz (6.5) besteht nicht, denn der Definitionsbereich von  $\mathbf{A}$  ist nicht einfach zusammenhängend.

Der für (11) erhaltene Wert  $2\pi$  überrascht nun nicht mehr: Bei einem Umlauf um  $\mathbf{0}$  nimmt das Argument eben um  $2\pi$  zu. Dabei ist nicht einmal nötig, daß man sich auf einem Kreis bewegt; es genügt, daß man auf irgendeine Weise einmal in positivem Sinn um  $\mathbf{0}$  herumgeht — immer hat das Integral (11) den Wert  $2\pi$ . Hier kommt ein allgemeiner Sachverhalt zum Vorschein:

Besitzt das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein “Loch” und genügt das Feld  $(P, Q)$  (bzw. die 1-Form  $Pdx + Qdy$ ) auf  $\Omega$  der Integrabilitätsbedingung (7), so hat das Integral

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy)$$

für alle einmal um das Loch herumlaufenden Kurven  $\gamma$  (Fig. 6.2.14) denselben Wert. Ist dieser Wert  $= 0$ , so ist das Feld (global) ein Potentialfeld. Diese Tatsache wird in der komplexen Analysis eine fundamentale Rolle spielen.



## Strömungsfelder in der Ebene, Begriff des Flusses

Bis dahin haben wir uns ein Vektorfeld am ehesten als Kraftfeld vorgestellt. Wir wechseln nun die Betrachtungsweise und interpretieren unser Feld als Strömungsfeld, was wir durch Verwendung des Buchstabens  $\mathbf{v}$  anstelle von

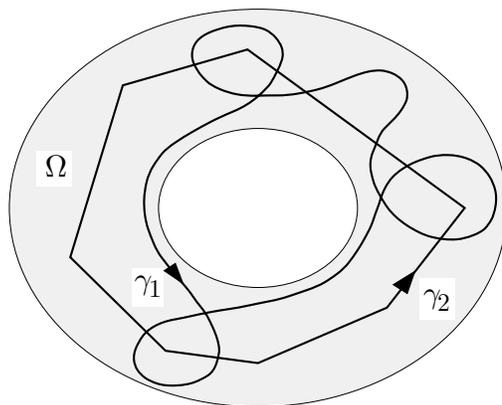


Fig. 6.2.14

$\mathbf{K}$  zum Ausdruck bringen:  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  bezeichnet die Fließgeschwindigkeit eines strömenden Mediums an der Stelle  $\mathbf{x}$ . Dies wird zu neuen Begriffen und Sätzen führen, die allerdings erst im dreidimensionalen Fall richtig zum Tragen kommen.

Vorläufig betrachten wir ein Gebiet  $\Omega$  der  $(x, y)$ -Ebene und stellen uns folgendes vor: Ein bestimmtes Flüssigprodukt, zum Beispiel Milch, wird in den verschiedenen Regionen von  $\Omega$  mit unterschiedlicher Intensität produziert bzw. konsumiert. Der Mengenausgleich erfolgt durch Transport von Flüssigkeit aus den Produktionsgebieten in die Konsumzentren. Diesen Transport modellieren wir durch ein kontinuierliches Strömungsfeld  $\mathbf{v} = (P, Q)$ , das das ganze Gebiet  $\Omega$  überzieht (Fig. 6.2.15). Das resultierende Zusammenspiel dieser verschiedenen Prozesse soll nun quantitativ untersucht werden, wobei wir ein stationäres Verhalten aller Beteiligten zugrundelegen.

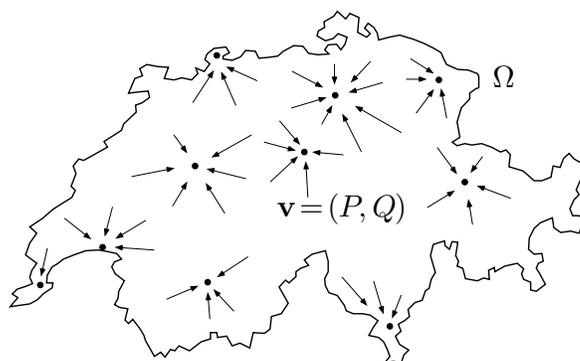


Fig. 6.2.15

Wir nehmen für einen Moment an, das Strömungsfeld  $\mathbf{v} = (P, Q)$  sei homogen, und fragen nach der Flüssigkeitsmenge  $\Delta M$ , die im Zeitintervall  $\Delta t$

die gerichtete Strecke  $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$  von links nach rechts überquert (Fig. 6.2.16). Diese Menge wird repräsentiert durch den Flächeninhalt des von den Vektoren  $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$  und  $\mathbf{v}\Delta t$  aufgespannten Parallelogramms. Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist folglich

$$\Delta M = (P(y_1 - y_0) - Q(x_1 - x_0)) \Delta t ,$$

wobei das Vorzeichen von selbst richtig hinkommt; das heißt: Von rechts nach links überquerende Flüssigkeitsmengen werden negativ gezählt. Die Größe

$$\Phi := \frac{\Delta M}{\Delta t} = P(y_1 - y_0) - Q(x_1 - x_0) \quad (12)$$

stellt die Flüssigkeitsmenge dar, die *pro Zeiteinheit* die gerichtete Strecke  $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$  von links nach rechts überquert, und heißt der **Fluß** des Feldes  $\mathbf{v}$  über diese Strecke.

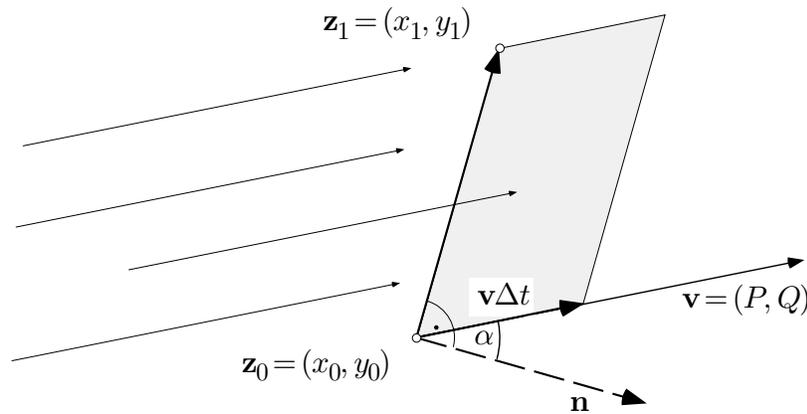


Fig. 6.2.16

Wir leiten noch eine zweite Darstellung der Größe  $\Phi$  her. Führen wir nämlich den nach rechts weisenden Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n} := \left( \frac{y_1 - y_0}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0|}, -\frac{x_1 - x_0}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0|} \right)$$

der Strecke  $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$  ein, so können wir  $\Phi$  als Skalarprodukt interpretieren:

$$\Phi = |\mathbf{v}| \cos \alpha |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0| . \quad (13)$$

Das Strömungsfeld sei jetzt örtlich variabel, und anstelle der gerichteten Strecke  $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$  sei eine glatte Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

gegeben. Wir interessieren uns für die Flüssigkeitsmenge  $\Phi$ , die pro Zeiteinheit diese Kurve von links nach rechts überquert, und betrachten hierzu eine hinreichend feine Teilung

$$\mathcal{Z}: \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

des Intervalls  $[a, b]$ . Zu jedem Teilungspunkt  $t_k$  gehört ein Kurvenpunkt  $\mathbf{z}_k := \mathbf{z}(t_k) \in \gamma$ . Aufgrund von (12) können wir dann die Größe  $\Phi$  folgendermaßen veranschlagen (Fig. 6.2.17):

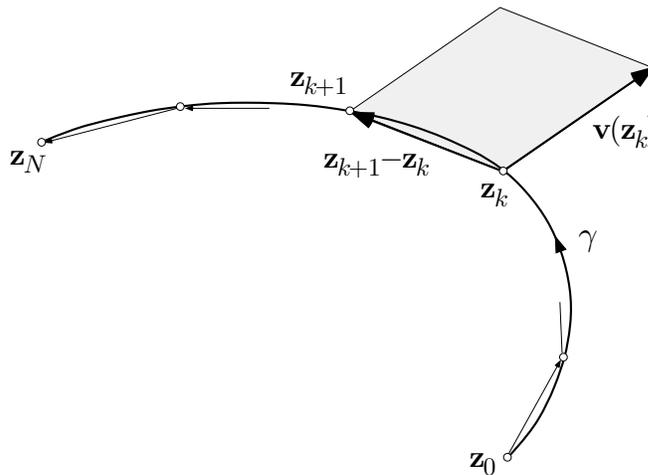


Fig. 6.2.17

$$\begin{aligned} \Phi &\doteq \sum_{k=0}^{N-1} \left( P(\mathbf{z}_k)(y_{k+1} - y_k) - Q(\mathbf{z}_k)(x_{k+1} - x_k) \right) \\ &\doteq \sum_{k=0}^{N-1} \left( P(\mathbf{z}(t_k))y'(t_k) - Q(\mathbf{z}(t_k))x'(t_k) \right) (t_{k+1} - t_k) \\ &\doteq \int_a^b \left( P(\mathbf{z}(t))y'(t) - Q(\mathbf{z}(t))x'(t) \right) dt \\ &= \int_{\gamma} (Pdy - Qdx) . \end{aligned}$$

Man nennt daher das Linienintegral

$$\Phi := \int_{\gamma} (Pdy - Qdx)$$

den **Fluß** des Vektorfeldes  $\mathbf{v} = (P, Q)$  über (englisch: *across*) die Kurve  $\gamma$ . Damit ist auch der Fluß von  $\mathbf{v}$  über beliebige 1-Ketten definiert.

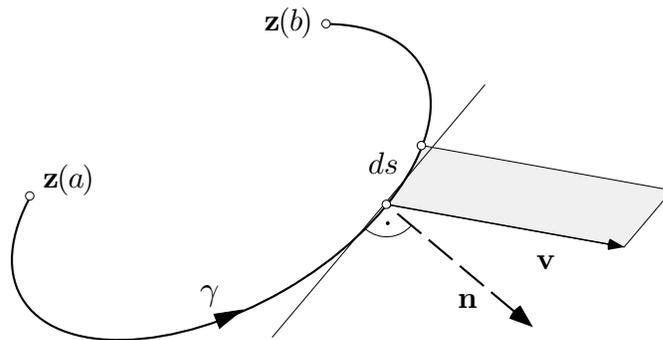


Fig. 6.2.18

Geht man von (13) aus statt von (12), so erhält man für denselben Fluß die folgende Formel (die aber überflüssige Quadratwurzeln enthält):

$$\Phi = \int_a^b \mathbf{v}(z(t)) \cdot \mathbf{n}(z(t)) |\mathbf{z}'(t)| dt =: \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds .$$

In dieser Formel bezeichnet  $\mathbf{n}$  den nach rechts weisenden Normaleneinheitsvektor und  $ds := |\mathbf{z}'(t)| dt$  das Linienelement längs  $\gamma$  (Fig. 6.2.18).

Es sei jetzt  $B \subset \Omega$  ein beliebiger ortsfester Bereich (zum Beispiel ein Kanton) mit Randzyklus  $\partial B$ . Dann stellt das Integral

$$\Phi := \int_{\partial B} (Pdy - Qdx) = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (14)$$

den Saldo der pro Zeiteinheit über  $\partial B$  aus  $B$  herausströmenden Flüssigkeitsmengen dar (Fig. 6.2.19). Kommt mehr Flüssigkeit aus  $B$  heraus, als hineinfließt, so ist dieser Saldo positiv; im andern Fall ist er negativ.

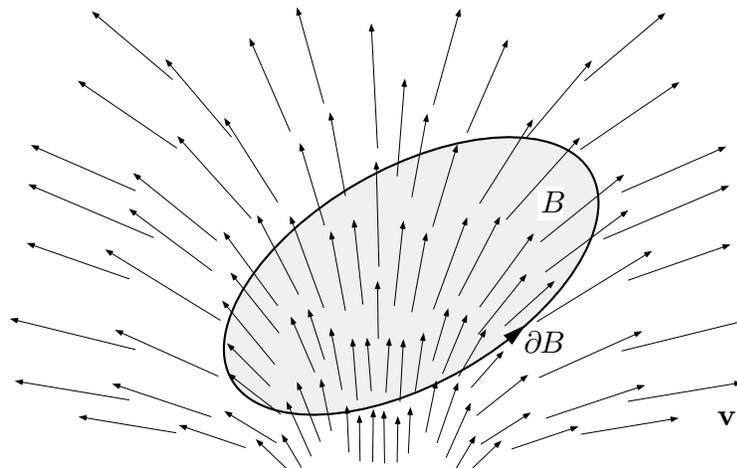


Fig. 6.2.19

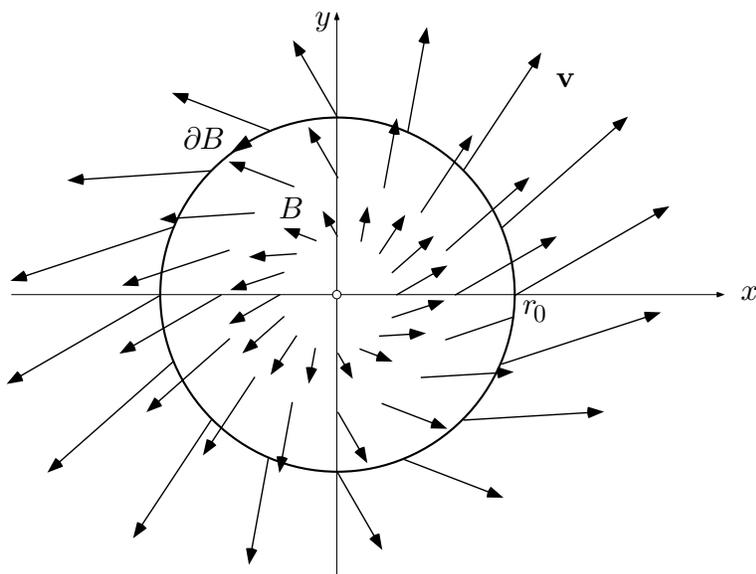


Fig. 6.2.20

⑤ Wir betrachten das linear von  $x$  und  $y$  abhängende Strömungsfeld

$$\mathbf{v}(x, y) := (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

sowie die Kreisscheibe  $B$  vom Radius  $r_0$  um  $\mathbf{0}$  (Fig. 6.2.20). Der Fluß  $\Phi$  von  $\mathbf{v}$  über den Randzyklus

$$\partial B : \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := r_0 \cos t \\ y(t) := r_0 \sin t \end{cases} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

ist nach (14) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\partial B} ((\alpha x + \beta y) dy - (\gamma x + \delta y) dx) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} ((\alpha r_0 \cos t + \beta r_0 \sin t) r_0 \cos t - (\gamma r_0 \cos t + \delta r_0 \sin t) (-r_0 \sin t)) dt \\ &= r_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha \cos^2 t + \delta \sin^2 t) dt = r_0^2 (\alpha + \delta) \pi \\ &= (\alpha + \delta) \mu(B) . \end{aligned}$$

○

## Divergenz und der Satz von Gauß in der Ebene

Nun kommt der eigentliche Clou. Das erste Integral (14) sieht aus wie ein Linienintegral für das Kraftfeld  $\mathbf{K} := (-Q, P)$  und läßt sich mit Hilfe der Greenschen Formel (3) in ein Integral über das Innere von  $B$  verwandeln. Rein formal ergibt sich

$$\Phi = \int_B (P_x + Q_y) d\mu(x, y) . \quad (15)$$

Man nennt die rechter Hand erscheinende Größe

$$P_x + Q_y =: \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (16')$$

die **Divergenz** oder **Quellstärke** des Vektorfelds  $\mathbf{v}$ . In nummerierten Koordinaten tritt das Bildungsgesetz noch deutlicher hervor:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} . \quad (16'')$$

Die Divergenz ist eine Skalarfunktion, deren geometrische bzw. physikalische Bedeutung wir gleich erläutern werden. Jedenfalls können wir aufgrund von (14) und (15) den folgenden Integralsatz notieren:

**(6.6)** *Es seien  $\mathbf{v} = (P, Q)$  ein Strömungsfeld auf dem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und  $B \subset \Omega$  ein Bereich mit Randzyklus  $\partial B$ . Dann gilt*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} d\mu . \quad (17)$$

Dies ist der **Divergenzsatz** oder **Satz von Gauß** für die Ebene. Er besagt folgendes: Der Fluß von  $\mathbf{v}$  über  $\partial B$  nach außen ist gleich dem Integral der Divergenz  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  über das Innere von  $B$ .

