
CHRISTIAN BLATTER

INGENIEUR
ANALYSIS

Kapitel 1–3

ETHZ
Studiengänge
Informationstechnologie,
Elektrotechnik und Informatik

Vorwort

Was bewegt einen Autor dazu, den unzähligen Analysiskursen für angehende Ingenieure einen weiteren hinzuzufügen? Die zu behandelnden Themen sind ja gegeben: Funktionenlehre, Differential- und Integralrechnung in einer und in mehreren Variablen, Differentialgleichungen, Vektoranalysis — und die Kollegen von den Fachdisziplinen können sich darauf verlassen, daß alles da ist.

Die Vorstellung war lange verbreitet, Ingenieur-Analysis sei im wesentlichen eine Sammlung von Rezepten zur Lösung von gewissen Standardaufgaben, und dem Dozenten obliege es in erster Linie, seinen Studenten diese Rezepte auf möglichst schonende Art beizubringen. Die betreffenden Skripten wurden dann von den Studenten als “Kochbücher” bezeichnet. Demgegenüber wird hier das didaktische Konzept vertreten und durchgezogen, daß die Ingenieur-Analysis in erster Linie einen ungeheuren Vorrat von kraftvollen Begriffen zur Verfügung stellt, die zur Modellierung und nachfolgenden Analyse von realen (physikalischen, technischen, biologischen, ...) Situationen herangezogen werden können. Dem Leser muß dabei jederzeit bewußt sein, daß das mathematische Universum in der Tiefe offen ist: Die hier behandelten Formeln, Sätze und Beispiele sind nicht der abschließende Analysisbericht, sondern das Ergebnis eines ersten Ausflugs.

Welchen Niederschlag hat nun die Ankunft von Systemen wie Maple oder Mathematica in diesem Text gefunden? Es ist wahr: Diese Systeme haben unseren mathematischen Alltag grundlegend verändert; wir benutzen sie mit Selbstverständlichkeit fürs numerische Rechnen und zum Rechnen mit Formeln, zum Disponieren und zum Experimentieren. Mit dem Begreifen ist es aber eine andere Sache; hier helfen nur treffende Begründungen und Bilder, zum andern sorgfältig gewählte Bezeichnungen und suggestive Formeln. Was nun den vorliegenden Analysiskurs betrifft, so steht eben das Geometrisch-Begriffliche im Vordergrund (nein, nicht ε und δ); und gerade, weil uns der Computer langweilige Rechenarbeit abnimmt, haben wir nun mehr Zeit dafür. Zum Lösen der eingestreuten Aufgaben aber soll der Student mit Lust den Computer verwenden — sofern natürlich die betreffende Ausrüstung zur Verfügung steht. Aufgaben, die sich zur Behandlung mit Maple oder mit Mathematica eignen, sind mit dem Zeichen \textcircled{M} markiert; Tutorials für diese Systeme werden allerdings nicht mitgeliefert. Es genügt, hier festzuhalten, daß Aufgaben, wie sie in dieser Analysis vorkommen, sowohl für Maple wie für Mathematica ein leichtes sein sollten.

Nocheinmal von vorn: Dieser Text handelt im wesentlichen von den Methoden und Möglichkeiten der Differential- und Integralrechnung auf der reellen Achse, in der Ebene und im dreidimensionalen Raum. Dabei geht es weniger

um Mathematik “an sich” als darum, einen Apparat bereitzustellen, mit dem sich Zustände und Vorgänge in der Außenwelt, speziell in der Mechanik, in der Technik, aber auch in der Ökonomie, rational beschreiben oder, modern ausgedrückt: modellieren lassen. Hierzu benötigen wir unter anderem

- einen reichhaltigen Begriffsvorrat,
- geometrisches Vorstellungsvermögen,
- einen Strauß von Sätzen,
- Sicherheit im Rechnen mit Formeln,
- Gewandtheit im Herbeiziehen und Anpassen von gelernten Methoden und Beispielen,
- das Gespür für die im Einzelfall erforderliche mathematische Präzision: welche Effekte ohne Schaden vernachlässigt werden können,
- die Bereitschaft, im Prinzip irgendeine Sache auf neue Weise zu betrachten und ehrlich zuende zu denken.

