

6

Vektoranalysis

6.1 Vektorfelder, Linienintegrale

Verschiedene Arten von Feldern

Alles, was folgt, spielt sich in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum ab; mit \mathbb{R}^n ist also immer \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 gemeint.

Ein **Feld** ist eine skalar- oder vektorwertige Funktion im \mathbb{R}^n , die aber nicht als Abbildung irgendwohin, geschweige denn als Graph interpretiert wird. Vielmehr stellt man sich vor, daß der Funktionswert $f(\mathbf{x})$ oder $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ direkt am jeweiligen Punkt \mathbf{x} angeschrieben oder angeheftet ist. Handelt es sich dabei um eine zahlenwertige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so spricht man von einem **Skalarfeld**. Typische Beispiele sind Temperatur- oder Druckverteilungen, das Potential eines elektrostatischen Feldes, die Ladungsdichte einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Ein Skalarfeld wird am besten mit Hilfe von Niveaulinien bzw. Niveauflächen (Isothermen, Isobaren, Äquipotentialflächen usw.) visualisiert.

Nun zu den Vektorfeldern. — Jeder Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ besitzt einen Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$; das ist eine Kopie des \mathbb{R}^n mit Ursprung an der Stelle \mathbf{x} des Grundraums (Fig. 6.1.1, siehe auch die Fig. 5.4.1). Eine Vorschrift $\mathbf{K}(\cdot)$, die für jeden Punkt \mathbf{x} eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einen Vektor

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$$

definiert, heißt ein **Vektorfeld** auf Ω (Fig. 6.1.2). Man sagt, der Vektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ sei im Punkt \mathbf{x} **angeheftet**. Typische Beispiele für Vektorfelder sind die Felder der Elektrostatik und -dynamik, das Gravitationsfeld eines Himmelskörpers,

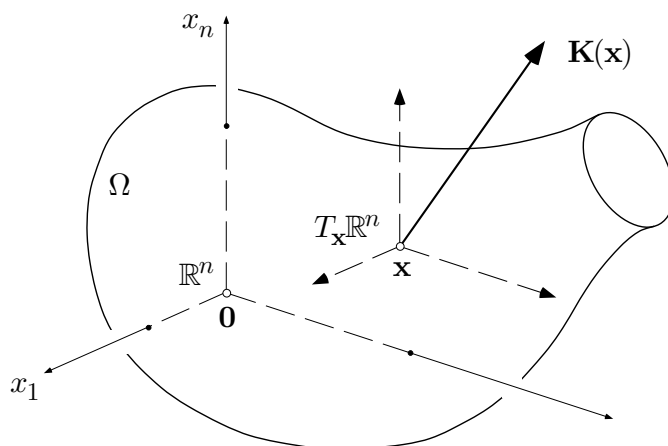


Fig. 6.1.1

das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, die Massenstromdichte eines Gases (Bewegungen der Atmosphäre!), das Gradientenfeld eines Skalarfelds (s.u.).

Für Vektorfelder verwenden wir im allgemeinen große halbfette lateinische Buchstaben, zum Beispiel \mathbf{K} , wenn wir eher an ein Kraftfeld denken, und kleine halbfette Buchstaben, zum Beispiel \mathbf{v} , wenn wir eher an ein Strömungsfeld denken. In Wirklichkeit besteht zwischen diesen beiden Arten von Feldern ein subtiler mathematischer Unterschied: Kraftfelder werden längs (1-dimensionalen) Kurven integriert; das Resultat stellt geleistete Arbeit, eventuell eine Potentialdifferenz dar. Strömungsfelder werden über $(n - 1)$ -dimensionale Flächenstücke integriert; der Wert des Integrals ist die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die betreffende Fläche strömt.

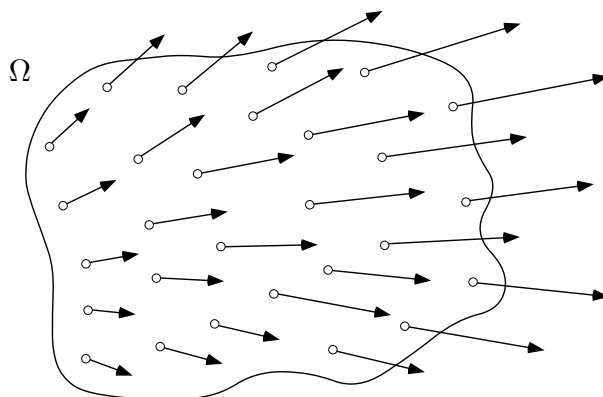


Fig. 6.1.2

Ein Vektorfeld in der Ebene (Fig. 6.1.3) hat zwei Koordinaten:

$$\mathbf{K}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = (K_1(x_1, x_2), K_2(x_1, x_2)),$$

ein Vektorfeld im Raum deren drei:

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

bzw.

$$\mathbf{K}(x_1, x_2, x_3) = (K_1(x_1, x_2, x_3), K_2(x_1, x_2, x_3), K_3(x_1, x_2, x_3)) .$$

Die einzelnen Koordinaten $P(\cdot), \dots, K_i(\cdot)$ sind reellwertige Funktionen von zwei oder drei Variablen. \mathbf{K} ist ein C^r -Vektorfeld, wenn seine Koordinaten r -mal stetig differenzierbar sind.