⑤ (Forts.) Es ist

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x + \beta y) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma x + \delta y) \equiv \alpha + \delta .$$

Nach **(6.6)** gilt daher

$$\Phi = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) d\mu(x, y) = (\alpha + \delta) \mu(B) ,$$

wie vorher.

○

Was bedeutet die rechte Seite von (17)? Wenn per saldo Flüssigkeit aus  $B$  herausfließt, so darum, weil im Inneren von  $B$  zusätzlich zum Strömungsvorgang Flüssigkeit “produziert” wird. Die Flüssigkeitsproduktion erfolgt mit einer gewissen örtlich variablen Intensität ( $:=$  Produktion pro Flächeneinheit und Zeiteinheit) oder eben Quellstärke  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ , und die Gesamtproduktion (pro Zeiteinheit) innerhalb  $B$  ist gleich dem Integral dieser Intensität über die Gesamtfläche  $B$ .

Um einzusehen, daß  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  tatsächlich die örtliche Intensität der Flüssigkeitsproduktion darstellt, betrachten wir einen festen Punkt  $\mathbf{z}_0 \in \Omega$  sowie zum Beispiel eine kleine Kreisscheibe  $B_\varepsilon$  vom Radius  $\varepsilon > 0$  um  $\mathbf{z}_0$  (Fig. 6.2.21). Wenden wir Satz (6.6) auf diese Kreisscheibe an, so ergibt sich folgendes: Die pro Zeiteinheit in  $B_\varepsilon$  produzierte und aus  $B_\varepsilon$  herausfließende Flüssigkeitsmenge  $\Phi(B_\varepsilon)$  hat den Wert

$$\Phi(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) d\mu(x, y) \doteq \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{z}_0) \cdot \mu(B_\varepsilon) .$$

Die örtliche Produktionsintensität ist somit tatsächlich gegeben durch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{z}_0) . \quad (18)$$

Soviel zum Satz von Gauß in der Ebene. Im nächsten Abschnitt behandeln wir den dreidimensionalen Fall, der in der Hydro- und der Elektrodynamik eine zentrale Rolle spielt. Da der Satz von der gegebenen physikalischen Interpretation her ziemlich einleuchtet, werden wir allerdings auf den Beweis der dreidimensionalen Version verzichten.

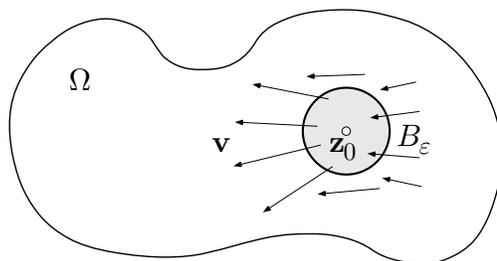


Fig. 6.2.21

## Aufgaben

1. Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe der Greenschen Formel:

(a)  $\int_{\partial B} (xy \, dx + x^2 \, dy)$ ,  $B := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{2/3}\}$ ;

(b)  $\int_{\partial B} (y \, dx + \sin x \, dy)$ ,  $B := \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq \cos x\}$ .

2. In der  $(x, y)$ -Ebene wird das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y) := (3x^2 - 4xy + 4y^2, -2x^2 + 8xy + 12y^2)$$

betrachtet. Man berechne auf möglichst einfache Weise das Linienintegral  $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$  für den in der Fig. 6.2.22 eingezeichneten Weg  $\gamma$ .

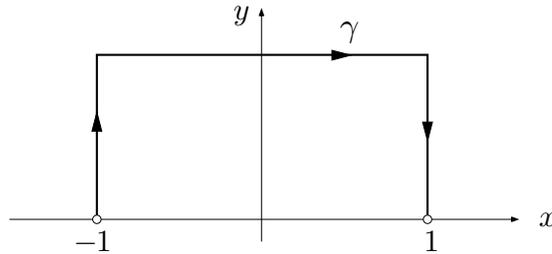


Fig. 6.2.22

3. (M) Schneidet man das Descartessche Blatt  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  (Fig. 5.3.1) mit Geraden  $y = mx$  ( $0 < m < \infty$ ), so erhält man eine Parameterdarstellung der Schleife mit  $m$  als Parameter. Bestimme den Flächeninhalt der Schleife.
4. (M) Skizziere die verlängerte Zykloide

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) := t - \frac{\pi}{2} \sin t \\ y(t) := 1 - \frac{\pi}{2} \cos t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

(vgl. Beispiel ①) und berechne den Flächeninhalt einer Schlinge.

5. Die  $n$  Punkte  $(x_k, y_k)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) bilden die linksherum aufeinanderfolgenden Ecken eines ebenen Polygons  $P$ . Der Flächeninhalt von  $P$  lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\mu(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k (y_{k+1} - y_{k-1}),$$

mit sinngemäßer Interpretation von  $y_0$  und  $y_{n+1}$ .

6. Rollet ein Kreis auf einem anderen Kreis ab, so beschreibt ein fester Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises eine **Epizykloide**. Man bestimme eine Parameterdarstellung der Epizykloide  $\gamma$  in Fig. 6.2.23 und berechne den von  $\gamma$  eingeschlossenen Flächeninhalt.

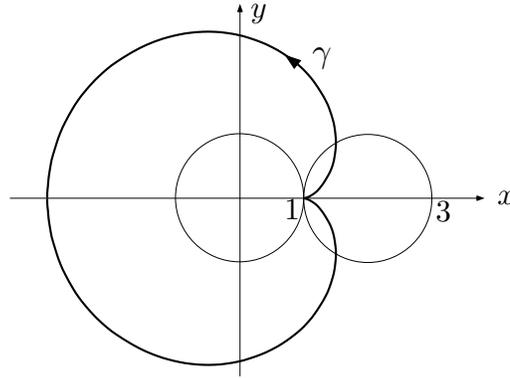


Fig. 6.2.23

7. Betrachte in der punktierten  $(x, y)$ -Ebene das Feld

$$\mathbf{K}(x, y) := \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

- Verifiziere:  $\operatorname{rot} \mathbf{K} \equiv 0$ . Folgt daraus, daß  $\mathbf{K}$  konservativ ist?
- Berechne das Umlaufintegral  $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$  für einen Kreis  $\gamma$  vom Radius  $r > 0$  um  $\mathbf{0}$ .
- Zeige:  $\mathbf{K}$  ist konservativ. (*Hinweis:* Ein Potential läßt sich explizit angeben.)

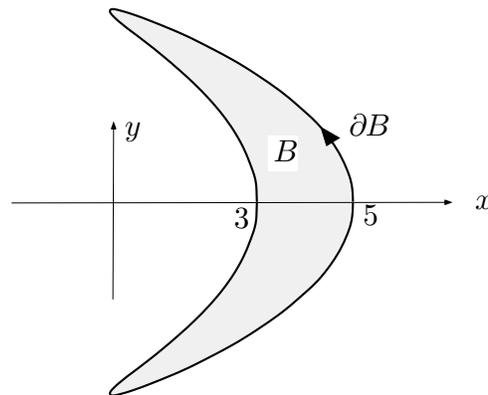


Fig. 6.2.24

8. Die Randkurve  $\partial B$  des in der Fig. 6.2.24 dargestellten Bumerangs  $B$  besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$\partial B : t \mapsto \begin{cases} x := 4 \cos^2 t + \cos t \\ y := \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Bestimme den Schwerpunkt von  $B$ . (*Hinweis:* Unter anderem benötigt man hierzu ein Vektorfeld  $\mathbf{K} = (P, Q)$  mit  $Q_x - P_y \equiv x$ , zum Beispiel  $(P, Q) := (0, x^2/2)$ . Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t \, dt = 0.)$$

9. Berechne den Fluß des Feldes

$$\mathbf{v}(x, y) := (2xy - y^2, x^2 + y^2)$$

aus dem Dreieck  $B := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  heraus einmal als Flußintegral und einmal mit Hilfe des Divergenzsatzes.

## 6.3 Der Satz von Gauß

### Zur Theorie der Flächen im Raum

Wir beginnen mit der genaueren Betrachtung von zweidimensionalen Flächen im dreidimensionalen Raum. Für die Integralrechnung ist notwendig, daß diese Flächen in Parameterdarstellung vorliegen.

Ist eine Fläche  $S$  als Graph einer Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  präsentiert:

$$S: \quad z = f(x, y)$$

(Fig. 6.3.1), so können wir eine Parameterdarstellung mit  $x, y$  als Parameter sofort hinschreiben:

$$S: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) := (x, y, f(x, y)).$$

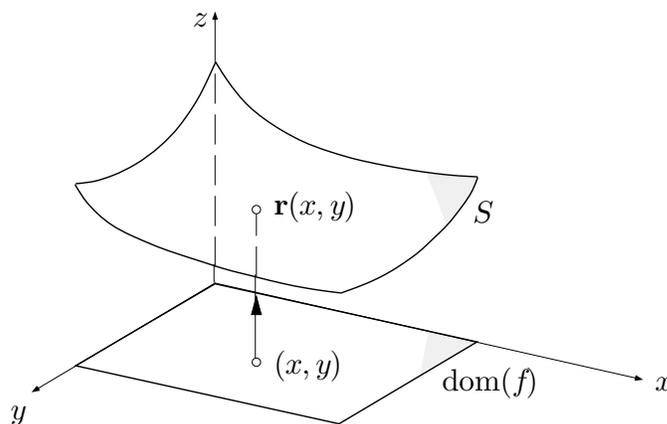


Fig. 6.3.1

Ist weiter  $S$  eine Rotationsfläche mit der Meridiankurve

$$\gamma_M: \quad t \mapsto (\rho(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

(Fig. 6.3.2), so erhält man eine Parameterdarstellung von  $S$ , indem man zusätzlich eine "Rotationsvariable"  $\phi$  einführt:

$$S: \quad (t, \phi) \mapsto \begin{cases} x = \rho(t) \cos \phi \\ y = \rho(t) \sin \phi \\ z = z(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b, \phi \in \mathbb{R}/2\pi).$$

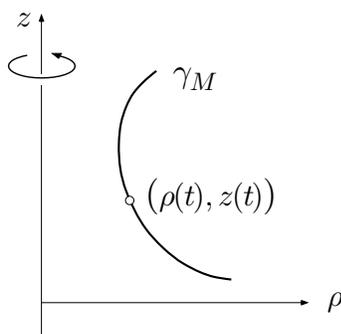


Fig. 6.3.2

Wenn wir von Flächen im allgemeinen reden, so verwenden wir  $u, v$  als Parametervariablen. Gegeben sind also ein Bereich  $B$  in der  $(u, v)$ -Ebene, am liebsten ein Rechteck, und eine vektorwertige  $C^2$ -Funktion

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (1)$$

Die Bildmenge  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  ist typischer Weise eine Fläche, allenfalls mit Ausnahmepunkten.

Wir betrachten nun die Parameterdarstellung (1) in der Umgebung eines festen Parameterpunktes  $(u_0, v_0) \in B$ . Es sei  $\mathbf{p} := \mathbf{r}(u_0, v_0)$  der zugehörige Punkt auf  $S$ . Wir halten  $v := v_0$  für einen Moment fest, betrachten also die partielle Funktion

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0).$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer auf  $S$  liegenden Kurve, der sogenannten  **$u$ -Linie** durch den Punkt  $\mathbf{p}$  (Fig. 6.3.3). Die  $u$ -Linie besitzt in diesem Punkt den Tangentialvektor  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) =: \mathbf{r}_u$ . Analog stellt die partielle Funktion

$$v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v)$$

die  **$v$ -Linie** durch den Punkt  $\mathbf{p}$  dar, die ebenfalls auf  $S$  liegt und im Punkt  $\mathbf{p}$  den Tangentialvektor  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0) =: \mathbf{r}_v$  besitzt.

Die Parameterdarstellung (1) ist an der Stelle  $(u_0, v_0)$  **regulär**, wenn die Funktionalmatrix

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \end{array} \right]_{(u_0, v_0)}$$

den Rang 2 besitzt, oder einfacher: wenn

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0} \quad (2)$$

ist. Die beiden Vektoren  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$  spannen dann eine wohlbestimmte Ebene auf, nämlich die Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$ . Ist die Bedingung (2) erfüllt, so besitzt die Menge  $S$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}$  tatsächlich Flächencharakter; insbesondere bildet dann (1) eine kleine Kreisscheibe um  $(u_0, v_0)$  bijektiv und

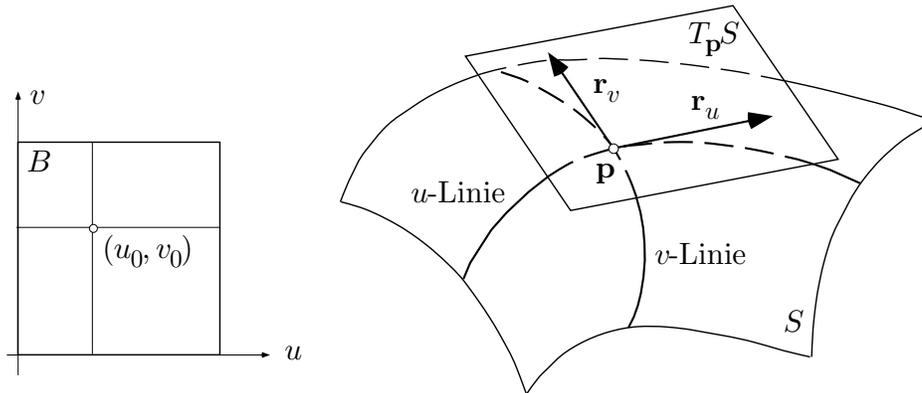


Fig. 6.3.3

in beiden Richtungen stetig auf ein kleines Flächenscheibchen um  $\mathbf{p}$  ab. Dies ergibt sich aus einer Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen, auf die wir schon in Abschnitt 5.4 kurz hingewiesen haben.