Im Zentrum unserer Bemühungen stehen also nicht Beweise, sondern Vorlagen zur mathematischen Beschreibung von Situationen, die sich letzten Endes (und damit kommen wir auf die Analysis) mit Hilfe von reellen Funktionen begreifen lassen, sowie Lösungsstrategien für die Probleme, die dabei zum Vorschein kommen.

Zürich, im Oktober 1995

Die ungebundene Ausgabe zum Wintersemester 2002/03 ist im wesentlichen ein korrigierter Nachdruck der 2. Auflage (Springer 1996). Um die Lesbarkeit zu verbessern, habe ich noch Zwischentitel eingefügt; dadurch hat sich die Paginierung verändert.

Greifensee, im September 2002

Christian Blatter

Read Me

Der ganze Text ist eingeteilt in sechs Kapitel, und jedes Kapitel ist weiter unterteilt in Abschnitte. Formeln, die später noch einmal benötigt werden, sind abschnittsweise mit mageren Ziffern nummeriert. Innerhalb eines Abschnitts wird ohne Angabe der Abschnittnummer auf Formel (1) zurückverwiesen; 3.4.(2) hingegen bezeichnet die Formel (2) des Abschnitts 3.4.

Neu eingeführte Begriffe sind am Ort ihrer Definition **halbfett** gesetzt; eine weitergehende Warnung (“Achtung, jetzt kommt eine Definition”) erfolgt nicht. Definitionen lassen sich vom Sachverzeichnis her jederzeit wieder auffinden.

Sätze (Theoreme) sind kapitelweise nummeriert; die halbfette Signatur **(4.3)** bezeichnet den dritten Satz in Kapitel 4. Sätze werden im allgemeinen angesagt; jedenfalls sind sie erkenntlich an der vorangestellten Signatur und am durchlaufenden *Schrägdruck* des Textes. Die beiden Winkel \lrcorner und \llcorner bezeichnen den Beginn und das Ende eines Beweises.

Eingekreiste Ziffern nummerieren abschnittsweise die erläuternden Beispiele und Anwendungen. Der Kreis \circ markiert das Ende eines Beispiels.

Jeder Abschnitt wird abgeschlossen durch eine Serie von Übungsaufgaben. Aufgaben, die zu einem wesentlichen Teil mit einem System wie Maple oder Mathematica behandelt werden können (und sollen!), sind mit dem Zeichen \textcircled{M} versehen.

Von Anfang an bezeichnen:

\mathbb{N} die (Menge der) natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$,

\mathbb{Z} die ganzen Zahlen,

\mathbb{Q} die rationalen Zahlen,

\mathbb{R} die reellen Zahlen,

\mathbb{C} die komplexen Zahlen,

\mathbb{B} (für “Bits”) die Menge $\{0, 1\}$.

Von diesen Zahlensystemen wird im Text noch ausführlich die Rede sein.

Inhaltsverzeichnis Kapitel 1–3

1 Grundstrukturen

1.1 Zur mathematischen Logik	1
Einige nützliche Zeichen	1
Einige logische Grundtatsachen	3
1.2 Mengen	11
Reden über Mengen	11
Mengenoperationen	12
1.3 Natürliche Zahlen	16
Summen- und Produktzeichen	16
Vollständige Induktion	19
1.4 Reelle Zahlen	23
Begriff des Körpers	23
Betrags- und Signumfunktion	25
Von den rationalen zu den reellen Zahlen	27
1.5 Koordinaten in der Ebene und im Raum	33
Winkel und Argument	33
Verschiedene räumliche Koordinatensysteme	38
1.6 Vektoralgebra	44
Begriff des Vektors	44
Summe und skalare Vielfache von Vektoren	46
Skalarprodukt	51
Vektorprodukt	56
Spatprodukt und andere mehrfache Vektorprodukte	61
1.7 Komplexe Zahlen	65
Rechenregeln	66
Polarform, Eulersche Formel	69
Wurzelziehen im Komplexen	72