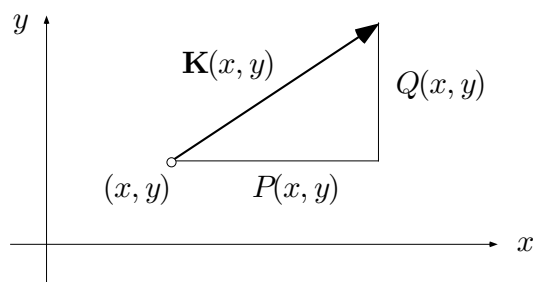


Fig. 6.1.3

Beispiele

① Wir betrachten das Gravitationsfeld der Erde, innerhalb und außerhalb, wobei wir natürlich eine konstante Dichte zugrundelegen. Es seien R der Erdradius, g die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche und m eine Probemasse an der Stelle $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $|\mathbf{r}| =: r$. Wie wir in Beispiel 4.5.⑨ gesehen haben, wird die Probemasse überall gerade so stark angezogen, wie wenn die gesamte weiter innen liegende Erdmasse in $\mathbf{0}$ konzentriert wäre. Somit hat die Anziehungskraft \mathbf{K} für $r \leq R$ den Betrag

$$K(r) = C \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \frac{1}{r^2}$$

mit einer geeigneten Konstanten C , und wegen $K(R) = mg$ folgt

$$K(r) = mg \frac{r}{R} \quad (0 \leq r \leq R)$$

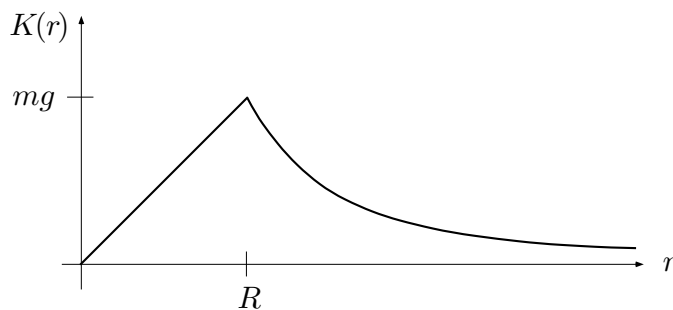


Fig. 6.1.4

(Fig. 6.1.4). Ist $r \geq R$, so ist unabhängig von r die ganze Erdmasse wirksam. Für diese r gilt daher

$$K(r) = C' \cdot \frac{1}{r^2}$$

mit einem geeigneten C' , und durch Eichung an der Erdoberfläche ergibt sich

$$K(r) = mg \frac{R^2}{r^2} \quad (r \geq R) .$$

Die Anziehungskraft \mathbf{K} ist stets auf den Ursprung hin gerichtet. An der Stelle \mathbf{r} wird diese Richtung repräsentiert durch den Einheitsvektor $\mathbf{e} := -\mathbf{r}/r$ (Fig. 6.1.5). Damit erhalten wir

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -K(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{cases} -\frac{mgr}{R} \frac{\mathbf{r}}{r} & (0 \leq r \leq R) , \\ -\frac{mgR^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} & (r \geq R) \end{cases}$$

bzw. in Koordinaten:

$$\mathbf{K}(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{mgr}{R} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) & (0 \leq r \leq R) , \\ -\frac{mgR^2}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) & (r \geq R) . \end{cases}$$

○

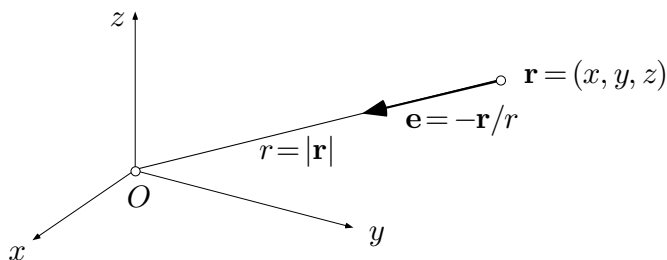


Fig. 6.1.5

② Es sei \mathbf{e} ein im Ursprung des \mathbb{R}^3 angehefteter Einheitsvektor. Rotiert der “Weltäther” mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse \mathbf{e} , so entsteht ein Strömungsfeld \mathbf{v} , und zwar ist $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ nach Beispiel 1.6.⑧ gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{e} \times \mathbf{x} = \vec{\omega} \times \mathbf{x},$$

wobei $\vec{\omega} := \omega \mathbf{e}$ den Winkelgeschwindigkeitsvektor bezeichnet (Fig. 6.1.6). In Koordinaten ausgeschrieben sieht das folgendermaßen aus:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1).$$

Die einzelnen Koordinatenfunktionen von \mathbf{v} sind also lineare Funktionen von x_1, x_2, x_3 ($\vec{\omega}$ ist fest). ○

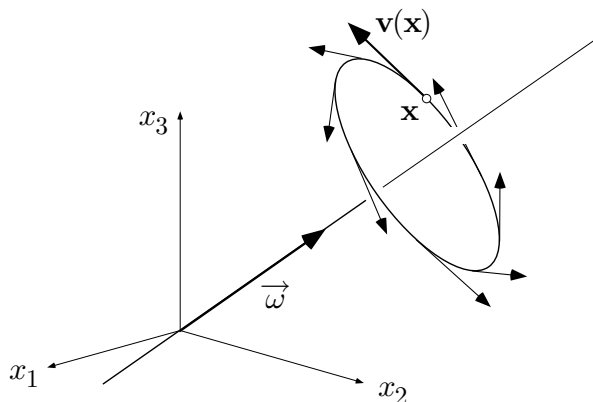


Fig. 6.1.6

Ist f ein C^1 -Skalarfeld im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so ist in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ der Gradient $\nabla f(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ erklärt. Somit ist

$$\nabla f = (f_{,1}, \dots, f_{,n})$$

(bzw. $= (f_x, f_y)$ oder $= (f_x, f_y, f_z)$) ein Vektorfeld auf Ω , das sogenannte **Gradientenfeld** von f . Die Feldvektoren stehen überall senkrecht auf den Niveaulinien (Niveauflächen) von f . Viele Vektorfelder \mathbf{K} lassen sich als Gradientenfeld eines geeigneten f auffassen, aber nicht alle.