Im allgemeinen sind die verwendeten Parameterdarstellungen in allen inneren Punkten des Parameterbereichs  $B$  regulär. In einzelnen Randpunkten oder längs gewissen Kanten von  $B$  ist jedoch die Regularitätsbedingung (2) gelegentlich verletzt, und in den zugehörigen Flächenpunkten ist der Flächencharakter von  $S$  unter Umständen defekt. Für die Integralrechnung ist das aber ohne Belang, da  $\partial B$  eine “zweidimensionale Nullmenge” ist.

① Für die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \theta \cos \phi \\ y &= R \cos \theta \sin \phi \\ z &= R \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \left( \phi \in \mathbb{R}/2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

der 2-Sphäre vom Radius  $R$  hat man

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= (-R \cos \theta \sin \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \mathbf{r}_\theta &= (-R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = R^2 \cos \theta (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta). \quad (4)$$

Der Vektor  $(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$  ist ein Einheitsvektor. Folglich ist die Darstellung (3) im Inneren des Parameterbereichs regulär. Auf den beiden Kanten  $\theta = \pm\pi/2$  verschwindet  $\cos \theta$  und damit auch  $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ . Diese zwei Kanten werden auf zwei Punkte (Nordpol und Südpol) abgebildet; allerdings sieht man der Sphäre dort nichts an.

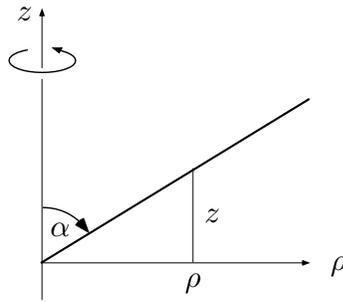


Fig. 6.3.4

Durch

$$\left. \begin{aligned} x &:= \rho \cos \phi \\ y &:= \rho \sin \phi \\ z &:= \cot \alpha \cdot \rho \end{aligned} \right\} \quad (\rho \geq 0, \phi \in \mathbb{R}/2\pi) \quad (5)$$

wird ein Rotationskegel (Fig. 6.3.4) vom halben Öffnungswinkel  $\alpha$  dargestellt;  $\alpha \in ]0, \pi[$  ist fest. Man berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, \cot \alpha), \\ \mathbf{r}_\phi &= (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0), \\ \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi &= \rho (-\cot \alpha \cos \phi, -\cot \alpha \sin \phi, 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Die Darstellung ist also längs der Kante  $\rho = 0$  des Parameterbereichs singulär. Tatsächlich wird diese Kante in den einzigen Punkt  $\mathbf{0}$  abgebildet, und dort ist der Flächencharakter des Kegels offensichtlich gestört.  $\bigcirc$

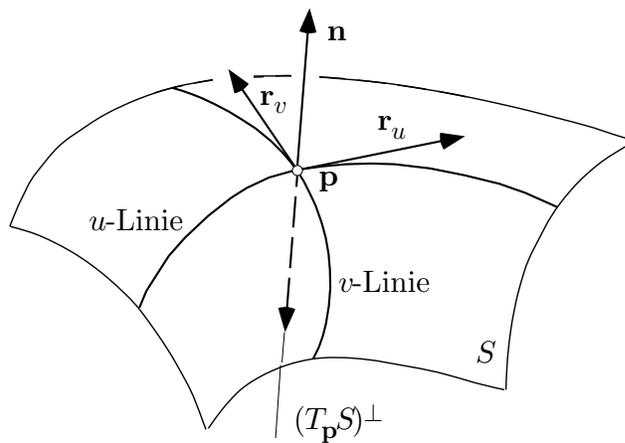


Fig. 6.3.5

Ist die Parameterdarstellung (1) im Punkt  $(u_0, v_0)$  regulär, so stellt

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (7)$$

den **Normaleneinheitsvektor** von  $S$  im Punkt  $\mathbf{p}$ , kurz: die **Flächennormale** dar (Fig. 6.3.5). A priori besitzt  $S$  in jedem Punkt zwei gleichberechtigte, einander entgegengesetzte Normalenrichtungen, und es ist nur eine 50%-Chance, daß (7) gerade die “gewünschte” Richtung, zum Beispiel die der “äußeren Normalen” repräsentiert. In allen Fällen, wo es auf das Vorzeichen ankommt, insbesondere beim Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche, hat man daher  $\mathbf{n}$  wenn nötig umzupolen.

① (Forts.) Für die Parameterdarstellung (3) der 2-Sphäre gilt nach (4):

$$\mathbf{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) = \frac{\mathbf{r}}{R};$$

dies ist die äußere Normale. — Beim Kegel (5) haben wir nach (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \alpha + 1}} (-\cot \alpha \cos \phi, -\cot \alpha \sin \phi, 1) \\ &= (-\cos \alpha \cos \phi, -\cos \alpha \sin \phi, \sin \alpha). \end{aligned}$$

Ob das die innere oder die äußere Normale ist, bleibe dahingestellt (siehe die Fig. 6.3.6). Jedenfalls zeigt sie nach oben. ○

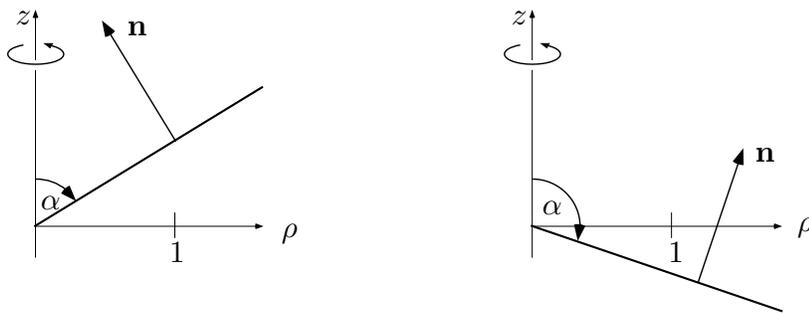


Fig. 6.3.6

## Berechnung des Flächeninhalts

Wir wenden uns nun dem Problem des Flächeninhalts zu. Um eine Formel für den Flächeninhalt  $\omega(S)$  der Fläche  $S$  herzuleiten, zerlegen wir den Parameterbereich  $B$  in kleine achsenparallele Rechtecke  $B_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Es sei

$$B_k := [u_k, u_k + \Delta u] \times [v_k, v_k + \Delta v]$$

ein derartiges Teilrechteck (Fig. 6.3.7). Durch die Parameterdarstellung (1) wird  $B_k$  in ein Flächenstück  $S_k \subset \mathbb{R}^3$  übergeführt, das sich fast nicht von einem Parallelogramm unterscheiden läßt. Dieses winzige Parallelogramm  $P$  wird aufgespannt von den beiden Vektoren

$$\mathbf{r}_u \Delta u, \quad \mathbf{r}_v \Delta v$$

und besitzt somit den Flächeninhalt

$$\omega(P) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v .$$

Es gilt daher mit vertretbarem Fehler

$$\omega(S_k) \doteq \omega(P) = |\mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k)| \mu(B_k)$$

und folglich

$$\omega(S) \doteq \sum_{k=1}^N |\mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k)| \mu(B_k) .$$

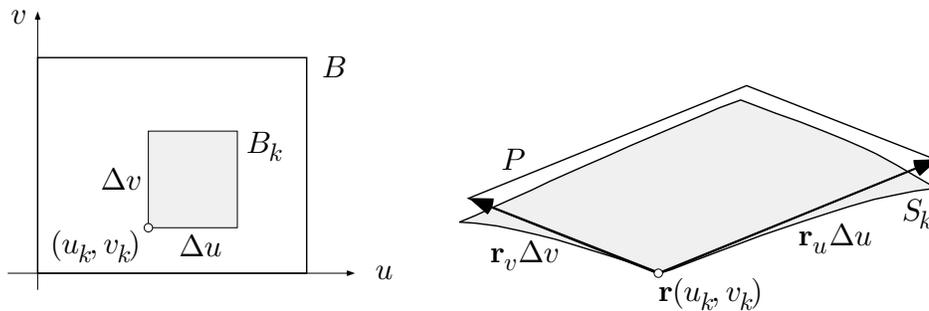


Fig. 6.3.7

Diese Überlegungen führen dazu, den **Flächeninhalt**  $\omega(S)$  der Fläche

$$S : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$$

folgendermaßen festzusetzen:

$$\omega(S) := \int_B |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| d\mu(u, v) .$$

Der unter dem Integralzeichen erscheinende Ausdruck

$$d\omega := |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| d\mu(u, v)$$

wird als (**skalares**) **Oberflächenelement** bezeichnet.

① (Forts.) Aus (4) ergibt sich für die Oberfläche der 2-Sphäre vom Radius  $R$  der Wert

$$\begin{aligned}\omega(S_R^2) &= \int_{[0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| d\mu(\phi, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \theta d\theta \right) d\phi = \int_0^{2\pi} 2R^2 d\phi \\ &= 4\pi R^2,\end{aligned}$$

wie erwartet. ○

② In Fig. 5.2.5 ist das hyperbolische Paraboloid

$$z = x^2 - y^2$$

dargestellt. Es sei  $S$  der innerhalb des Zylinders  $x^2 + y^2 \leq R^2$  liegende Teil dieser Fläche. Um den Flächeninhalt  $\omega(S)$  zu berechnen, bestimmen wir erst das auf beliebige Graphen

$$S: (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

bezügliche Oberflächenelement. Es ist

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$$

und somit

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1). \quad (8)$$

Dies liefert das Oberflächenelement

$$d\omega = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\mu(x, y).$$

Im vorliegenden Beispiel ist  $f(x, y) := x^2 - y^2$ . Wir haben daher

$$\omega(S) = \int_B d\omega = \int_B \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\mu(x, y);$$

dabei ist  $B$  die Kreisscheibe vom Radius  $R$  in der  $(x, y)$ -Ebene. Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so ergibt sich nach Satz (4.17):

$$\begin{aligned}\omega(S) &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right) d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^R \\ &= \frac{\pi}{6} ((1 + 4R^2)^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

○

## Fluß eines Vektorfelds durch eine Fläche

Es seien jetzt in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  sowie eine Fläche

$$S: B \rightarrow \Omega, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) \quad (9)$$

gegeben. Im folgenden geht es um den Fluß von  $\mathbf{v}$  durch  $S$ . Hierzu ist es notwendig, die Fläche  $S$  zu **orientieren**, das heißt: eine der beiden möglichen Normalenrichtungen als *positiv* zu erklären. Diesbezüglich wollen wir im folgenden annehmen, die Reihenfolge der Variablen  $u$  und  $v$  sei so gewählt, daß der Vektor

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

die positive Richtung anzeigt. Wir ergänzen die Fig. 6.3.7 durch den Feldvektor  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u_k, v_k)) =: \mathbf{v}$  und überlegen ähnlich wie am Schluß von Abschnitt 6.2.

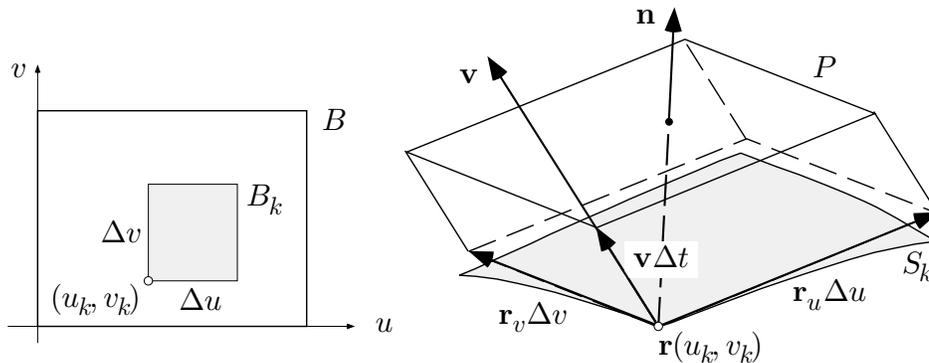


Fig. 6.3.8

Die Flüssigkeitsmenge  $\Delta M$ , die im Zeitintervall  $\Delta t$  das Flächenstück  $S_k$  in positiver Richtung durchquert, füllt angenähert das von den Vektoren

$$\mathbf{r}_u \Delta u, \quad \mathbf{r}_v \Delta v, \quad \mathbf{v} \Delta t$$

aufgespannte Parallelepiped  $P$  (Fig. 6.3.8) und läßt sich daher folgendermaßen als Spatprodukt darstellen:

$$\Delta M \doteq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \Delta u \Delta v \Delta t .$$

Diese Formel liefert auch das richtige Vorzeichen, das heißt: Flüssigkeitsmengen, die  $S_k$  gegenläufig zu  $\mathbf{n}$  durchqueren, werden automatisch negativ gezählt. Somit wird der Fluß  $\Phi_k$  von  $\mathbf{v}$  durch  $S_k$  approximativ wiedergegeben durch

$$\Phi_k := \frac{\Delta M}{\Delta t} \doteq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \mu(B_k),$$

und wir erhalten für den Fluß  $\Phi$  von  $\mathbf{v}$  durch die Gesamtfläche  $S$  die folgende Näherungsformel:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=1}^N \Phi_k \doteq \sum_{k=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{r}(u_k, v_k)) \cdot (\mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k)) \mu(B_k) \\ &\doteq \int_B \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) d\mu(u, v). \end{aligned} \quad (10)$$

Aufgrund dieser Überlegungen nennt man definitiv das zuletzt angeschriebene Integral den **Fluß** des Vektorfelds  $\mathbf{v}$  durch die (orientierte) Fläche  $S$ . Damit ist auch schon der Fluß von  $\mathbf{v}$  durch eine beliebige **2-Kette** (das ist eine "formale Summe" von glatten Flächenstücken (9)) erklärt.

Der im Flußintegral auftretende Ausdruck

$$d\vec{\omega} := (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) d\mu(u, v) = \mathbf{n} d\omega$$

(vgl. (7)) ist das **vektorielle Oberflächenelement**. Der Fluß (10) läßt sich damit in suggestiver Weise durch

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\vec{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega$$

bezeichnen. Das ändert aber nichts daran, daß für die konkrete Berechnung die Parameterdarstellung von  $S$  ins Vektorfeld  $\mathbf{v}$  einzusetzen und auch das Oberflächenelement  $d\vec{\omega}$  durch  $u$  und  $v$  auszudrücken sind. Nur in besonders einfachen Fällen gelingt es hie und da, durch direkte geometrische Überlegungen billiger davonzukommen.