2 Funktionen

2.1 Erscheinungsformen	78
Begriff der Funktion	78
Erscheinungsformen	80
Typologie der Funktionen in diesem Buch	86
Exkurs über harmonische Schwingungen	92
Funktionen von mehreren Variablen	95

2.2	Eigenschaften von Funktionen	106
	Surjektiv, injektiv, bijektiv	106
	Exkurs über unendliche Mengen	107
	Umkehrfunktion	108
	Verknüpfungen von Funktionen	113
	Stetigkeit	115
	Stetigkeit der Rechenoperationen	119
	Zwischenwertsatz	121
2.3	Grenzwerte	126
	Einige Begriffe aus der allgemeinen Topologie	126
	Begriff des Grenzwerts	127
	Uneigentliche Grenzlagen und Grenzwerte	129
	Einseitige Grenzwerte	133
	Substitutionsregel für zusammengesetzte Grenzwerte	135
	Weitere Rechenregeln	136
	Asymptoten	139
2.4	Folgen und Reihen	141
	Folgen als mathematisches Konstruktionswerkzeug	141
	Unendliche Reihen	143
	Absolut konvergente Reihen	145
	Funktionenreihen	149
	Potenzreihen	150
	Rechnen mit Anfangsstücken von Potenzreihen	153
	Die Binomialreihe	155
2.5	Die Exponentialfunktion	160
	Die Funktionalgleichung	160
	Die Logarithmusfunktion	162
	Zwei Standardgrenzwerte	164
	Hyperbolische Funktionen	165
	Die cis-Funktion	168
3	Differentialrechnung	
3.1	Grundbegriffe, Rechenregeln	173
	Die Ableitung, auf neue Art betrachtet	173
	Exkurs über die o -Notation	177
	Geschwindigkeit und Tangentenvektor	178
	Die Ableitungen der elementaren Grundfunktionen	182
3.2	Extrema	185
	Maximum vs. Supremum	185
	Der Satz vom Maximum	187
	Lokale Extremalstellen	189
	Bestimmung der globalen Extrema	191

3.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	196
Verschiedene Varianten des Mittelwertsatzes	196
Grenzwerte nach de l'Hôpital	198
Monotonie und Konvexität	200
3.4 Taylor-Approximation	206
Zur Einführung	206
Konstruktion des Taylor-Polynoms	208
Qualität der Approximation	209
Beispiele und Anwendungen	212
Das Newtonsche Verfahren zur Nullstellenbestimmung	216
Die Taylor-Reihe als Potenzreihe	221
3.5 Differentialgleichungen I	226
Modellbildung, einführende Beispiele	226
Lösungsansatz	231
Differentialgleichungen erster Ordnung, allgemein	233
Ein einfaches numerisches Verfahren	236
Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Dglen	238
3.6 Differentialgleichungen II	243
Homogene lineare Differentialgleichungen, allgemein	243
Die charakteristische Gleichung	246
Mehrfache Eigenwerte	249
Inhomogene lineare Differentialgleichungen	252
Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten	253
Der gedämpfte harmonische Oszillator	256
Eulersche Differentialgleichungen	260
 Sachverzeichnis Kapitel 1–3	 266

Sachverzeichnis Kapitel 1–3

- Abbildung 78
- Abbrechfehler 210
- abgeschlossenes Intervall 24
- abgeschlossene Menge 126
- Ableitung 175, 176
- absolut konvergente Reihe 146
- absoluter Betrag 25
 - — einer komplexen Zahl 68
 - — eines Vektors 45
- abzählbar (unendlich) 107
- allgemeine Potenz 163
- alternierende harmonische Reihe 144
 - Reihe 144
- Amplitude 92
- Anfangsbedingungen 228
- Anfangswertproblem 228, 234
- angreifend (Vektor) 44
- äquivalent (Strecken) 45
- Arcuscosinus 112
- Arcussinus 111
- Arcustangens 112
- Areacosinus 167
- Areasinus 167
- Areatangens 167
- Argument 34
- Asymptote 139
- auf (Abbildung) 106
- Aussage 1
- Aussageform 1
- autonom 239