③ Das im punktierten Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definierte Vektorfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) := \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0}),$$

C eine positive oder negative Konstante, heißt **Coulombfeld**. Die von Punktladungen im Ursprung erzeugten elektrischen Felder sowie das Gravitationsfeld einer Punktmasse sind von diesem Typ. Das Coulombfeld kann als Gradientenfeld eines Skalarfeldes aufgefaßt werden, und zwar des Feldes

$$f(\mathbf{r}) := -\frac{C}{r} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0}).$$

(Wie man darauf kommt, werden wir später sehen.) — Zum Beweis setzen wir $-C/r =: \phi(r)$; dann gilt nach der Kettenregel und 5.1.(6):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{x}{r};$$

analog für die übrigen Variablen. Es ergibt sich

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{C}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{K}(\mathbf{r}),$$

wie behauptet. — Man nennt f ein **Potential** des Feldes \mathbf{K} . ○

Allgemein: Ein in allen Punkten $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ definiertes Feld \mathbf{K} , das eine Darstellung der Form

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = K(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

zuläßt, heißt ein **Zentralfeld**. Die Feldvektoren $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ zeigen in allen Punkten \mathbf{r} zum Ursprung oder in die dazu entgegengesetzte Richtung, und ihr Betrag $|\mathbf{K}(\cdot)| =: K(\cdot)$ hängt nur von $r := |\mathbf{r}|$ ab.

Ferner: Ist $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{K}_0$, so nennt man \mathbf{K} ein **homogenes Vektorfeld**. Das Erdfeld in einem Labor oder das elektrische Feld zwischen den Platten eines Plattenkondensators werden als homogen angesehen.

Die Nullstellen eines Vektorfeldes \mathbf{v} heißen **singuläre Punkte** von \mathbf{v} ; sie liegen im allgemeinen isoliert. Alle übrigen Punkte heißen **regulär**.

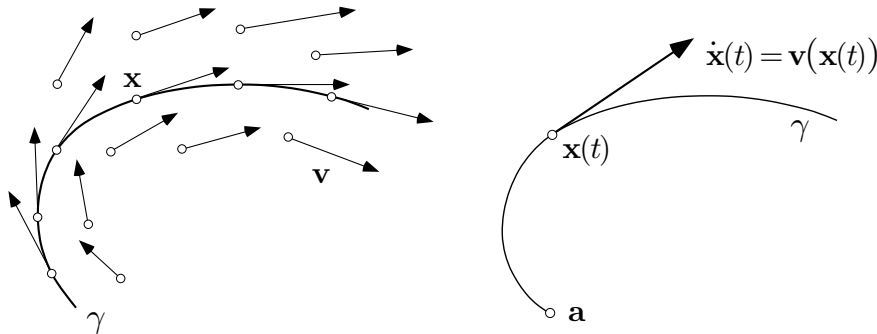


Fig. 6.1.7

Feldlinien

Es sei \mathbf{v} ein Vektorfeld in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine Kurve γ in Ω , deren Tangente in jedem Punkt zum dort angehefteten Feldvektor parallel ist (Fig. 6.1.7, links), heißt eine **Feldlinie** von \mathbf{v} . Wie wir gleich sehen werden, geht durch jeden regulären Punkt \mathbf{x} des Feldes \mathbf{v} genau eine Feldlinie. In den Beispielen ①–③ und bei einem homogenen Feld ist unmittelbar evident, welches die Feldlinien sind. Die Feldlinien eines Gradientenfeldes ∇f sind die Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien (Niveaulächen) von f (Fig. 6.1.8). Beim Übergang vom Vektorfeld zu den Feldlinien geht die Information über Betrag und “Vorzeichen” der Feldvektoren verloren.

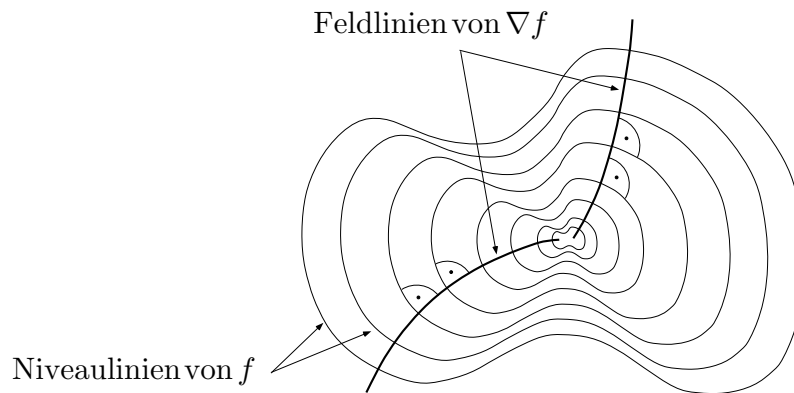


Fig. 6.1.8

Die Feldlinien γ eines Vektorfeldes \mathbf{v} besitzen eine natürliche Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) . \quad (1)$$

Wir verlangen dabei, daß der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ jederzeit *gleich* dem (und nicht nur parallel zum) Feldvektor an der Stelle $\mathbf{x}(t)$ ist, in Formeln:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$$

(Fig. 6.1.7, rechts). Diese Identität läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die Funktion (1) ist Lösung der (t -freien) Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) . \quad (2)$$

In Koordinaten ausgeschrieben wird daraus ein System

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= v_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\}$$

von n (hier: 3) Differentialgleichungen für n unbekannte Funktionen $t \mapsto x_i(t)$. Der Satz über die Existenz von Lösungen eines derartigen Systems garantiert, daß zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (3)$$

genau eine Lösung $\mathbf{x}(\cdot)$ von (2) existiert, und zwar ist $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ tatsächlich eine Kurve, falls \mathbf{a} ein regulärer Punkt von \mathbf{v} ist. (Ist $\mathbf{v}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, so lautet die Lösung des Anfangswertproblems (2)^(3) einfach $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{a}$.)