③ Es soll der Fluß  $\Phi$  des Coulombfeldes

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) := \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$$

durch die nach außen orientierte 2-Sphäre  $S_R^2$  berechnet werden. — In den Punkten  $\mathbf{r}$  dieser Sphäre (Fig. 6.3.9) ist

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$$

und somit

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \frac{C}{R^2} \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{C}{R^2} .$$

Hieraus folgt

$$\Phi = \int_{S_R^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \frac{C}{R^2} \int_{S_R^2} d\omega = \frac{C}{R^2} \omega(S_R^2) = 4\pi C .$$

Der betrachtete Fluß ist also unabhängig von  $R$ . ○

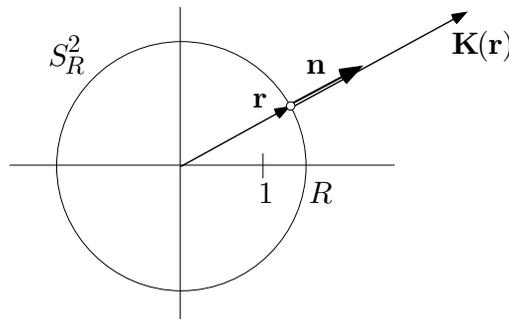


Fig. 6.3.9

② (Forts.) Wir berechnen den Fluß  $\Phi$  des Feldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (xz, yz, R^2 - x^2 - y^2)$$

von unten nach oben durch die Fläche

$$S : (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) := (x, y, x^2 - y^2) \quad (x^2 + y^2 \leq R^2) .$$

Nach (8) gilt

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-2x, 2y, 1) .$$

Die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$  ist  $> 0$ ; wir haben also von selbst die richtige Orientierung erwischt. Weiter ist

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) = \mathbf{v}(x, y, x^2 - y^2) = (x(x^2 - y^2), y(x^2 - y^2), R^2 - x^2 - y^2)$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) &= x(x^2 - y^2)(-2x) + y(x^2 - y^2)2y + (R^2 - x^2 - y^2)1 \\ &= R^2 - x^2 - y^2 - 2(x^2 - y^2)^2 . \end{aligned}$$

Aufgrund von (10) haben wir daher das folgende Integral zu berechnen:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_B \mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, d\mu(x, y) \\ &= \int_B (R^2 - x^2 - y^2 - 2(x^2 - y^2)^2) \, d\mu(x, y) .\end{aligned}$$

Der Integrationsbereich  $B$  ist die Kreisscheibe vom Radius  $R$ ; es liegt daher nahe, zu Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  überzugehen. Wegen

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 - y^2 = r^2 \cos(2\phi)$$

erhält man nach (4.17):

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2 - 2r^4 \cos^2(2\phi)) r \, dr \, d\phi .$$

Das innere Integral hat den Wert

$$\left( R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{3} \cos^2(2\phi) \right) \Big|_0^R = \frac{R^4}{4} - \frac{R^6}{3} \cos^2(2\phi) ,$$

so daß sich schließlich folgendes ergibt:

$$\Phi = \frac{R^4}{4} 2\pi - \frac{R^6}{3} \pi = \frac{\pi}{2} R^4 \left( 1 - \frac{2}{3} R^2 \right) .$$

Ist  $R > \sqrt{3/2}$ , so wird der betrachtete Fluß negativ, obwohl die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{v}$  stets  $> 0$  ist. Wie läßt sich dieses Paradox erklären?  $\bigcirc$

## Divergenz und der Satz von Gauß im Raum

Der Satz von Gauß bezieht sich auf ein  $C^1$ -Vektorfeld  $\mathbf{v}$  in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und einen kompakten Bereich  $B \subset \Omega$ .

Als ‘‘Ableitung’’ des Feldes  $\mathbf{v}$  erscheint dabei die Divergenz dieses Feldes. Im zweidimensionalen Fall haben wir dafür 6.2.(16) erhalten, im räumlichen Fall ist ein analog gebildeter dritter Term anzuhängen. Die **Divergenz** oder **Quellstärke** des Vektorfeldes

$$\mathbf{v} = (P, Q, R) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

ist also definiert durch

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := P_x + Q_y + R_z \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} .$$

Über den dreidimensionalen Bereich  $B$  wird weiter folgendes vorausgesetzt:  $B$  wird berandet durch endlich viele glatte Flächenstücke  $S_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), die längs sichtbaren oder unsichtbaren Kanten “zusammengenäht” sind, siehe die Fig. 6.3.10. Die  $S_i$  bilden zusammen eine geschlossene zweidimensionale Kette (einen sogenannten **2-Zyklus**), die wir die **Oberfläche** von  $B$  nennen und mit  $\partial B$  bezeichnen:

$$\partial B := S_1 + S_2 + \dots + S_r .$$

Dabei haben wir stillschweigend angenommen, die  $S_i$  seien so orientiert, daß die Flächennormale  $\mathbf{n}$  durchwegs ins Äußere von  $B$  zeigt.

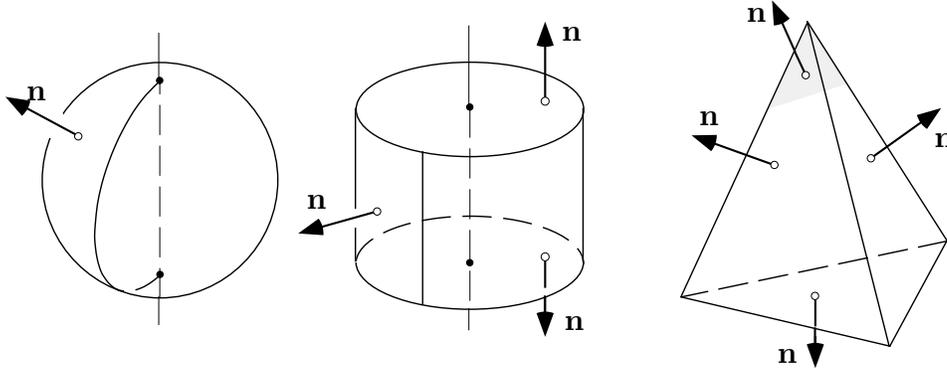


Fig. 6.3.10

Damit sind wir endlich in der Lage, den **Satz von Gauß**, auch **Divergenzsatz** genannt, zu formulieren:

**(6.7)** *Es seien  $\mathbf{v}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf dem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und  $B \subset \Omega$  ein Bereich mit nach außen orientierter Oberfläche  $\partial B$ . Dann gilt*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\vec{\omega} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu .$$

In Worten: Der Fluß von  $\mathbf{v}$  durch die Oberfläche von  $B$  nach außen ist gleich dem Integral der Divergenz von  $\mathbf{v}$  über das Innere von  $B$ . Die physikalische Interpretation ist dieselbe wie im zweidimensionalen Fall: Die pro Zeiteinheit aus  $B$  herauskommende Flüssigkeitsmenge wird im Inneren von  $B$  mit örtlich variabler Intensität ( $:=$  Produktion pro Volumeneinheit und Zeiteinheit) oder eben “Quellstärke”  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  produziert und ist somit gleich dem Integral dieser Intensität über  $B$ .

Daß  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  tatsächlich die Intensität der Flüssigkeitsproduktion darstellt, beweist man wie 6.2.(18): Es bezeichne  $B_\varepsilon$  die Kugel vom Radius  $\varepsilon$  um den Punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  und  $\Phi(B_\varepsilon)$  den aus  $B_\varepsilon$  heraustretenden Fluß (Fig. 6.3.11). Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{p}) .$$

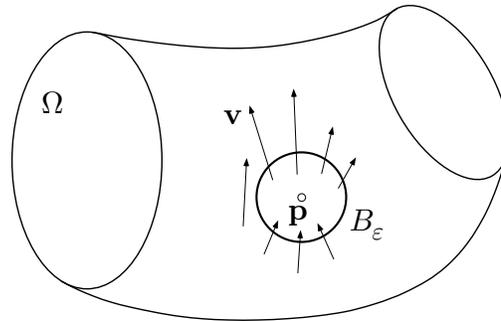


Fig. 6.3.11

Wir haben versprochen, den Satz von Gauß nicht zu beweisen. Der Beweis verläuft an sich ähnlich wie derjenige der Greenschen Formel (6.3): Der Satz wird rechnerisch zunächst für besonders "einfache" Bereiche bewiesen, und allgemeine Bereiche  $B$  werden in einfache zerlegt, wobei sich die Integrale über die Schnittflächen im Inneren von  $B$  herausheben, siehe die Fig. 6.3.12.

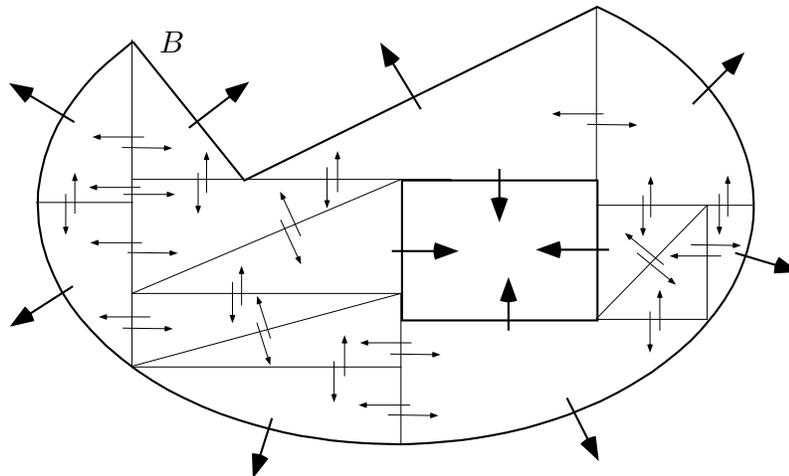


Fig. 6.3.12

④ Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$$

aus dem Kegel

$$B := \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$

(Fig. 6.3.13) heraus einmal als Flußintegral und einmal mit Hilfe des Divergenzsatzes.

Für die Deckfläche  $S_1$  wählen wir als Parameterbereich den Einheitskreis  $D$  der  $(x, y)$ -Ebene. Ohne Rechnung ergibt sich

$$\mathbf{n} \, d\omega = (0, 0, 1) \, d\mu(x, y)$$

und somit (auf  $S_1$  ist  $z \equiv 1$ ):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = (2x - y, x + 3y, xy - 1) \cdot (0, 0, 1) \, d\mu(x, y) = (xy - 1) \, d\mu(x, y) .$$

Wir erhalten daher

$$\int_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \int_D (xy - 1) \, d\mu(x, y) = -\pi ;$$

dabei hat der Term  $xy$  aus Symmetriegründen keinen Beitrag geliefert.

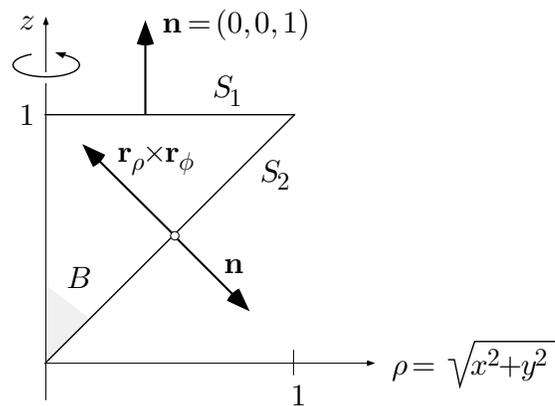


Fig. 6.3.13

Für die Mantelfläche  $S_2$  verwenden wir die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = \rho \end{array} \right\} \quad (0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \phi \leq \pi),$$

also (5) mit  $\alpha := \frac{\pi}{4}$ . Nach (6) gilt somit

$$\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi = \rho(-\cos \phi, -\sin \phi, 1).$$

Da dieser Vektor ins Innere von  $B$  zeigt, müssen wir im weiteren das Vorzeichen richtigstellen. Wir benötigen noch

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) = (2\rho \cos \phi - \rho^2 \sin \phi, \rho^2 \cos \phi + 3\rho \sin \phi, \rho^2 \cos \phi \sin \phi - \rho).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega &= - \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi) \, d\mu(\rho, \phi) \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (2\rho^2 \cos^2 \phi - \rho^3 \sin \phi \cos \phi + \rho^3 \cos \phi \sin \phi \\ &\quad + 3\rho^2 \sin^2 \phi - \rho^3 \cos \phi \sin \phi + \rho^2) \, d\phi \, d\rho. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \phi \, d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos \phi \sin \phi \, d\phi = 0$$

ergibt sich hieraus weiter

$$\int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \int_0^1 (2\pi\rho^2 + 3\pi\rho^2 + 2\pi\rho^2) \, d\rho = 7\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{7\pi}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega + \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = -\pi + \frac{7\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Andererseits ist

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz + 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - z) \equiv 2 + 3 - 1 = 4,$$

und damit ergibt sich

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu = 4 \int_B d\mu(x, y, z) = 4\mu(B) = \frac{4\pi}{3},$$

wie vorher. ○

### Anwendung: Die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

⑤ Die Abläufe in einem strömenden Medium (Flüssigkeit oder Gas) lassen sich mit Hilfe von zwei Funktionen  $\rho$  und  $\mathbf{v}$  beschreiben:  $\rho(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet die Dichte des Mediums an der Stelle  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  zur Zeit  $t$  und  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  die Geschwindigkeit der Masseteilchen an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$ . Die örtlichen und zeitlichen Änderungsraten dieser Funktionen sind aneinander gekoppelt durch eine gewisse partielle Differentialgleichung, die wir nun herleiten wollen.

Wir gehen davon aus, daß in dem strömenden Medium weder Masse produziert noch Masse vernichtet wird. Wenn also insgesamt Masse aus einem Raumbereich abströmt, so muß dabei die Dichte  $\rho$  im Inneren dieses Bereiches entsprechend abnehmen. Es geht nun darum, diesen Sachverhalt auch quantitativ richtig zu erfassen und in einer prägnanten Formel zum Ausdruck zu bringen.

Das strömende Medium erfüllt ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Es sei  $B \subset \Omega$  ein kleiner "Probereich", der für den Moment festgehalten wird und sich nicht mit der Strömung mitbewegt. Zur Zeit  $t$  befindet sich in  $B$  eine gewisse Gesamtmasse

$$M(t) := \int_B \rho(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) .$$

Diese Masse besitzt eine zeitliche Änderungsrate, die sich nach der Leibnizschen Regel (5.4) folgendermaßen berechnet:

$$M'(t) = \int_B \rho_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (11)$$

Die Veränderung der in  $B$  enthaltenen Masse ergibt sich aus dem Zu- und Wegströmen von Masseteilchen durch die Oberfläche  $\partial B$ . Quantitativ ausgedrückt: Die Änderungsrate von  $M(\cdot)$  ist gleich dem "Massenfluß" durch  $\partial B$ ,

$$-M'(t) = \int_{\partial B} (\rho \mathbf{v}) \cdot d\vec{\omega} ;$$

dabei haben wir berücksichtigt, daß nach außen fließende Masse eine Abnahme von  $M$  zur Folge hat. Wenden wir auf das letzte Integral den Satz von Gauß an, so ergibt sich

$$-M'(t) = \int_B \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mu . \quad (12)$$

Wir addieren nun die Gleichungen (11) und (12):

$$\int_B (\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) d\mu = 0 .$$

Diese Beziehung gilt für jeden Probereich  $B \subset \Omega$  und zu jedem Zeitpunkt  $t$ . Stellen wir uns  $B$  als transportables kleines Kugelchen vor, so sehen wir, daß der Integrand notwendig identisch verschwindet:

$$\forall \mathbf{x}, \forall t: \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (13)$$

Dies ist das erste Grundgesetz der Hydrodynamik, die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**. Ist die Strömung **stationär** (das heißt:  $\rho$  und  $\mathbf{v}$  hängen nicht von  $t$  ab), so gilt  $\rho_t \equiv 0$ , und (13) geht über in  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ . Ist das Medium inkompressibel, was bei Flüssigkeiten im allgemeinen angenommen werden darf, so ist  $\rho$  räumlich und zeitlich konstant. Die Gleichung (13) lautet dann einfach

$$\forall \mathbf{x}, \forall t: \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

in Worten: Das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit ist divergenzfrei. (*Hinweis:* Die Operatoren  $\nabla$ ,  $\operatorname{div}$ ,  $\Delta$ , **rot** (s.u.) wirken nur auf die Raumvariablen.)  $\circ$

## Die Wärmeleitungsgleichung

Im folgenden geht es um die Wärmeleitung in einem homogenen Medium. Wir stellen uns vor, das Medium erfülle ein gewisses Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , und nehmen an, daß sich im Inneren von  $\Omega$  keine wärmeerzeugenden oder wärmevernichtenden Vorgänge abspielen. Hingegen wird durch Wärmeleitung Wärme verschoben, was mit der Zeit zu einem Ausgleich der Temperatur führt, wenn nicht durch thermische Einwirkung von außen (das heißt: durch die Oberfläche von  $\Omega$ ) ein Temperaturgradient aufrechterhalten wird. Da aber nichts Sichtbares mit wohldefinierter Geschwindigkeit strömt, liegt a priori kein Strömungsfeld wie in Beispiel (5) vor, und wir müssen neuartige Überlegungen anstellen, wenn wir die Wärmeleitung mathematisch beschreiben wollen.