- Basisvektoren 48
- Bereich konstanter Breite 5
- Bernoulli-de l'Hôpital'sche Regel 198
- Bernoullische Ungleichung 22, 203
- Betrag einer komplexen Zahl 68
 - eines Vektors 46
- Betragsfunktion 25
- Bewegungsgleichung 230

- bijektiv 107
- Bildmenge 79
- Bildpunkt 78
- Binomialkoeffizient 18, 155
- Binomialreihe 155
- Binomischer Lehrsatz 21
- binäre Suche 122
- Bogenlänge 90

- Cassinische Kurven 96
- charakteristische Gleichung 231, 246
- charakteristisches Polynom 231, 244
- cis-Funktion 168
- Coulombfeld 104

- Dämpfungskonstante 258
- Darstellung einer Funktion
 - (durch eine Reihe) 221
- Definitionsbereich 79
- Differentialgleichung 85, 227
 - erster Ordnung 233
 - der harmonischen Schwingung 247
 - mit konstanten Koeffizienten 230, 243, 252
 - zweiter Ordnung 238
- Differentialoperator 244
- differenzierbar 174
- Differenzmenge 13
- direkter Beweis 4
- disjunkt 13
- divergente Folge 141
- Dreiecksungleichung 25
- Dualbruch 28
- Durchschnitt 13

- Eigen-Kreisfrequenz 258
- Eigenwert 231, 246
- eindeutig 106
- Einheitssphäre 48

- Einheitsvektor 48
- Einheitswurzeln 75
- einschaliges Hyperboloid 97
- Einschränkung einer Funktion 111
- Element (einer Menge) 11
- elementare Funktion 82
- entgegengesetzter Vektor 46
- euklidischer Abstand 117
- Eulersche Differentialgleichung 261
- Eulersche Formeln 69, 170
- Exponentialreihe 149
- Extremalstelle 187

- Fakultät 18
- Fibonacci-Folge 158
- Folge 87
- Fortsetzung einer Funktion 87
- Frequenz 92
- Fundamentalsatz der Algebra 7, 75
- Funktion 78
 - von n Variablen 95
- Funktionalgleichung 84
- Funktionentheorie 88
- Funktionsterm 78
- Funktionswert 78

- Gaußsche Zahlenebene 65
- gemeiner Bruch 23
- geographische Breite 41
- geographische Länge 41
- geometrische Reihe 143
- geordnet (Menge, Körper) 23
- geordnetes Paar 13
- gerade Funktion 165
- Geschwindigkeit 178
- gleich (Mengen) 11
- Glieder einer Folge 87
- globale Maximalstelle 186
- globales Maximum (Minimum) 186
- Graph (einer Funktion) 35, 79
- Grenzwert 127, 141

- harmonische Reihe 144
 - Schwingung 92

- Hodograph 171
- homogene lineare
 - Differentialgleichung 230, 243
- hyperbolischer Cosinus 166
- hyperbolische Funktionen 165
- hyperbolisches Paraboloid 98
- hyperbolischer Pythagoras 166
 - Sinus 166
 - Tangens 167
- Hyperboloid 97

- identische Abbildung 114
- imaginäre Achse 65
- Imaginärteil 65
- Implikation 5
- implizit definierte Funktion 83
- Indexgleichung 262
- Indexpolynom 262
- indirekter Beweis 4
- Induktionsschritt 19
- Infimum 185
- inhomogene lineare
 - Differentialgleichung 252
- injektiv 106
- Inklusion 11
- Inkrement 143
- inneres Produkt 51
- innerer Punkt 126
- Integrationskonstante 233
- inverse Abbildung 108
- Isotherme 96

- Jet 209
 - -Extension 239

- Kalkül 1
- kartesisches Produkt 14
- kaskadisch 28
- Kettenregel 179
- Koeffizienten einer Potenzreihe 150
- kompakt 187
- Komplement 126
- komplexe Amplitude 94
 - Analysis 88