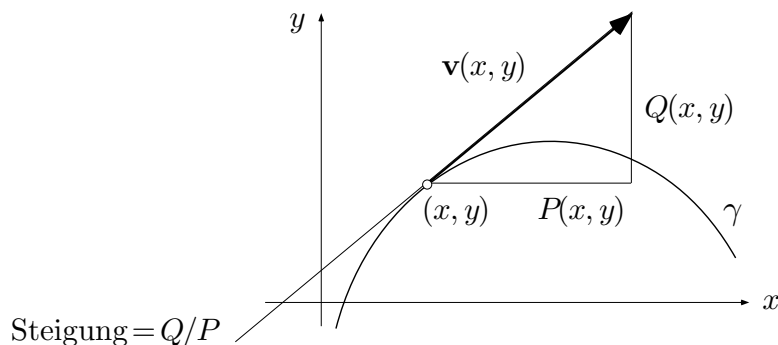


Fig. 6.1.9

Die Feldlinien eines *ebenen* Vektorfeldes $\mathbf{v} = (P, Q)$ lassen sich schon mit Hilfe einer einzigen Differentialgleichung bestimmen, wobei allerdings der “natürliche” Parameter t gar nicht ins Spiel kommt. Wie man der Figur 6.1.9 entnimmt, ist nämlich die Steigung y' der durch den Punkt (x, y) gehenden Feldlinie gegeben durch

$$y' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Das ist auch schon die angesagte Differentialgleichung.

④ Die Feldlinien des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y) := \left(\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

(Fig. 6.1.10) vom konstanten Betrag $|\mathbf{v}(x, y)| \equiv \sqrt{2}$ genügen der homogenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

jedenfalls abseits der Winkelhalbierenden $x = y$. Wie wir in Beispiel 4.6.⑨ gesehen haben, sind die Lösungskurven dieser Differentialgleichung die logarithmischen Spiralen

$$r(\phi) = C e^{\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

(Polarkoordinaten). Die “natürliche” Parameterdarstellung würde diese Spiralen mit konstanter Absolutgeschwindigkeit $\sqrt{2}$ abfahren. ○

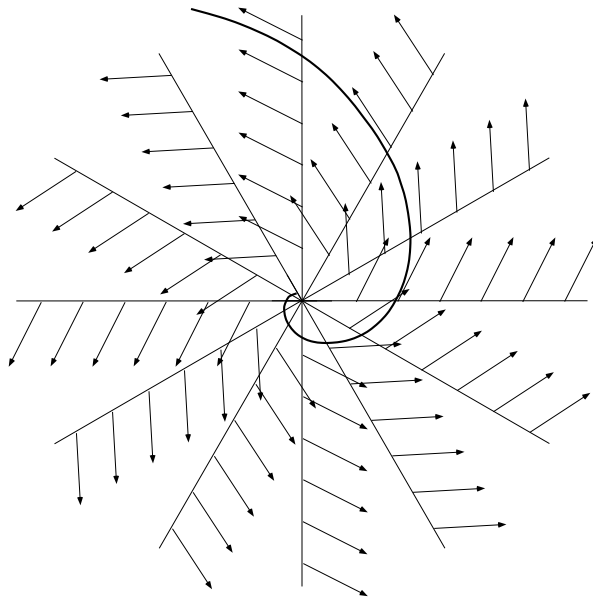


Fig. 6.1.10

Begriff des Linienintegrals

Die Vektoranalysis handelt von den Möglichkeiten und Wirkungen des Differenzierens und Integrierens im Zusammenhang mit Skalar- und Vektorfeldern. Ein Beispiel dafür haben wir schon kennengelernt: Der “Operator” ∇ liefert zu jedem Skalarfeld f ein Vektorfeld ∇f , das mit f in einem bestimmten geometrisch oder physikalisch interpretierbaren Zusammenhang steht. Weitere derartige **Differentialoperatoren** (div , rot , Δ) werden wir in den folgenden Abschnitten einführen und beschreiben.

An dieser Stelle behandeln wir eine Weise zu integrieren, die in gewissem Sinn die Gradientenbildung rückgängig macht (vgl. den Satz (6.1)!). Es geht um den Begriff des Linienintegrals.

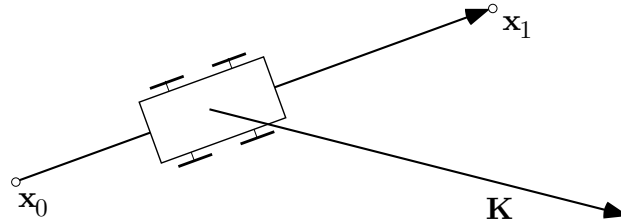


Fig. 6.1.11

Schiebt ein homogenes Kraftfeld \mathbf{K} ein Wägelchen auf gerader Bahn von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_1 (Fig. 6.1.11), so leistet es dabei bekanntlich die Arbeit

$$W = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) .$$

Wir betrachten jetzt ein variables Kraftfeld \mathbf{K} , und anstelle der geraden Bahn sei eine glatte Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

gegeben. Es sei weiter

$$\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

eine hinreichend feine Teilung des Intervalls $[a, b]$ und $\mathbf{x}(t_k) =: \mathbf{x}_k$. Schiebt jetzt das Kraftfeld \mathbf{K} unser Wägelchen längs der Kurve γ von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_N (Fig. 6.1.12), so können wir die dabei geleistete Arbeit folgendermaßen veranschlagen:

$$\begin{aligned} W &\doteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}(t_k)) \cdot \mathbf{x}'(t_k) (t_{k+1} - t_k) \\ &\doteq \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt . \end{aligned}$$

Aufgrund dieser physikalischen Betrachtungen nennt man das Integral

$$\int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \tag{4}$$

das **Linienintegral** oder **Arbeitsintegral** von \mathbf{K} längs γ und bezeichnet es in suggestiver Weise mit