Der Temperaturzustand unseres Mediums läßt sich mit einer einzigen Funktion  $u$  erfassen: Der Funktionswert  $u(\mathbf{x}, t)$  stellt die Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  zur Zeit  $t$  dar. Oft beschränkt man sich auf den **stationären** Fall, bei dem die Temperatur  $u$  nur von  $\mathbf{x}$  abhängt. Die unter dem Regime der Wärmeleitung sich einstellenden räumlichen und zeitlichen Änderungsraten der Funktion  $u$  sind aneinander gekoppelt durch eine gewisse partielle Differentialgleichung, die wir nun herleiten wollen.

Wir betrachten zunächst eine besonders einfache Modellsituation (siehe die Fig. 6.3.14): Die Temperatur hänge nur von  $x_3$  (insbesondere nicht von  $t$ ) ab und nehme linear mit  $x_3$  zu:

$$u(\mathbf{x}, t) := u_0 + \eta x_3.$$

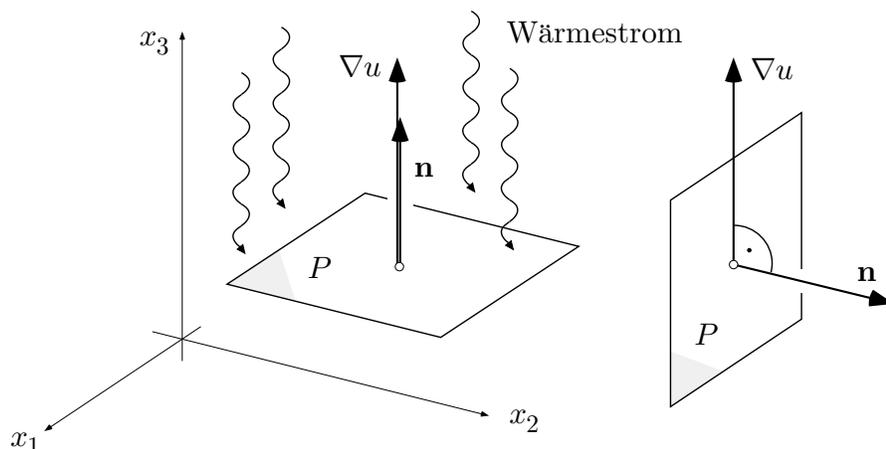


Fig. 6.3.14

Die Konstante  $\eta > 0$  stellt die Temperaturzunahme pro Längeneinheit dar und ist gleich dem Betrag des Temperaturgradienten  $\nabla u = (0, 0, \eta)$ . Es sei  $P \subset \mathbb{R}^3$  eine zunächst horizontale Parallelogrammfläche, die wir uns nach oben orientiert denken. Es liegt nahe, den **Wärmefluß**  $\Phi(P)$  — gemeint ist die Wärmemenge, die *pro Zeiteinheit* das Parallelogramm in Richtung  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  durchströmt — wie folgt zu veranschlagen:

$$\Phi(P) = -k \eta \omega(P) .$$

Dabei ist  $k$  eine Materialkonstante, die **Wärmeleitfähigkeit** des betreffenden Mediums. Ein großer  $k$ -Wert bedeutet große Wärmeleitfähigkeit. Das Minuszeichen drückt aus, daß die Wärme von oben nach unten strömt, wenn die Temperatur von unten nach oben zunimmt.

Wird nun das Parallelogramm  $P$  gekippt, so verändert sich auch der Fluß  $\Phi(P)$ , und in dem Grenzfall, wo  $P$  parallel zur  $x_3$ -Achse ist, wird  $\Phi(P) = 0$ . Die Intuition sagt uns, daß die Formel

$$\Phi(P) = -k (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \omega(P)$$

den fraglichen Fluß für beliebige Stellung von  $P$  richtig wiedergibt.

Es sei jetzt  $u$  eine beliebige Temperaturverteilung in dem Gebiet  $\Omega$  und  $P \subset \Omega$  ein kleines orientiertes Parallelogramm mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$ . Für die Wärmemenge, die in einem sehr kurzen Zeitintervall  $[t_0 - h, t_0 + h]$  durch dieses Parallelogramm fließt, kommt es nur auf die Verhältnisse in der unmittelbaren Nähe des "Weltpunktes"  $(\mathbf{x}, t_0)$  an. Mit Mikroskop und Zeitlupe betrachtet sind aber diese Verhältnisse von der Art, wie wir sie eben diskutiert haben: homogen und stationär. Hieraus folgt: Der Wärmefluß durch das betrachtete Parallelogramm hat zur Zeit  $t_0$  den Wert

$$\Phi(P) \doteq -k (\nabla u(\mathbf{x}, t_0) \cdot \mathbf{n}) \omega(P) , \quad (14)$$

und der Wärmefluß durch eine makroskopische orientierte Fläche  $S \subset \Omega$  hat folglich zu jeder Zeit  $t$  den (von  $t$  abhängigen) Wert

$$\Phi(S) = - \int_S k \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\omega . \quad (15)$$

Man bezeichnet übrigens die Größe

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}} u =: \frac{\partial u}{\partial n}$$

als **Normalenableitung** der Funktion  $u$ . Die Normalenableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$  ist nur in den Punkten  $\mathbf{x}$  einer gegebenen orientierten Fläche  $S$  definiert (Fig. 6.3.15). Dieser Begriff erlaubt, die Formeln (14) und (15) in folgender Weise zu schreiben:

$$d\Phi = -k \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega ,$$

in Worten: Der Wärmedurchsatz pro Flächeneinheit ist proportional zur Normalenableitung der Temperatur, und

$$\Phi(S) = - \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega .$$

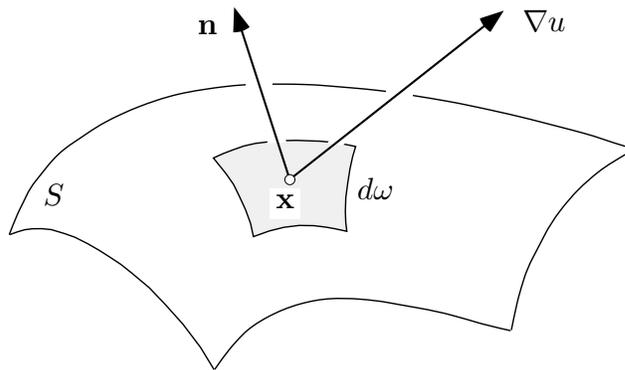


Fig. 6.3.15

Wie in Beispiel ⑤ führen wir jetzt einen Probereich  $B \subset \Omega$  ein, den wir für den Moment festhalten. Die gesamte zur Zeit  $t$  in dem Bereich  $B$  gespeicherte Wärmemenge  $W(t)$  ist gegeben durch

$$W(t) = \int_B c\rho u(\mathbf{x}, t) \, d\mu(\mathbf{x}) .$$

Dabei sind  $c$  und  $\rho$  Materialkonstanten:  $c$  ist die sogenannte Wärmekapazität des betreffenden Mediums und  $\rho$  dessen Dichte. Die zeitliche Änderungsrate von  $W(\cdot)$  ist damit gegeben durch

$$W'(t) = \int_B c\rho u_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) \quad (16)$$

(vgl. ⑤). Die momentane Änderungsrate  $W'(t)$  ist andererseits gleich dem zur Zeit  $t$  wirksamen Wärmefluß durch  $\partial B$ ; dabei ist zu berücksichtigen, daß abfließende Wärme eine Abnahme von  $W$  zur Folge hat. Aufgrund von (15) gilt daher

$$W'(t) = -\Phi(\partial B) = \int_{\partial B} k \nabla u \cdot \mathbf{n} d\omega .$$

Wir verwandeln das letzte Integral mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Integral über  $B$  und erhalten

$$W'(t) = \int_B k \operatorname{div}(\nabla u) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (17)$$

Hier erscheint neu die Skalarfunktion

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(u_x, u_y, u_z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

(in Koordinaten  $x, y, z$ ). Der für  $C^2$ -Funktionen von  $n$  Raumvariablen definierte Differentialoperator

$$\Delta : \quad u \mapsto \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

ist so ziemlich der wichtigste überhaupt und heißt **Delta-Operator** oder auch **Laplace-Operator**. Gleichung (17) geht damit über in

$$W'(t) = \int_B k \Delta u d\mu(\mathbf{x}) ,$$

und im Verein mit (16) erhalten wir

$$\int_B (c\rho u_t - k \Delta u) d\mu(\mathbf{x}) = 0 .$$

Da der Probebereich  $B$  ganz beliebig ist, schließen wir hieraus wie im hydrodynamischen Fall: Der Integrand muß identisch in  $\mathbf{x}$  und  $t$  verschwinden. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$\frac{k}{c\rho} =: a^2$$

und erhalten damit die sogenannte **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u . \quad (18)$$

Der Stofftransport durch Diffusion in einem ruhenden Trägermedium erfolgt übrigens nach demselben Gesetz; dabei stellt  $u(\mathbf{x}, t)$  die Konzentration des diffundierenden Stoffes an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  dar.

Im stationären Fall ist  $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ ; die Temperaturverteilung (oder Konzentrationsverteilung)  $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$  genügt dann der **Laplace-** oder **Potentialgleichung**

$$\Delta u = 0 . \quad (19)$$

### Geometrische Erklärung des Laplace-Operators

Damit man (18) und (19) besser versteht, geben wir noch eine geometrische Interpretation des Laplace-Operators, wobei wir uns für die Rechnung den Fall  $n = 3$  vornehmen. Es genügt, eine Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$$

in der Umgebung des Ursprungs  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$  zu betrachten. Nach der Taylorschen Formel gilt

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^3 u_{.i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} u_{.ik} x_i x_k + o(r^2) \quad (r \rightarrow 0); \quad (20)$$

dabei sind die partiellen Ableitungen von  $u$  an der Stelle  $\mathbf{0}$  zu nehmen, sind also Konstanten. Im folgenden geht es darum, ob  $u(\mathbf{x})$  im Mittel über eine kleine 2-Sphäre  $S_r$  um  $\mathbf{0}$  eher größer ist als  $u(\mathbf{0})$  oder nicht. Wir betrachten daher das Integral

$$A(r) := \int_{S_r} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})) d\omega(\mathbf{x})$$

(Fig. 6.3.16). Aus (20) ergibt sich

$$A(r) = \sum_{i=1}^3 u_{.i} \int_{S_r} x_i d\omega + \frac{1}{2} \sum_{i,k} u_{.ik} \int_{S_r} x_i x_k d\omega + o(r^4),$$

denn  $S_r$  besitzt den Flächeninhalt  $4\pi r^2$ . Hier sind die Integrale

$$\int_{S_r} x_i d\omega, \quad \int_{S_r} x_i x_k d\omega \quad (i \neq k)$$

aus Symmetriegründen gleich 0, und die Integrale  $\int_{S_r} x_i^2 d\omega$  haben alle denselben Wert, nämlich

$$\int_{S_r} x_i^2 d\omega = \frac{1}{3} \int_{S_r} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d\omega = \frac{r^2}{3} \int_{S_r} d\omega = \frac{4\pi}{3} r^4 .$$

Damit ergibt sich

$$A(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_{.ii} \cdot \frac{4\pi}{3} r^4 + o(r^4) = \frac{2\pi}{3} r^4 \Delta u + o(r^4) .$$

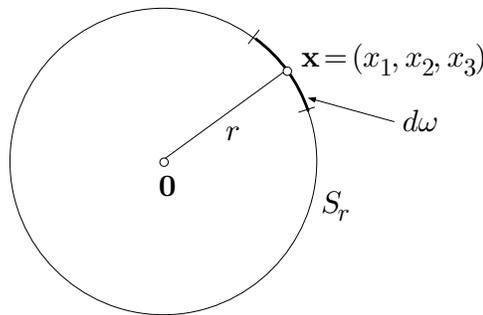


Fig. 6.3.16

Die Größe, die uns interessiert, ist ja  $\Delta u := \Delta u(\mathbf{0})$ . Lösen wir die letzte Gleichung nach  $\Delta u$  auf, so folgt

$$\Delta u(\mathbf{0}) = \frac{3}{2\pi r^4} A(r) + o(1) \quad (r \rightarrow 0) ,$$

das heißt:

$$\Delta u(\mathbf{0}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{6}{r^2} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})) d\omega(\mathbf{x}) \right) .$$

In Worten:  $\Delta u(\mathbf{0})$  ist bis auf einen Skalierungsfaktor gleich dem mittleren Mehrwert von  $u$  in den Punkten  $\mathbf{x}$  rund um  $\mathbf{0}$  gegenüber dem Wert von  $u$  an der Stelle  $\mathbf{0}$ . Die Wärmeleitungsgleichung (18) erhält damit folgende anschauliche Interpretation: Wenn es in den Punkten rund um  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  im Schnitt wärmer ist als an der Stelle  $\mathbf{x}$ , so wird die Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x}$  in der nächsten Sekunde zunehmen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die im wesentlichen proportional ist zu der über alle Richtungen von  $\mathbf{x}$  aus gemittelten räumlichen Temperaturzunahme.

Im stationären Fall ( $\Delta u \equiv 0$ ) ist die Temperatur an jeder Stelle  $\mathbf{x}$  "innerlich ausgewogen", und  $u(\mathbf{x})$  wird von den Temperaturwerten rund um  $\mathbf{x}$  per saldo

weder nach oben noch nach unten gezogen. Funktionen, die der Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  genügen, werden **harmonische Funktionen** genannt (dies hat nichts mit harmonischen Schwingungen zu tun). Harmonische Funktionen sind wunderbarerweise von selbst beliebig oft differenzierbar, obwohl in ihrer Definition nur von zweiten Ableitungen die Rede ist.