- komplexe Ebene 65
 - Zahlen 65
- Komponenten eines Vektors 48, 52
- konjugiert komplex 67
- konkave Funktion 201
- konstituierende Gleichungen 226
- Kontraposition 6
- konvergente Folge 141
 - Reihe 143
- Konvergenzbereich 149
- Konvergenzradius 151
- konvexe Funktion 201
- Koordinaten eines Vektors 45
- Koordinatenfunktionen 89
- Körper 23
- Kreisfrequenz 92
- kritischer Punkt 190
- Kronecker-Delta 53
- kubische Parabel 204
- Kugelkoordinaten 41

- Landausches o -Symbol 177
- Länge eines Vektors 45
- leere Menge 11
- Leibnizsche Formel 207
- Lemniskate 96
- linear unabhängig 56, 244
- lineare Differentialgleichung 230
- linearer Operator 243
- Linearkombination 48, 232
- linksseitige Ableitung 175
- linksseitiger Grenzwert 133
- Lipschitz-Bedingung 115
- lipstetig 115
- logarithmische Spirale 36
- Logarithmusfunktion 162
- lokal maximal (minimal) 189
- lokale Extremalstelle 189
- Lösung einer Differentialgleichung 230

- maximales Element 185
- Menge 11
- Meridianebene 39
- Meridiankurve 39

- Mittelwertsatz der Differentialrechnung 196
- mittlere Geschwindigkeit 178
- modulo 35
- momentane Zuwachsrate 173
- Momentangeschwindigkeit 178
- Momentenbedingung 50
- monoton wachsend 200

- n -Jet 209
- n -te Wurzel 7, 110
- n -tes Taylorsches Approximationspolynom 209
- n -Tupel 14
- natürlicher Logarithmus 162
- Newtonsches Verfahren 216
- nichtorientierter Winkel 33
- Niveaufläche 97
- Niveaulinie 96
- Normierung 48
- Nullvektor 46

- o -Symbol 177
- offenes Intervall 24
- offene Menge 126
- orientierter Winkel 34
- Orthogonaltrajektorie 241
- orthonormiert 63
- Ortsvektor 45

- Paraboloid 98
- Parameterbereich 99
- Parameter 89
- Parameterdarstellung 89
- Partialsomme 143
- partikuläre Lösung 253
- Pascalsches Dreieck 18
- Phase 92
- Polardarstellung 36
- Polarform einer komplexen Zahl 69
- Polarkoordinaten 35
- Polarwinkel 34
- Pol (einer Funktion) 88
- Polygonverfahren 237
- positiver Drehsinn 34
- Potenzreihe 150

- Produktzeichen 18
- Punkt 11
- punktierte Ebene 77

- quadratische Konvergenz 219
- Quadratwurzel 72
- Quantoren 2

- Randpunkt 126
- rationale Funktion 149
 - Zahlen 23
- Realteil 65
- rechte Seite einer
 - Differentialgleichung 233
- rechtsseitige Ableitung 175
- rechtsseitiger Grenzwert 133
- rechtsseitig stetig 133
- Rechtssystem 38
- reelle Achse 65
 - Funktion 87
- Regel von Bernoulli-de l'Hôpital 198
- Reihe 143
- rekursive Definition 21
- Resonanzfall 254
- Resonanzfunktion 259
- Restglied 210
- Reuleaux-Dreieck 5
- Richtungsfeld 234
- Ring 28

- Sattelfläche 98
- Satz von Rolle 196
- schlicht 98
- Schraubenlinie 91
- Schwerpunkt 50
- Schwingungsdauer 93
- separiert (Variable) 40
- Signumfunktion 27
- simulieren 256
- Skalar 47
- Skalarprodukt 52
- Spat 61
- Spatprodukt 61
- Spektrum 246
- Sprungstelle 133
- stationäre Lösung 259

- stationärer Punkt 190
- stetig 117
 - an einer Stelle 116
- Stirlingsche Näherungsformel 18
- streng monoton wachsend 200
- stückweise stetig 133
- Stützgerade 5, 201
- Summationsgrenzen 16
- Summationsvariable 16
- Summe einer Reihe 143
 - von Vektoren 46
- Summenzeichen 16
- summieren einer Reihe 17
- Superposition 95
- Supremum 185
- surjektiv 106
- symmetrische bilineare Funktion 52
- System von n Differentialgleichungen 239