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

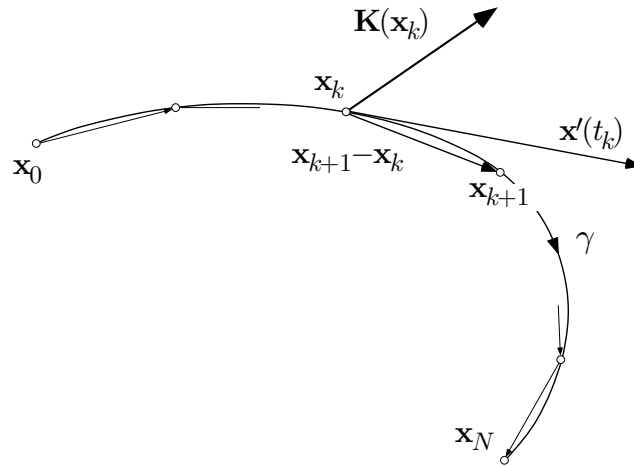


Fig. 6.1.12

Für die konkrete Berechnung hat man die Parameterdarstellung von γ ins Vektorfeld \mathbf{K} einzusetzen und das **vektorielle Linienelement** $d\mathbf{x}$ ebenfalls durch t auszudrücken:

$$d\mathbf{x} := \mathbf{x}'(t)dt .$$

In Koordinaten sieht das folgendermaßen aus: Es seien

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

ein Vektorfeld und

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

eine Kurve im \mathbb{R}^3 . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (P, Q, R) \cdot (x', y', z') dt \\ &= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(\dots)y'(t) + R(\dots)z'(t) \right) dt . \end{aligned}$$

Für ein Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q)$ und eine Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

in der Ebene gilt analog

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_a^b \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt .$$

Im Hinblick auf die rechte Seite dieser Gleichung verwendet man anstelle von

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$$

häufig die Schreibweise

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy),$$

wobei die Differentiale dx und dy *at runtime* durch $x'(t)dt$ und $y'(t)dt$ zu ersetzen sind.

Der Wert eines Linienintegrals hängt nicht von der für γ gewählten Parameterdarstellung ab, wohl aber von der Richtung, in der γ durchlaufen wird. Bezeichnet $-\gamma$ "die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve γ ", so gilt

$$\int_{-\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}.$$

Diese Dinge leuchten aufgrund der physikalischen Interpretation ohne weiteres ein.

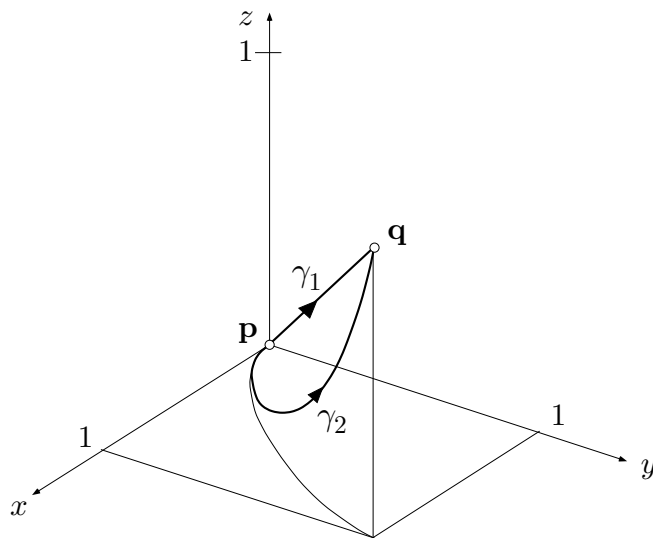


Fig. 6.1.13

⑤ Wir betrachten im (x, y, z) -Raum das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (y^2, xz, 1),$$

ferner die zwei Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{cases} x(t) := t \\ y(t) := t \\ z(t) := t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \gamma_2 : t \mapsto \begin{cases} x(t) := t \\ y(t) := t^2 \\ z(t) := t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(Fig. 6.1.13), die beide den Punkt $\mathbf{p} := (0, 0, 0)$ mit dem Punkt $\mathbf{q} := (1, 1, 1)$ verbinden. Für die Linienintegrale von \mathbf{K} längs γ_1 und längs γ_2 erhalten wir

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (y^2(t)x'(t) + x(t)z(t)y'(t) + 1 \cdot z'(t)) dt ;$$

dabei sind rechter Hand die Parameterdarstellungen der γ_i einzusetzen. Es ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + t^4 \cdot 2t + 1 \cdot 3t^2) dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{3} = \frac{23}{15}.$$

Zu verschiedenen Verbindungen derselben zwei Punkte \mathbf{p} und \mathbf{q} können also durchaus verschiedene Werte des Linienintegrals gehören. \circ

1-Ketten

Wir haben in der Definition (4) des Linienintegrals vorausgesetzt, daß die Kurve γ glatt ist oder jedenfalls eine C^1 -Parameterdarstellung besitzt. Wir können aber diese Definition ausdehnen auf beliebige “formale Summen”

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$$

von glatten Kurven γ_i , indem wir das Linienintegral längs einer derartigen **Kette** γ definieren durch

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} := \int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \dots + \int_{\gamma_r} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}.$$

Unter die Ketten fallen insbesondere die glatten Kurven “mit Ecken”, auch **stückweise glatte Kurven** genannt (Fig. 6.1.14, links). Eine Kette kann aber auch aus mehreren getrennten Stücken bestehen. Zum Beispiel besitzt der Kreisring B rechts in Fig. 6.1.14 den Randzyklus (s.u.) $\partial B = \gamma_b - \gamma_a$.