## Aufgaben

1. (M) Skizziere die Fläche  $S$  mit der Parameterdarstellung

$$S : (r, \phi) \mapsto \begin{cases} x := r \cos \phi \\ y := r \sin \phi \\ z := c \phi \end{cases} \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi < 2\pi),$$

$c$  eine positive Konstante, und berechne den Flächeninhalt  $\omega(S)$ .

2. Die Fläche

$$S_\varepsilon : z = 1 + \varepsilon r^n \sin(n\phi) \quad (0 \leq r \leq 1; \text{Zylinderkoordinaten})$$

modelliert eine radial gefältelte Membran über dem Einheitskreis der  $(x, y)$ -Ebene.

- (a) Produziere eine handliche Parameterdarstellung von  $S$ .
- (b) Stelle den Flächeninhalt  $\omega(S_\varepsilon)$  als möglichst einfaches (für  $n > 3$  leider nicht elementares) Integral dar.
- (c) Berechne näherungsweise die aus der Fältelung resultierende Oberflächenvergrößerung  $\omega(S_\varepsilon) - \omega(S_0)$  unter der Annahme  $\varepsilon \ll 1$ . (*Hinweis*: Man darf in (b) den Integranden durch eine erste Näherung ersetzen.)
3. Verifiziere: Das Coulombfeld  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}$  ( $r := |\mathbf{x}|$ ) ist divergenzfrei. (*Hinweis*: Verwende  $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ .)
4. Berechne den Fluß des Vektorfeldes  $\mathbf{K}(x, y, z) := (yz, zx, xy)$  von innen nach außen durch den im ersten Oktanten gelegenen Teil der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(*Hinweis*: Die Parameterdarstellung der 2-Sphäre geeignet anpassen.)

5. Es sei  $B$  der im ersten Oktanten gelegene Teil der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$ . Berechne den aus  $B$  heraustretenden Fluß des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (\alpha x, \beta y, \gamma z)$$

einmal als Flußintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

6. Finde und beweise dabei koordinatenfreie Identitäten der Form

(a)  $\operatorname{div}(f \mathbf{v}) = \dots$  ,

(b)  $\operatorname{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) = \dots$  ,

(c)  $\operatorname{div}(f \operatorname{rot} \mathbf{K}) = \dots$

für  $C^1$ -Skalarfunktionen und  $C^2$ -Vektorfelder im  $\mathbb{R}^3$ .

7. Die Feldvektoren eines Strömungsfeldes  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$  im  $\mathbb{R}^3$  sind parallel zur  $(x, y)$ -Ebene, von der  $z$ -Achse aus radial nach außen gerichtet und besitzen den konstanten Betrag 1. Auf der  $z$ -Achse sei  $\mathbf{v} := \mathbf{0}$ .

- (a) Bestimme  $P, Q, R$  als Funktionen von  $x, y, z$ .

- (b) Berechne den Fluß dieses Feldes von innen nach außen durch den Mantel  $M$  des Kreiskegels  $K := \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ . (*Hinweis:* Die besondere Geometrie dieser Situation erlaubt, den gesuchten Fluß sozusagen “im Kopf” auszurechnen.)

- (c) Berechne den Fluß von  $\mathbf{v}$  durch die nach außen orientierte Einheitskugel  $S^2$ . (*Hinweis:* Anhand der Fig. 6.3.17 läßt sich die Rechnung wesentlich vereinfachen.)

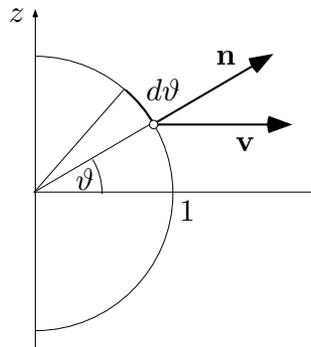


Fig. 6.3.17

8. Bestimme die sämtlichen Polynome in zwei Variablen  $x$  und  $y$  vom Grad  $\leq 2$ , die als Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch sind, d.h. der Laplace-Gleichung  $\Delta f = 0$  genügen.

9. Berechne den Fluß des Feldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$  von innen nach außen durch die Oberfläche des Oktaeders  $P := \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$ , und zwar
- als Flußintegral, unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrien,
  - mit Hilfe des Satzes von Gauß (das Integral läßt sich “im Kopf” ausrechnen).
10. Es sei  $S$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ , so orientiert, daß  $\mathbf{n}$  vom Ursprung wegzeigt. Berechne den Fluß  $\Phi$  des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$  durch  $S$ , und zwar
- als Flußintegral,
  - mit Hilfe des Satzes von Gauß, angewandt auf einen geeigneten dreidimensionalen Bereich  $B$ .
11. Ein ebenes Feld  $\mathbf{K}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , das sowohl divergenzfrei wie **wirbelfrei** (d.h.  $Q_x - P_y \equiv 0$ ) ist, wird **harmonisch** genannt.
- Warum wohl?
  - Es sei  $\mathbf{K}$  ein harmonisches ebenes Feld und  $\mathbf{K}_\alpha$  das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor um den Winkel  $\alpha$  gedreht wird. Zeige: Dann ist auch  $\mathbf{K}_\alpha$  harmonisch.
12. Betrachte im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , die nur von  $|\mathbf{x}| =: r$  abhängige Funktion

$$u(\mathbf{x}) := r^\alpha,$$

$\alpha$  ein reeller Parameter. Es ist  $\Delta u = C r^{\alpha-2}$  für ein gewisses von der Raumdimension  $n$  abhängiges  $C$ . Berechne  $C$ .

(*Hinweis:* Verwende wiederholt  $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ .)

## 6.4 Der Satz von Stokes

Für den dritten klassischen Integralsatz der Vektoranalysis interpretieren wir die gegebenen Vektorfelder wieder als Kraftfelder oder als elektrische Felder und verwenden als Variable dafür den Buchstaben  $\mathbf{K}$ . Es geht im folgenden um Linienintegrale

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

längs geschlossenen Kurven  $\gamma$  im (dreidimensionalen) Raum (Fig. 6.4.1). Man nennt (1) auch die **Zirkulation** des Feldes  $\mathbf{K}$  längs  $\gamma$ . Die Zirkulation ist besonders groß, wenn  $\mathbf{K}$  längs  $\gamma$  durchwegs die Richtung des Tangentialvektors  $\mathbf{r}'(t)$  hat, so daß sich die von den einzelnen “Kurvenelementen”  $d\mathbf{r}$  herrührenden Beiträge laufend kumulieren. Dies ist zum Beispiel der Fall für das in Beispiel 6.2.④ betrachtete Feld  $\mathbf{A} := \nabla \arg$  (“Magnetfeld der stromdurchflossenen  $z$ -Achse”) und einen Kreis  $\gamma$  um die  $z$ -Achse herum.

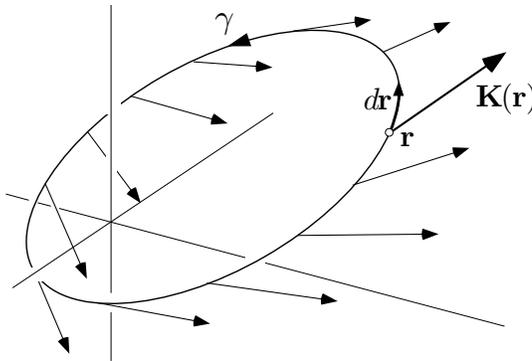


Fig. 6.4.1

Die Greensche Formel (6.3) bezieht sich auf ein Vektorfeld  $\mathbf{K} = (P, Q)$  in einem Gebiet  $\Omega$  der  $(x, y)$ -Ebene und einen Bereich  $B \subset \Omega$  mit Randzyklus  $\partial B$ . Sie verwandelt die Zirkulation von  $\mathbf{K}$  längs  $\partial B$  in das Integral einer gewissen “Ableitung” von  $\mathbf{K}$  (genau: des Ausdrucks  $Q_x - P_y$ ) über das Innere von  $B$ .

### Der Randzyklus einer orientierten Fläche

Der Satz von Stokes ist die räumliche Version der Greenschen Formel. Er bezieht sich auf ein Vektorfeld  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$  in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und eine orientierte Fläche (2-Kette)  $S \subset \Omega$  mit Randzyklus  $\partial S$  (Fig. 6.4.2). Nach diesem Satz ist die Zirkulation von  $\mathbf{K}$  längs  $\partial S$  gleich dem Integral einer “Ableitung” von  $\mathbf{K}$ , der sogenannten Rotation, über die Fläche  $S$ , genau:

gleich dem Fluß von  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  durch  $S$ . Man beweist den Satz von Stokes, indem man eine Parameterdarstellung

$$S: B \rightarrow \Omega, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) \quad (2)$$

heranzieht und die Greensche Formel auf  $B$ ,  $\partial B$  und den Pullback  $\mathbf{K}^* = (P^*, Q^*)$  von  $\mathbf{K}$  anwendet. Die Rechnung ist allerdings ziemlich mühsam, weshalb wir im folgenden nicht alle Details ausführen.

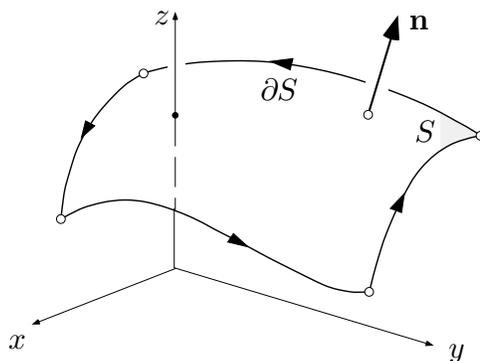


Fig. 6.4.2

Wir setzen also voraus, daß die Fläche (2-Kette)  $S$  eine  $C^2$ -Parameterdarstellung (2) besitzt, wobei der Parameterbereich  $B$  den Voraussetzungen der Greenschen Formel (6.3) genügt. Insbesondere gehört zu  $B$  ein Randzyklus  $\partial B$ , der das Innere von  $B$  zur Linken läßt.  $B$  braucht aber nicht zusammenhängend zu sein.

Die Parameterdarstellung (2) liefert zu jeder glatten Kurve

$$\gamma: t \mapsto (u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

im Parameterbereich  $B$  eine Kurve

$$\mathbf{r}(\gamma): t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

im Raum. In der Folge besitzt der Randzyklus

$$\partial B = \gamma_1 + \dots + \gamma_r$$

des Parameterbereichs  $B$  einen wohlbestimmten Bildzyklus

$$\partial S := \mathbf{r}(\partial B);$$

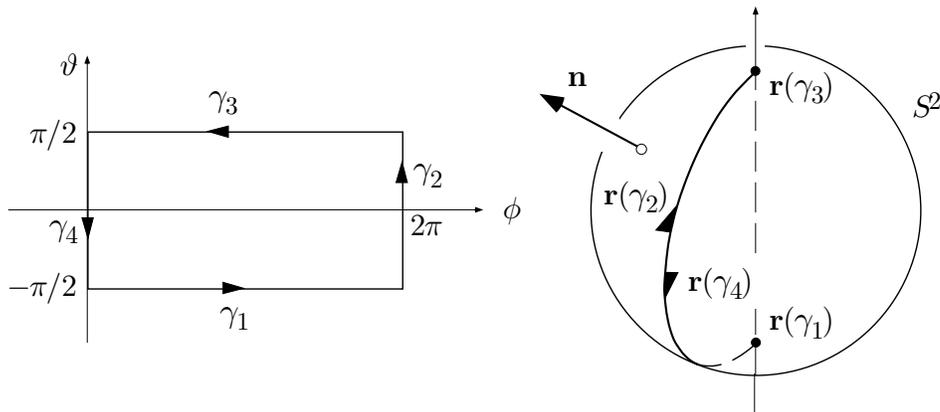


Fig. 6.4.3

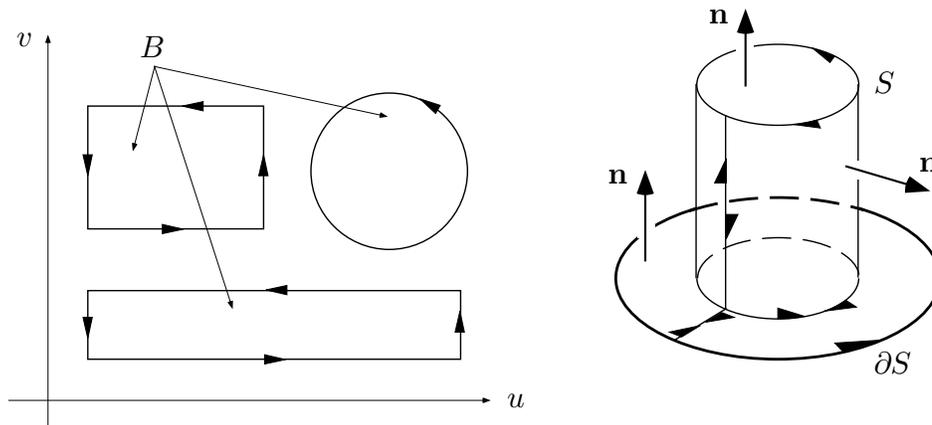


Fig. 6.4.4

dies ist der **Randzyklus** der Fläche  $S$ . Dabei kann es durchaus vorkommen, daß die Parameterdarstellung (2) gewisse  $\gamma_i$  einzeln oder in Paaren annulliert, so daß  $\partial S$  in Wirklichkeit aus weniger Kurven besteht, als formal in Erscheinung treten; siehe die Figuren 6.4.3–4. Ist  $\partial S = 0$ , so heißt die Fläche  $S$  **geschlossen**. 2-Sphären und Torusflächen, allgemein die Oberflächen von dreidimensionalen Bereichen  $B$  im Sinn von Satz (6.7), sind geschlossen. Das ergibt sich aus dem “Urprinzip”  $\partial(\partial B) = 0$ .

Was die Orientierung von  $S$  betrifft, so legt (2) vermöge

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

eine Normalenrichtung fest. Diese Normalenrichtung ist auf folgende Weise mit dem Umlaufssinn von  $\partial S$  gekoppelt: Blickt man von der Spitze von  $\mathbf{n}$

her auf  $S$ , so läuft  $\partial S$  einmal im Gegenuhrzeigersinn um  $S$  herum. Anders ausgedrückt: Der Umlauf um  $\partial S$  bildet mit  $\mathbf{n}$  eine Rechtsschraube.