- Tangentialraum 103
- Tangentialvektor 103
- Taylor-Reihe 209
- Taylorsches Approximationspolynom 209
- Teilmenge 11
- teleskopierende Summe 17
- Torus 40
- Transitivität 23
- Trendfunktion 180
- Tripel 14
- Tupel 14

- überabzählbar 107
- Umkehrfunktion 108
- Umkehrung (einer Implikation) 5
- uneigentlicher Grenzwert 131
- uneigentlich konvergent 141
- uneigentlicher Randpunkt 129
- unendliches Intervall 24
- unendliche Reihe 143
- ungerade Funktion 165
- unimodal 125
- Urbild 96

- Vektor 44, 45, 49
Vektorfeld 103
Vektorprodukt 56
Vektorraum 49
vektorwertige Funktion 88
Verankerung 19
Vereinigungsmenge 12
Verfahren von Newton 216
Vergleichskriterium 137
vollständige Induktion 19
- Wendepunkt 203
Wertebereich 79
- Wertetabelle 80
Wertzuwachs 173
Winkel 33
Winkelgeschwindigkeitsvektor 60
Würfelnorm 117
- Zahlfolge 87
Zeiger 94
Zetafunktion 148
Zielbereich 79
zusammengesetzte Abbildung 113
Zwischenwertsatz 121
Zylinderkoordinaten 39

CHRISTIAN BLATTER

INGENIEUR
ANALYSIS

Kapitel 4–6

ETHZ
Studiengänge
Informationstechnologie,
Elektrotechnik und Informatik

Inhaltsverzeichnis Kapitel 4–6

4 Integralrechnung

4.1 Der Integralbegriff	1
Volumenmessung	1
Die Idee des “Integrals”	4
Riemannsche Summen	6
Das Integral als Grenzwert von Riemannschen Summen	10
Geometrische und physikalische Grössen, die sich als Integral auffassen lassen	14
4.2 Hauptsätze	27
Grundeigenschaften des Integrals, Mittelwertsatz	27
Das Integral als Funktion der oberen Grenze	28
Stammfunktionen	31
4.3 Technik des Integrierens	36
Grundformeln	36
Partielle Integration	38
Substitution	42
Integration der rationalen Funktionen	47
Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen	56
* Anwendung: Das arithmetisch-geometrische Mittel	62
4.4 Uneigentliche Integrale	68
Problemstellung	68
Zwei einfache Konvergenzkriterien	70
Anwendung: Die Gammafunktion	74
4.5 Mehrfache Integrale	77
Den Kuchen in Scheiben schneiden	77
Integrale über allgemeine ebene Bereiche	81
Integrale über räumliche Bereiche	85
Integration in Polarkoordinaten	90
Integration in Kugelkoordinaten	96
4.6 Differentialgleichungen III	103
Weiteres zur allgemeinen Theorie	103
Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	106
Randwertprobleme	112
Separierbare Differentialgleichungen	114
Weitere Beispiele	118

5 Mehrdimensionale Differentialrechnung

5.1 Grundbegriffe	128
* Komplex-eindimensionale Differentialrechnung	129
Richtungsableitung und partielle Ableitungen	132
Lineare Approximation des Wertzuwachses	140
Tangenten und Tangentialebenen	143
Der Gradient	145
Die verallgemeinerte Kettenregel	148
Differentiation unter dem Integralzeichen	151
5.2 Höhere Ableitungen, Taylorsche Formel	155
Funktionen der Klasse C^r	155
Taylor-Entwicklung bei zwei Variablen	157
Analyse von kritischen Punkten	160
5.3 Implizite Funktionen	167
Problemstellung	167
Hauptsatz, mit Formel für die Ableitung	169
Anwendung: Niveaulinien und Niveauflächen	174
5.4 Die Funktionalmatrix	181
Auf der Suche nach dem definitiven Ableitungsbegriff	181
Die Funktionalmatrix	184
Rang und Regularität, Jacobische Determinante	188
Variablentransformation bei mehrfachen Integralen	191
5.5 Extrema	196
1. Lektion: Kritische Punkte	196
Der Suchalgorithmus für globale Extrema	199
Bedingt kritische Punkte, geometrisch betrachtet	205
Die Methode von Lagrange	207
Zwei Beispiele	211
5.6 * Kurvenscharen in der Ebene	217
Reguläre und singuläre Scharelemente	217
Lösungsscharen von Differentialgleichungen	221
Orthogonaltrajektorien	224
Enveloppen	228
Geradenscharen	231