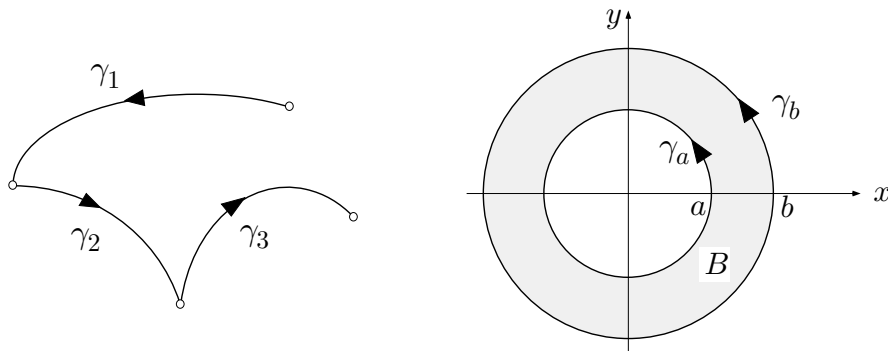


Fig. 6.1.14

⑥ Es sei $\partial B := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ der im Gegenuhreigersinn durchlaufene Rand des Quadrats $B := [0, 1]^2$ in der (x, y) -Ebene (Fig. 6.1.15) und

$$(P(x, y), Q(x, y)) := (x^3 + xy^2, x^2y - y^5)$$

ein Vektorfeld. Es soll das Integral

$$W := \int_{\partial B} (Pdx + Qdy)$$

berechnet werden. — Wir setzen zur Abkürzung

$$\int_{\gamma_i} (Pdx + Qdy) =: W_i \quad (1 \leq i \leq 4);$$

dann ist (definitionsgemäß)

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 .$$

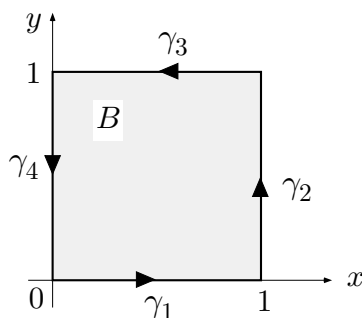


Fig. 6.1.15

Für γ_1 können wir x als Parameter nehmen, und y ist $\equiv 0$. Dann ist x auch Integrationsvariable, und es ist $x'(x) \equiv 1$, $y'(x) \equiv 0$. Wir erhalten somit

$$W_1 = \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_0^1 P(x, 0) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} .$$

Für γ_2 können wir y als Parameter nehmen, und x ist $\equiv 1$. Folglich wird y Integrationsvariable, und es ist $x'(y) \equiv 0$, $y'(y) \equiv 1$. Damit erhalten wir

$$W_2 = \int_0^1 Q(1, y) dy = \int_0^1 (y - y^5) dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} .$$

Die Teilstücke γ_3 und γ_4 durchlaufen wir lieber in umgekehrter Richtung, wobei allerdings die Vorzeichen richtigzustellen sind. Es ergibt sich

$$W_3 = - \int_0^1 P(x, 1) dx = \int_1^0 (x^3 + x) dx = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4},$$

$$W_4 = - \int_0^1 Q(0, y) dy = \int_0^1 y^5 dy = \frac{1}{6}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$W = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = 0.$$

Wie wir noch sehen werden, ist dieses Ergebnis kein Zufall. In Wirklichkeit ist das Linienintegral dieses Feldes für jeden geschlossenen Weg gleich 0.

○

Konservative Felder

Wir haben in Beispiel ⑤ gesehen, daß das Linienintegral eines Vektorfeldes längs verschiedenen Kurven von \mathbf{p} nach \mathbf{q} verschiedene Werte annehmen kann. Ein Vektorfeld \mathbf{K} heißt **konservativ**, wenn dieses Phänomen *nicht* auftritt, in anderen Worten: wenn der folgende Sachverhalt zutrifft:

(a) Für je zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 \subset \text{dom}(\mathbf{K})$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten gilt:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Dies ist äquivalent mit dem folgenden: Das Feld \mathbf{K} ist **konservativ**, wenn

(b) für alle geschlossenen Kurven $\gamma \subset \text{dom}(\mathbf{K})$ gilt:

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (6)$$

□ (a) \Rightarrow (b): Es sei γ eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt \mathbf{p} . Die Kurve γ verbindet die gleichen Punkte miteinander wie die “konstante Kurve” γ_* in \mathbf{p} . Das Integral längs γ_* ist aber trivialerweise = 0. Mit (a) folgt daher (6), und da γ beliebig war, (b).

(b) \Rightarrow (a): Laufen γ_1 und γ_2 beide von \mathbf{p} nach \mathbf{q} , so ist die Kette $\gamma_1 - \gamma_2$ eine geschlossene Kurve γ (Fig. 6.1.16), und mit (b) folgt (5). Da $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \gamma_1, \gamma_2$ beliebig waren, ist damit (a) erwiesen. □

Der Name “konservativ” steht mit physikalischen Vorstellungen in Zusammenhang: Für die Bewegung in derartigen Feldern gilt der Satz von der Erhaltung der Energie. Wir beweisen:

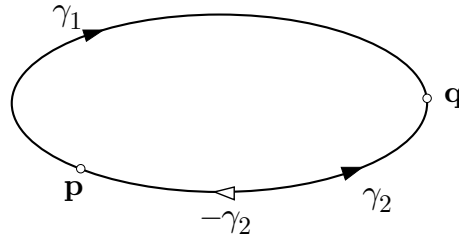


Fig. 6.1.16

(6.1) (a) *Gradientenfelder sind konservativ.*

(b) *Ist $\mathbf{K} = \nabla f$, so gilt für alle von \mathbf{p} nach \mathbf{q} laufenden Kurven γ :*

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) . \quad (7)$$

Ist $\mathbf{K} = \nabla f$ für ein geeignetes f , so nennt man f ein **Potential** des Feldes \mathbf{K} ; ein Gradientenfeld wird daher auch als **Potentialfeld** bezeichnet. Die Behauptung (b) besagt: Bei einem Potentialfeld ist das Linienintegral längs einer beliebigen Kurve gleich der Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve. Die eindimensionale Version von (7) ist die vertraute Formel

$$\int_p^q f'(t) dt = f(q) - f(p) .$$

□ Es genügt, (b) zu beweisen, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß γ eine C^1 -Parameterdarstellung