□ Wir verifizieren das nur in dem folgenden trivialen Spezialfall: Es sei  $S$  die Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $O$  und Radius 1 in der  $(x, y)$ -Ebene, aufgefaßt als Fläche im Raum.  $S$  besitzt die Parameterdarstellung

$$B \rightarrow S, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) := (u, v, 0)$$

mit derselben Kreisscheibe ( $=: B$ ) in der  $(u, v)$ -Ebene als Parameterbereich, siehe die Fig. 6.4.5. Der Randzyklus von  $B$ ,

$$\partial B: \quad t \mapsto \begin{cases} u(t) := \cos t \\ v(t) := \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

geht dabei über in den Randzyklus von  $S$ ,

$$\partial S: \quad t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)) = (\cos t, \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Andererseits ist

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \equiv (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

und somit  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Blickt man nun vom Punkt  $(0, 0, 1)$  auf die  $(x, y)$ -Ebene hinunter, so geht  $\partial S$  in der Tat einmal im Gegenuhrzeigersinn um  $S$  herum. □

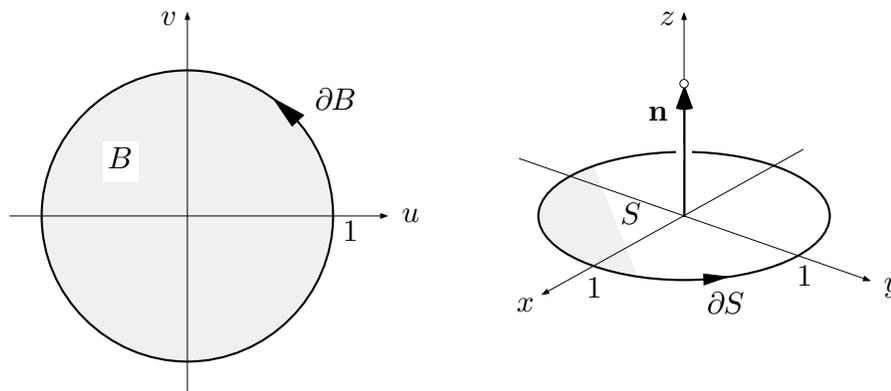


Fig. 6.4.5

### Von der Greenschen Formel zum Satz von Stokes

Es sei jetzt  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$  ein  $C^1$ -Vektorfeld in dem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und  $S$  eine in  $\Omega$  liegende Fläche (2-Kette) der beschriebenen Art, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, der Randzyklus  $\partial B$  des Parameterbereichs  $B$  bestehe aus einer einzigen glatten Kurve

$$\partial B : t \mapsto (u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

(Fig. 6.4.6). Der Randzyklus von  $S$  ist dann gegeben durch

$$\partial S : t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b) . \quad (3)$$

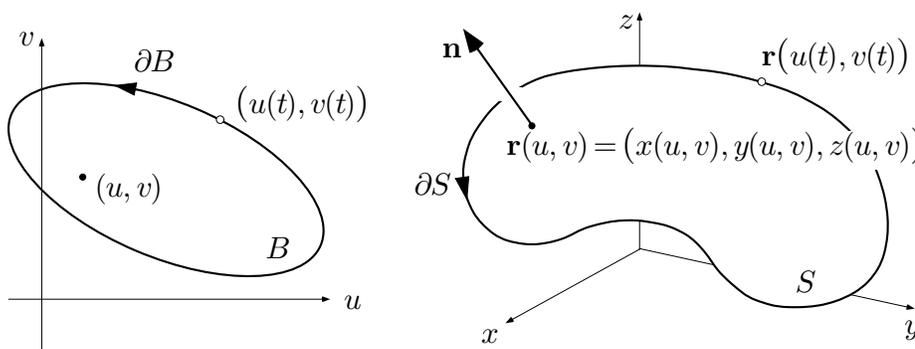


Fig. 6.4.6

Wir gehen nun daran, die Zirkulation

$$Z := \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$$

von  $\mathbf{K}$  längs  $\partial S$  zu berechnen. Aufgrund von (3) hat man zunächst

$$Z = \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{r}(u(t), v(t))) \cdot (\mathbf{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{r}_v(u(t), v(t))v'(t)) dt .$$

Wir können dieses Integral als Linienintegral längs  $\partial B$  interpretieren, und zwar für das Feld  $\mathbf{K}^* = (P^*, Q^*)$  mit

$$P^*(u, v) := \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u(u, v) , \quad Q^*(u, v) := \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_v(u, v) .$$

Wir haben also

$$Z = \int_{\partial B} (P^* du + Q^* dv)$$

und können hierauf die Greensche Formel **(6.3)** anwenden. Es ergibt sich

$$Z = \int_B H(u, v) d\mu(u, v) \quad (4)$$

mit

$$H(u, v) := Q_u^* - P_v^* = \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_v(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u(u, v) \right).$$

Hier sind die Skalarprodukte nach der Produktregel zu differenzieren. Dabei heben sich die beiden  $\mathbf{r}_{uv}$ -Terme heraus, und es bleibt

$$H(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_v - \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u.$$

Aufgrund der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) = (\nabla P \cdot \mathbf{r}_u, \nabla Q \cdot \mathbf{r}_u, \nabla R \cdot \mathbf{r}_u)$$

und Entsprechendes für  $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v))$ . Damit ergibt sich

$$H(u, v) = (\nabla P \cdot \mathbf{r}_u, \nabla Q \cdot \mathbf{r}_u, \nabla R \cdot \mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v - (\nabla P \cdot \mathbf{r}_v, \nabla Q \cdot \mathbf{r}_v, \nabla R \cdot \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_u.$$

Hiernach ist  $H$  linear in “ $\nabla \mathbf{K}$ ” (gemeint ist: in den ersten partiellen Ableitungen von  $P, Q, R$  nach  $x, y, z$ ), und  $H$  ist bilinear und schiefsymmetrisch in den Vektorargumenten  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$ . Die genaue Rechnung zeigt, daß sich  $H(u, v)$  folgendermaßen schreiben läßt:

$$H(u, v) = \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v). \quad (5)$$

Dabei sind die auftretenden Ableitungen von  $P, Q, R$  auf bestimmte Weise zusammengefaßt in dem Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{K} &:= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R), \end{aligned} \quad (6)$$

der **Rotation** von  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ . In nummerierten Koordinaten ist

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \left( \frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3}, \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1}, \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \right)$$

(zyklische Vertauschung!). Die Rotation ist ein weiteres, von  $\mathbf{K}$  abgeleitetes, Vektorfeld.

Wir setzen nun (5) in (4) ein und erhalten

$$\begin{aligned} Z &= \int_B \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) d\mu(u, v) \\ &= \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} . \end{aligned}$$

In Worten: Die Zirkulation  $Z$  von  $\mathbf{K}$  längs  $\partial S$  ist gleich dem Fluß von  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  durch die (orientierte) Fläche  $S$ . Wir haben damit den **Satz von Stokes** bewiesen:

(6.8) ( $S$ ,  $\partial S$  und  $\mathbf{K}$  haben die angegebene Bedeutung.)

$$\int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} .$$

### Geometrische Erklärung der Rotation

Diese Formel hat natürlich erst dann einen Sinn, wenn wir auch die rechte Seite einigermaßen verstehen. Wir haben oben die Rotation rein formal, durch eine Rechenvorschrift, definiert. Der Rotationsvektor hat aber auch eine geometrische Bedeutung. Um sie zu finden, wenden wir den Satz von Stokes auf eine besonders einfache Situation an; ähnlich, wie wir seinerzeit den Satz von Gauß auf eine kleine Kugel angewandt haben, um die Divergenz zu erklären. Ganz so anschaulich wie dort wird es bei der Rotation allerdings nicht.

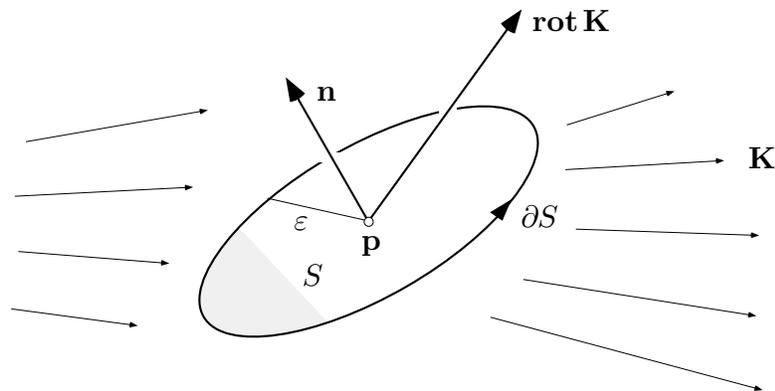


Fig. 6.4.7

Wir halten einen Punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  fest und betrachten eine orientierte Kreisscheibe  $S := S_{\mathbf{n}, \varepsilon}$  mit Zentrum  $\mathbf{p}$ , Normalenvektor  $\mathbf{n}$  und Radius  $\varepsilon$  (siehe die Fig. 6.4.7). Dabei stellen wir uns vor, daß  $S$  beweglich ist; das heißt:  $\mathbf{n}$  und  $\varepsilon$  sind variabel. Die Zirkulation  $Z$  von  $\mathbf{K}$  längs  $\partial S$  ist dann eine Funktion von  $\mathbf{n}$  und  $\varepsilon$ :

$$Z(\mathbf{n}, \varepsilon) := \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} .$$

Dieses Integral läßt sich mit Hilfe des Satzes von Stokes verwandeln in

$$Z(\mathbf{n}, \varepsilon) = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \, d\omega \doteq \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \, \omega(S) ,$$

und es folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Z(\mathbf{n}, \varepsilon)}{\pi \varepsilon^2} = \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} . \quad (7)$$

In dieser Beziehung, die man auch als “geometrische Definition” von  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  betrachten kann, ist  $\mathbf{n}$  die Variable; alles andere ist fest oder im Limes verduftet. Es zeigt sich, daß (für gegebenes  $\varepsilon \ll 1$ ) die Zirkulation  $Z(\mathbf{n}, \varepsilon)$  am größten ist, wenn die Normale  $\mathbf{n}$  des Scheibchens in die Richtung von  $\mathbf{rot} \mathbf{K} := \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p})$  weist. Damit man besser sieht, was das bedeutet, ziehen wir für einen Moment das homogene und weder zur Zirkulation noch zur Rotation beitragende Feld  $\mathbf{K}(\mathbf{p})$  von  $\mathbf{K}$  ab, betrachten also das Feld

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) := \mathbf{K}(\mathbf{r}) - \mathbf{K}(\mathbf{p}) .$$

Wegen  $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  sind nun die minimalen Feldvariationen in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$  viel besser sichtbar.

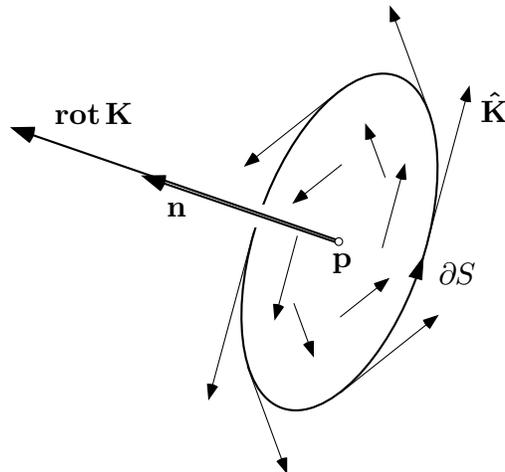


Fig. 6.4.8

Weist  $\mathbf{n}$  in die Richtung von  $\mathbf{rot K}$ , so sieht das Feld  $\hat{\mathbf{K}}$  längs  $\partial S$  bzw. in der Ebene von  $S$  im Extremfall aus, wie in Fig. 6.4.8 dargestellt (ohne Beweis). Das Feld  $\hat{\mathbf{K}}$  "wirbelt" um die Achse  $\mathbf{n}$  herum, und man erkennt, daß  $Z(\mathbf{n}, \varepsilon)$  hier besonders groß ausfallen wird. Beispiel ① (s.u.) illustriert diese Situation noch auf andere Art.

Steht aber  $\mathbf{n}$  senkrecht auf  $\mathbf{rot K}$ , so bietet sich ein ganz anderes Bild (siehe die Fig. 6.4.9). Im Extremfall steht  $\hat{\mathbf{K}}$  überall senkrecht auf  $\partial S$ , und es leuchtet ein, daß  $Z(\mathbf{n}, \varepsilon)$  dann verschwindet.

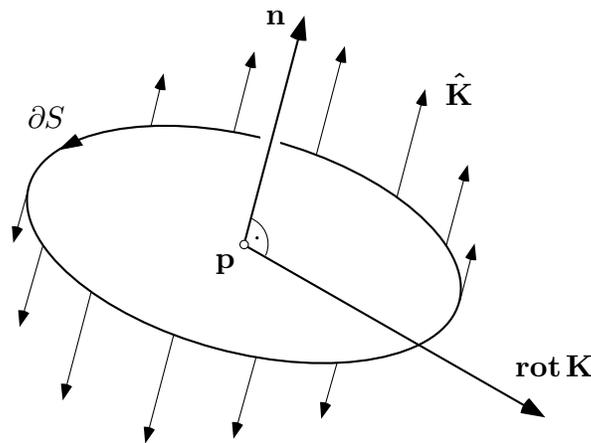


Fig. 6.4.9

Im Hinblick auf diese Erklärungen und Figuren nennt man die Rotation auch **Wirbeldichte** des Feldes  $\mathbf{K}$ . Ist

$$\mathbf{rot K} \equiv \mathbf{0},$$

so heißt das Feld  $\mathbf{K}$  **wirbelfrei**.

① Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  des mit Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega \mathbf{e}$$

rotierenden "Weltäthers" ist gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \vec{\omega} \times \mathbf{x}$$

(siehe Beispiel 6.2.②) und besitzt somit die Rotation

$$\begin{aligned} \mathbf{rot v}(\mathbf{x}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) \\ &= (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Die Rotation dieses Feldes  $\mathbf{v}$  ist also im ganzen Raum konstant, kurz:  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$  ist ein homogenes Vektorfeld (und ist nicht etwa auf der Achse konzentriert, siehe auch die Fig. 6.4.10).  $\circ$

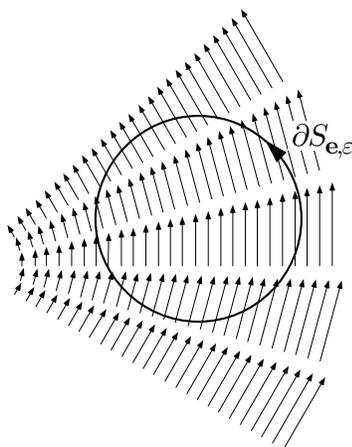


Fig. 6.4.10

② Wir betrachten weiter das Feld

$$\mathbf{A}(x, y, z) := \nabla \arg(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

im Gebiet  $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$  und bemerken zunächst allgemein: Die Rotation eines im Grunde genommen ebenen Feldes

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (P(x, y), Q(x, y), 0)$$

ist aufgrund der definierenden Formel (6) gegeben durch

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = (0, 0, Q_x - P_y) .$$

Das Feld  $\mathbf{A}$  ist von dieser Art. In Beispiel 6.2.④ wurde überdies gezeigt, daß  $\nabla \arg$  die Integrabilitätsbedingung  $Q_x - P_y \equiv 0$  erfüllt. Somit ist  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ . Das Feld  $\mathbf{A}$  ist also wirbelfrei, obwohl sich eindeutig “etwas” um die  $z$ -Achse herumbewegt, siehe die Figur 6.2.11. Die Rotation ist eben eine lokale Eigenschaft des Feldes, und im Kleinen sieht es etwas anders aus. Betrachten wir etwa einen kleinen Kreisring-Sektor  $B$  in der  $(x, y)$ -Ebene (Fig. 6.4.11), so wird die größere Länge des Außenbogens durch die Abnahme der Feldstärke  $|\mathbf{A}|$  gerade kompensiert, und die Zirkulation längs  $\partial B$  ist 0.  $\circ$