6 Vektoranalysis

6.1 Vektorfelder, Linienintegrale	237
Verschiedene Arten von Feldern	237
Beispiele	239
Feldlinien	243
Begriff des Linienintegrals	245

1-Ketten	249
Konservative Felder	251
Konservative Vektorfelder besitzen ein Potential	253
Differentialformen	255
6.2 Die Greensche Formel für ebene Bereiche	258
Was ist ein “Integralsatz”?	258
Die Greensche Formel	259
Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder in der Ebene	264
Das Gradientenfeld des Arguments (Polarwinkels)	267
Strömungsfelder in der Ebene, Begriff des Flusses	269
Divergenz und der Satz von Gauß in der Ebene	275
6.3 Der Satz von Gauß	280
Zur Theorie der Flächen im Raum	280
Berechnung des Flächeninhalts	284
Fluß eines Vektorfelds durch eine Fläche	287
Divergenz und der Satz von Gauß im Raum	290
Anwendung: Die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik	295
Die Wärmeleitungsgleichung	296
Geometrische Erklärung des Laplace-Operators	300
6.4 Der Satz von Stokes	305
Der Randzyklus einer orientierten Fläche	305
Von der Greenschen Formel zum Satz von Stokes	309
Geometrische Erklärung der Rotation	311
Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder im Raum	317
 Sachverzeichnis Kapitel 4–6	 323

Sachverzeichnis Kapitel 4–6

- Ableitung 130, 186
- Additivität (Maß) 2
- Additivität (Integral) 5
- AGM 63
- analytische Funktion 131
- anheften (eines Vektors) 237
- Arbeitsintegral 246
- arithmetisch-geometrisches Mittel 63
- Astroide 195, 235
- aufintegrieren 29
- Ausschöpfung 69

- bedingt kritischer Punkt 200, 206
- bedingte Maximalstelle 205
- bedingtes Maximum 205
- bestimmtes Integral 33
- Bewegungsinvarianz 2

- C^1 -Funktion 140
- C^r -Vektorfeld 239
- Clairautsche Differentialgleichung 233
- Coulombfeld 242

- Delta-Operator 299
- Descartessche Blatt 167
- Differential 186
- Differentialform 256
- Differentialoperator 245
- n -dimensionales Maß 1
- n -dimensionale Nullmenge 3
- divergent 69
- Divergenz 275, 290
- Divergenzsatz 275, 291
- Durchmesser 6

- Eigenfunktion 114
- Eigenwert 113
- x -einfacher Bereich 81, 85
- einfach zusammenhängend 264

- einparametrische Kurvenschar 217
- Envelope 229
- Epizykloide 278
- Extremalaufgabe mit Nebenbedingungen 205

- Falllinie 235
- fast überall stetig 13
- fast disjunkt 4
- Feld 237
- Feldlinie 243
- Flächenfunktion 29
- Flächenformeln 262
- Flächeninhalt 285
- Flächennormale 284
- Fluß 271, 272, 288
- 1-Form 256
- x -freie Differentialgleichung 118
- Funktionaldeterminante 190
- Funktionalmatrix 184

- Gammafunktion 74
- geschlossene Fläche 307
- globales Extremum 196
- Gradient 145
- Gradientenfeld 241
- Greensche Formel 259
- Grenzkosten 165