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

besitzt; dabei ist $\mathbf{x}(a) = \mathbf{p}$, $\mathbf{x}(b) = \mathbf{q}$ (Fig 6.1.17). Für die Hilfsfunktion

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}(t))$$

gilt nach der Kettenregel (5.3):

$$\phi'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) .$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt = \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a) \\ &= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad \square$$

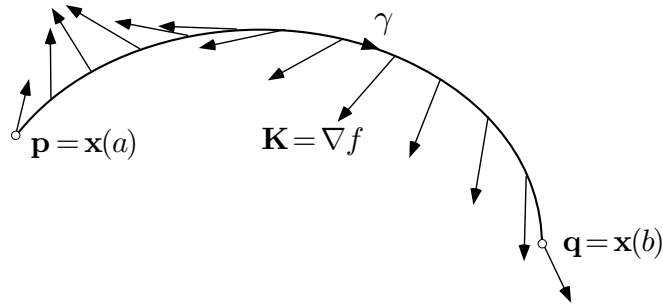


Fig. 6.1.17

⑥ (Forts.) Wie man sofort verifiziert, ist (P, Q) das Gradientenfeld der Funktion

$$f(x, y) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^6}{6},$$

also konservativ. Folglich ist das Linienintegral dieses Feldes längs beliebigen geschlossenen Kurven, insbesondere längs ∂B , gleich 0. Ferner gilt zum Beispiel

$$\int_{\gamma_3} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma_3} \nabla f \cdot d\mathbf{z} = f(0, 1) - f(1, 1) = -\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{3}{4}.$$

○

Konservative Vektorfelder besitzen ein Potential

Von Satz (6.1)(a) gilt nun auch die Umkehrung (Satz (6.2)(a)); somit sind konservative Felder und Gradientenfelder in Wirklichkeit ein und dasselbe. Im zweiten Teil von (6.2) wird angenommen, daß der Definitionsbereich Ω des betrachteten Feldes \mathbf{K} **zusammenhängend** ist, das heißt: daß sich je zwei Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$ tatsächlich durch eine in Ω gelegene Kurve miteinander verbinden lassen.

(6.2) (a) *Konservative Vektorfelder besitzen ein Potential.*

(b) *Es sei \mathbf{K} ein konservatives Vektorfeld auf dem zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und \mathbf{p}_0 ein beliebiger, aber fester Punkt von Ω . Dann ist*

$$f(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \quad (8)$$

ein Potential von \mathbf{K} ; dabei bezeichnet $\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}}$ das Integral längs irgendeiner in Ω gelegenen Kurve von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p} . Zweitens gilt: Die sämtlichen Potentiale von \mathbf{K} auf Ω sind die Funktionen $f + \text{const.}$.

□ Es genügt, (b) zu beweisen. Nach Annahme über \mathbf{K} und über Ω ist die Funktion f jedenfalls wohldefiniert. Wir müssen zeigen, daß $\nabla f = \mathbf{K}$ ist. Hierzu halten wir den Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ für einen Moment fest und betrachten die partielle Funktion

$$\psi(x_1) := f(x_1, p_2, \dots, p_n) \quad (p_1 - h < x_1 < p_1 + h) .$$

Es gilt

$$\psi(x_1) = f(\mathbf{p}) + \int_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} , \quad (9)$$

wobei

$$\sigma : t \mapsto (t, p_2, \dots, p_n) \quad (p_1 \leq t \leq x_1) \quad (10)$$

die Verbindungsstrecke der Punkte \mathbf{p} und $\mathbf{q} := (x_1, p_2, \dots, p_n)$ bezeichnet, siehe die Fig. 6.1.18. Aus (9) und (10) folgt

$$\psi(x_1) = f(\mathbf{p}) + \int_{p_1}^{x_1} K_1(t, p_2, \dots, p_n) \cdot 1 dt .$$

Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze liefert

$$\psi'(x_1) = K_1(x_1, p_2, \dots, p_n)$$

und damit

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{p}} = \psi'(p_1) = K_1(p_1, p_2, \dots, p_n) ,$$

wie behauptet. Analog schließt man für die anderen Koordinaten.

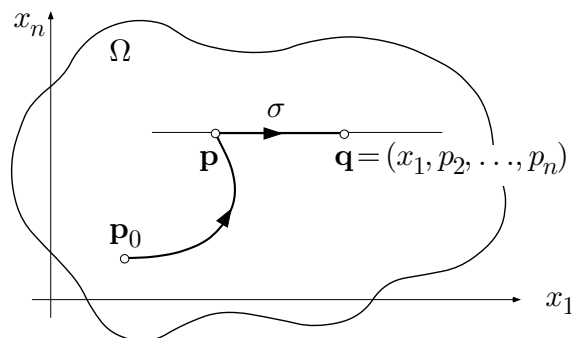


Fig. 6.1.18

Zum Beweis der letzten Behauptung betrachten wir neben f ein weiteres Potential g . Es gilt also

$$\nabla f = \nabla g = \mathbf{K} .$$

Für je zwei Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$ gilt dann (7) sowohl für f wie für g . Folglich ist

$$g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$$

und somit

$$g(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}) = g(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}) .$$

Da \mathbf{p} und \mathbf{q} beliebig waren, folgt $g - f = \text{const.}$. — Umgekehrt ist natürlich mit f auch jede Funktion $f + \text{const.}$ ein Potential. \square

Wie sieht man einem gegebenen Vektorfeld \mathbf{K} an, daß es konservativ ist und folglich ein Potential f (eine “Stammfunktion”) besitzt? Bis man das Linienintegral längs allen geschlossenen Kurven berechnet und als 0 erwiesen hat, ist jedenfalls die erste Sekunde der Ewigkeit vorbei. Wir werden aber im folgenden eine einleuchtende, notwendige und hinreichende “Integrabilitätsbedingung” herleiten. Das Paradoxe daran ist, daß man das Feld differenzieren muß, um zu sehen, ob man es integrieren kann.