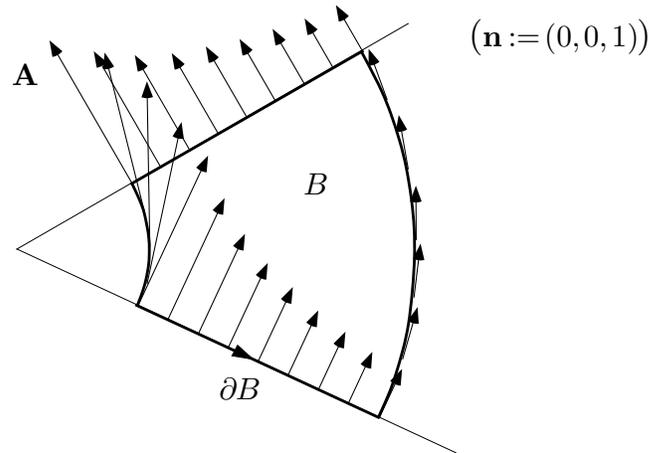


Fig. 6.4.11

③ Wir erproben den Satz von Stokes an dem folgenden “Zahlenbeispiel”:  
 $\mathbf{K}$  ist das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (y(z^2 - x^2), x(y^2 - z^2), z(x^2 + y^2))$$

und  $S$  die nach oben orientierte Halbsphäre

$$S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

(Fig. 6.4.12).  $S$  besitzt den Randzyklus

$$\partial S: \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \sin^2 t \cdot \cos t + 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(2t))^2 dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits besitzt  $S$  die Parameterdarstellung

$$(\phi, \theta) \mapsto \mathbf{r}(\phi, \theta) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

mit dem Parameterbereich  $B := [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ . Nach 6.3.(4) gilt

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \cos \theta (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta),$$

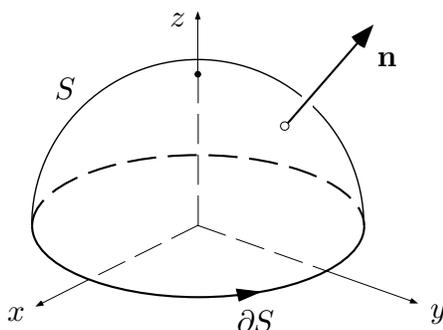


Fig. 6.4.12

und zwar ist dieser Vektor schon richtig (nach oben) orientiert. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (y(z^2 - x^2), x(y^2 - z^2), z(x^2 + y^2)) \\ &= (2z(x + y), 2z(y - x), x^2 + y^2 - 2z^2) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \\ &= (2 \sin \theta \cos \theta (\cos \phi + \sin \phi), 2 \sin \theta \cos \theta (\sin \phi - \cos \phi), \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\phi, \theta) &:= \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) \\ &= 2 \sin \theta \cos^3 \theta (\cos^2 \phi + \cos \phi \sin \phi) \\ &\quad + 2 \sin \theta \cos^3 \theta (\sin^2 \phi - \cos \phi \sin \phi) + \cos^3 \theta \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta \\ &= 3 \cos^3 \theta \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

und hieraus schließlich

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} &= \int_B H(\phi, \theta) d\mu(\phi, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (3 \cos^3 \theta \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta) d\theta d\phi \\ &= 2\pi \left( -\frac{3}{4} \cos^4 \theta - \frac{1}{2} \sin^4 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi \left( -\frac{1}{2} - \left( -\frac{3}{4} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wie oben. ○

## Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder im Raum

Der Satz von Stokes besitzt zahlreiche Anwendungen in der Kontinuumsmechanik und in der Elektrodynamik, auf die wir hier nicht eingehen. Wir behandeln hingegen eine mathematische Anwendung dieses Satzes, nämlich die **Integrabilitätsbedingung** für Vektorfelder bzw. 1-Formen im dreidimensionalen Raum (vgl. Satz (6.5)):

**(6.9)** Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $\mathbf{K} = (P, Q, R)$  (bzw. eine 1-Form  $Pdx + Qdy + Rdz$ ) auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ist genau dann ein Potentialfeld  $\nabla f$  (ein totales Differential  $df$ ), wenn gilt:

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} \equiv \mathbf{0} . \quad (8)$$

□ Wir beweisen auf zwei Arten, daß die Bedingung (8) notwendig ist.

(a) Ist  $\mathbf{K}$  ein Potentialfeld, so ist  $\mathbf{K}$  nach Satz (6.1)(a) konservativ, und die Zirkulation längs irgendwelchen Zyklen ist 0. Hieraus folgt: Die linke Seite von (7) ist 0 für jede Wahl von  $\mathbf{n}$ . Dann muß aber der Vektor  $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p})$  der Nullvektor sein, und da das für jeden Punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  gilt, folgt (8).

(b) Ist  $\mathbf{K} = \nabla f$ , so folgt

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) \equiv \mathbf{0}$$

aufgrund der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge.

(Wir haben zweifach gezeigt:  $\mathbf{rot} \circ \nabla = 0$ . Wie man leicht verifiziert, gilt auch die hierzu "duale" Beziehung

$$\mathbf{div} \circ \mathbf{rot} = 0 .$$

Das alles hat einen geheimnisvollen Zusammenhang mit der geometrischen Identität  $\partial(\partial B) = 0$ .)

Die Bedingung (8) ist aber auch hinreichend: Es sei  $\gamma$  eine beliebige geschlossene Kurve in  $\Omega$ . Dann gibt es nach Voraussetzung über  $\Omega$  eine orientierte Fläche  $S \subset \Omega$  mit  $\gamma = \partial S$ , und wir erhalten mit Satz (6.8):

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} = 0 .$$

Hieraus folgt, da  $\gamma$  beliebig war: Das Feld  $\mathbf{K}$  ist konservativ oder eben nach Satz (6.2)(a) ein Potentialfeld. □

Die im Anschluß an (6.5) gemachte Bemerkung trifft auch hier zu: Ist die Bedingung (8) erfüllt, so ist das Feld jedenfalls (das heißt: ohne Rücksicht auf die Gestalt von  $\Omega$ ) lokal ein Potentialfeld, global aber unter Umständen nicht. Hierfür verweisen wir einmal mehr auf das Beispiel

$$\mathbf{A}(x, y, z) := \nabla \arg(x, y) .$$

④ Das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (4x^3 + 6xy^2 + 5y^2z, 6x^2y + 10xyz + 7z^3, 5xy^2 + 21yz^2)$$

ist im ganzen Raum definiert und genügt dort der Integrabilitätsbedingung:

$$R_y - Q_z = (10xy + 21z^2) - (10xy + 21z^2) \equiv 0 ,$$

analog:  $P_z - R_x \equiv 0$ ,  $Q_x - P_y \equiv 0$ . Folglich ist  $\mathbf{K}$  ein Potentialfeld: Es gibt eine Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla f = \mathbf{K}$ , das heißt:

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 + 6xy^2 + 5y^2z , \\ f_y &= 6x^2y + 10xyz + 7z^3 , \\ f_z &= 5xy^2 + 21yz^2 . \end{aligned}$$

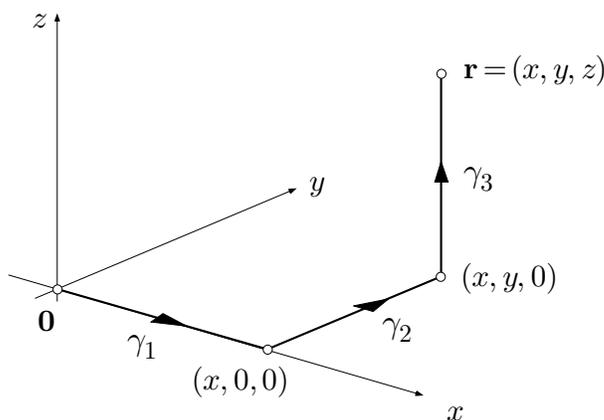


Fig. 6.4.13

Ein derartiges  $f$  läßt sich nach der Methode von Beispiel 6.2.③ — ausgedehnt auf drei Variable  $x, y, z$  — konstruieren. Da man sich dabei gerne verheddert, greifen wir lieber auf Satz (6.2)(b) zurück: Wir wählen  $\mathbf{0}$  als Nullpunkt des Potentials  $f$  und erhalten den Wert von  $f$  an einer beliebigen Stelle  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , indem wir  $\mathbf{K}$  längs eines geeigneten Weges von  $\mathbf{0}$  nach  $\mathbf{r}$

aufintegrieren. Für den in Fig. 6.4.13 dargestellten Weg  $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  mit achsenparallelen Teilstücken  $\gamma_i$  ergibt sich

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} Q dy + \int_{\gamma_3} R dz$$

(alle anderen Beiträge ans Integral entfallen). Mit Hilfe der Parametrisierung

$$\gamma_1: \quad x' \mapsto (x', 0, 0) \quad (0 \leq x' \leq x),$$

analog für  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$ , erhalten wir die allgemein verwendbare Formel

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(x', 0, 0) dx' + \int_0^y Q(x, y', 0) dy' + \int_0^z R(x, y, z') dz',$$

im vorliegenden Fall also

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x 4x'^3 dx' + \int_0^y 6x^2 y' dy' + \int_0^z (5xy^2 + 21yz'^2) dz' \\ &= x^4 + 3x^2 y^2 + 5xy^2 z + 7yz^3. \end{aligned}$$

Das allgemeinste Potential von  $\mathbf{K}$  unterscheidet sich hiervon um eine Konstante. ○

## Aufgaben

1. Finde und beweise dabei koordinatenfreie Identitäten der Form

(a)  $\mathbf{rot}(f \nabla g) = \dots$ ,

(b)  $\mathbf{rot}(f \mathbf{K}) = \dots$ ,

(c)  $\mathbf{rot}(f \nabla f) = \dots$

für  $C^2$ -Skalarfunktionen  $f, g$  und  $C^1$ -Vektorfelder  $\mathbf{K}$  im  $\mathbb{R}^3$ .

2. Es sei  $\vec{\omega} := (0, 0, \omega)$ . Betrachte das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{x})$$

und berechne  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ . Für die Rechnung Koordinaten benutzen; das Resultat soll aber koordinatenfrei dargestellt werden.

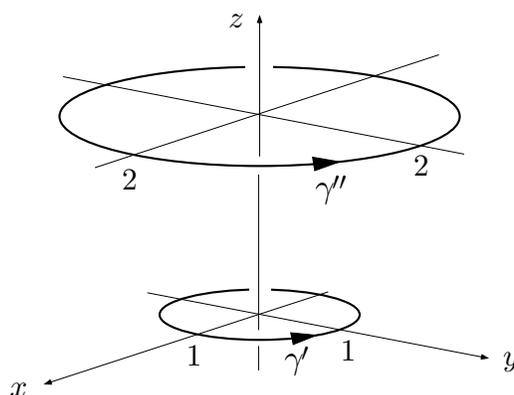


Fig. 6.4.14

3. Betrachte im  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$  das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \left( \frac{2(zx + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(zy - x)}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)$$

sowie die beiden Kreiswege  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  der Fig. 6.4.14. Berechne die Größe

$$Z := \int_{\gamma'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma''} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$$

- (a) als Linienintegral,
- (b) mit Hilfe des Satzes von Stokes (geschenkt:  $\mathbf{rot} \mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$ ; dafür ist eine Figur verlangt).

4. Gegeben sind erstens das (weder quellenfreie noch wirbelfreie) Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (-y, x, z)$$

und zweitens die Drahtschleife

$$\gamma: t \mapsto \left( \cos t, \sin t, \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(siehe die Fig. 6.4.15). Von den beiden folgenden “Flüssen” ist mindestens einer sinnlos. Dies ist zu begründen und der andere gegebenenfalls zu berechnen.

- (a) Der “Fluß” von  $\mathbf{K}$  von unten nach oben durch die Drahtschleife  $\gamma$ .
- (b) Der “Fluß” des Feldes  $\mathbf{v} := \mathbf{rot} \mathbf{K}$  von unten nach oben durch die Drahtschleife  $\gamma$ .

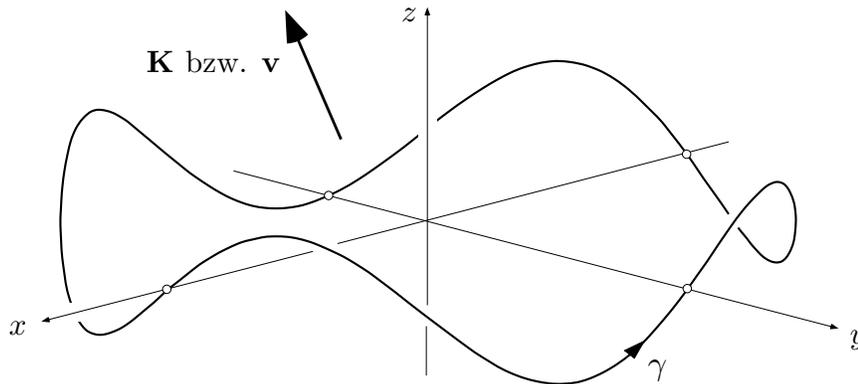


Fig. 6.4.15

5. Bestimme ein Potential für die wirbelfreien Felder der folgenden Liste:

- (a)  $\mathbf{K}(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ,
- (b)  $\mathbf{K}(x, y, z) := (x^3 + y + 2xz, x + yz + z^3, x^2 + z^3)$ ,
- (c)  $\mathbf{K}(x, y, z) := (4x^3 + 2xyz, x^2z + 2yz^2, x^2y + 2y^2z)$ .

6. Man berechne das Linienintegral  $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$  für das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$$

und den Zyklus  $\gamma$  der Fig. 6.4.16 auf drei Arten:

- (a) direkt,
- (b) mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer geeigneten Parameterdarstellung der Dreiecksfläche,
- (c) mit Hilfe des Satzes von Stokes und geometrischer Einsicht, die erlaubt, das Flächenintegral "im Kopf" auszuwerten.

(Hinweis: Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung  $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$ .)

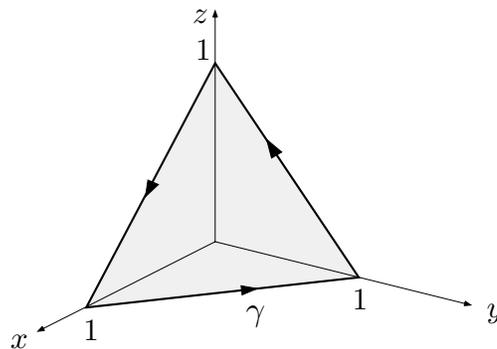


Fig. 6.4.16

7. Lege die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  so fest, daß das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

wirbelfrei wird. Das so erhaltene Feld besitzt ein Potential  $f$ . Bestimme  $f$  durch Integration von  $\mathbf{0}$  aus.

8. Es seien  $\mathbf{e}$  ein in  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$  angehefteter Einheitsvektor und  $\mathbf{v}$  das Geschwindigkeitsfeld einer mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $\mathbf{e}$  rotierenden Flüssigkeit. Weiter seien zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gegeben. Berechne die Zirkulation von  $\mathbf{v}$  längs der Ellipse

$$\gamma: \quad t \mapsto \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

einmal als Linienintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Stokes. (*Hinweis:* Das Flächenintegral läßt sich mit Hilfe von geometrischen Überlegungen “im Kopf” ausrechnen.)