- Hüllkurve 229
- harmonisch 304
- harmonische Funktion 302
- Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 30, 32
- Hauptteil 52
- Hessesche Form 160
- holomorphe Funktion 131
- homogene lineare Differentialgleichung 107, 111
- homogene Differentialgleichung 121

- homogenes Vektorfeld 242
- implizite Funktionen 169
- indefinit 162
- Integrabilitätsbedingung 264, 317
- Integral mit einem Parameter 74
- Integralsatz 258
- Integration 103
- Jacobische Determinante 190
- Jacobische Matrix 184
- N -Jet 159
- Kette 249
- 2-Kette 288
- Kettenlinie 34
- Kettenregel 149
- Klasse C^r 155
- komplex differenzierbar 130
- konservativ 251
- Kontinuitätsgleichung 296
- konvergent (uneigentl. Integral) 69
- Korn 6
- kritischer Punkt 160
- Kuchen 5
- Kurvenschar 217
- Länge einer Kurve 25
- Lagrangescher Multiplikator 211
- Lagrangesche Prinzipalfunktion 211
- Laplace-Operator 299, 300
- Lebesgue-Maß 1
- Leibnizsche Regel 151
- Leibnizsche Regel "mit Extras" 153
- lineare Differentialgleichung
 - erster Ordnung 106
- Linearität (Integral) 5
- u -Linie 281
- Linienelement 25
- Linienintegral 246
- Maß 1
- Mittelwertsatz der Integralrechnung 27
- Monotonie (Maß) 2
- Nebenbedingungen 205
- Neilsche Parabel 189
- nichtentartet 161
- Niveaufläche 176
- Niveaulinie 174
- Norm 215
- Normale 207
- Normalenableitung 298
- Normaleneinheitsvektor 284
- Nullmenge 3
- Oberfläche 291
- Oberflächenelement 285, 288
- orientieren 287
- Orthogonaltrajektorie 224
- Partialbruchzerlegung 48, 50
- partielle Ableitung 136, 137
- partielle Funktion 137
- partielle Integration 38
- positiv definit 162
- Potential 242, 252
- Potentialfeld 252
- Potentialgleichung 300
- Pullback 91
- punktierte Ebene 137
- quadratische Ergänzung 58
- Quadratur 103
- Quellstärke 275, 290
- Randbedingung 112
- Randwertproblem 112
- Randzyklus 258, 307
- regulär 219, 242, 281
- regulärer Punkt 160, 188
- Richtungsableitung 134
- Riemannsches Integral 11
- Rotation 310
- Satz über die (lokale) Umkehrabbildung 190
- Satz über implizite Funktionen 169
- Satz von Gauß 275, 291
- Satz von Stokes 311

- Scharelement 217
- Scharparameter 217
- schlicht 224
- separierbare Differentialgleichung 114
- Simplex 208
- singuläre Lösung 233
- singulärer Punkt 242
- singuläres Scharelement zweiter Art 228
- Singularität 219
- Skalarfeld 237
- skalares Oberflächenelement 285
- stückweise glatte Kurve 249
- Stammfunktion 31
- stationär 296
- stationärer Punkt 160
- stetig differenzierbar 140
- Substitution 42

- Tangentialebene 143
- Taylorisches Approximationspolynom 159
- totales Differential 256
- Trägheitsmoment 20, 21
- transversal 210

- u -Linie 281
- unbestimmt integrieren 36
- unbestimmtes Integral 31
- uneigentliches Integral 69

- Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel 209

- v -Linie 281
- Variation der Konstanten 109
- Vektorfeld 237
- C^r -Vektorfeld 239
- vektorielles Linienelement 247
- vektorielles Oberflächenelement 288
- verallgemeinerte Kettenregel 149
- Volumen 1
- Volumenelement 11

- Wärmefluß 297
- Wärmeleitungsgleichung 300
- Wärmeleitzahl 297
- Wallissches Produkt 41
- Wellengleichung 165
- Wirbeldichte 313
- wirbelfrei 304, 313

- x -freie Differentialgleichung 118

- Zentralfeld 242
- Zirkulation 305
- zusammenhängend 253
- Zykloide 263
- Zyklus 258
- 2-Zyklus 291