Differentialformen

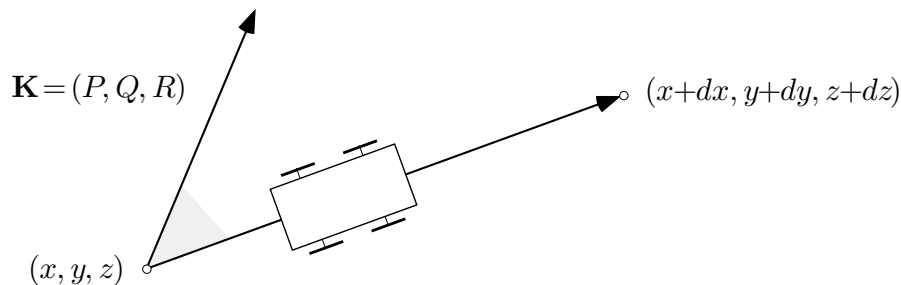


Fig. 6.1.19

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß man die Vektoranalysis auch in einer anderen “Sprache” formulieren kann. Die Objekte des Studiums sind dann nicht die Vektorfelder $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ bzw. $\mathbf{K} = (P, Q)$, sondern die in den Linienintegralen auftretenden Ausdrücke

$$Pdx + Qdy + Rdz \quad \text{bzw.} \quad Pdx + Qdy .$$

Man nennt diese Ausdrücke **Differentialformen**, genauer **1-Formen**, da sie über eindimensionale Ketten integriert werden. Eine 1-Form läßt sich folgendermaßen physikalisch interpretieren (Fig. 6.1.19): Verschiebt das Kraftfeld $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ ein Wägelchen von (x, y, z) nach $(x + dx, y + dy, z + dz)$, so leistet es in erster Näherung die Arbeit

$$(P, Q, R)_{(x,y,z)} \cdot (dx, dy, dz) = Pdx + Qdy + Rdz .$$

Bei dieser Umsetzung entspricht dem Gradientenfeld

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) \quad \text{bzw.} \quad \nabla f = (f_x, f_y)$$

einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das sogenannte **totale Differential** von f :

$$df := f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad \text{bzw.} \quad df := f_x dx + f_y dy .$$

Die Frage, ob ein gegebenes Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ ein Potential f besitzt, lautet dann folgendermaßen: Ist die gegebene 1-Form

$$\omega := Pdx + Qdy + Rdz$$

das totale Differential einer Funktion f ?

Solange man sich strikt an kartesische Koordinaten hält, sind beide Formulierungen der Theorie gleichwertig. Es läßt sich aber nicht leugnen, daß Differentialformen einen logischeren und einheitlicheren Aufbau der Theorie ermöglichen.

Aufgaben

1. Produziere ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - (1) Die Kreise, die die y -Achse im Ursprung berühren, sind Feldlinien.
 - (2) Das Feld ist in der ganzen Ebene definiert und stetig differenzierbar.
2. Produziere ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld \mathbf{v} , das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,h} : t \mapsto (r \cos t, r \sin t, t - h) \quad (r \geq 0, h \in \mathbb{R})$$

als Feldlinien besitzt.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) := \frac{y^2}{1 - x^2}.$$

Bestimme

- (a) die Gleichung und die Differentialgleichung der Niveaulinien von f ,
- (b) die Differentialgleichung der Feldlinien des Vektorfeldes ∇f ,
- (c) die Gleichung der Feldlinien von ∇f .

4. Berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für

- (a) $\mathbf{K}(x, y) := (x^2 + y, 2xy)$, γ der Einheitskreis mit positivem Umlaufsinne;
- (b) $\mathbf{K}(x, y) := (x + y, 2x - y)$, γ der Bogen der kubischen Parabel $y = x^3$ von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$;
- (c) $\mathbf{K}(x, y, z) := (x^2, y - z, y + z)$, γ die Schnittkurve der Einheitskugel mit der Ebene $z = \frac{1}{2}$ (positiver Umlaufssinn um die z -Achse);
- (d) $\mathbf{K}(x, y, z) := (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, γ die spiralige Kurve

$$\gamma: t \mapsto (t \cos t, t \sin t, t) \quad (0 \leq t \leq R).$$

5. Es sei $\partial D: t \mapsto e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) der in positivem Sinn durchlaufene Einheitskreis in der z -Ebene, $z = x + iy$. Berechne, mit sinngemäßer Interpretation der darin auftretenden Symbole, das Linienintegral

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} dz$$

bzw. allgemein die Integrale

$$\int_{\partial D} z^k dz \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

6. Produziere eine geschlossene, glatte (das heißt: reguläre C^1 -) Kurve

$$\gamma: t \mapsto (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

die, als Kette aufgefaßt, gleich 0 ist. (*Hinweis:* Ist γ eine beliebige Kurve, so ist $\gamma + (-\gamma)$ die Nullkette.)

6.2 Die Greensche Formel für ebene Bereiche

Was ist ein “Integralsatz”?

Im Zentrum der Vektoranalysis stehen die sogenannten **Integralsätze**. Den einfachsten davon (Satz (6.1)(b)) haben wir schon kennengelernt: Ist f ein Skalarfeld und γ eine beliebige Kurve von \mathbf{p} nach \mathbf{q} , so gilt

$$f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} . \quad (1)$$

Hier steht linker Hand das “Integral” von f über den “Rand” der Kurve γ und rechter Hand das Integral einer “Ableitung” von f über die Kurve γ selber. Dabei erscheint als “Rand” einer Kurve die aus dem positiv gezählten Endpunkt und dem negativ gezählten Anfangspunkt bestehende “nulldimensionale Kette” (Fig. 6.2.1). Anstelle von (1) können wir daher in symbolischer Notation schreiben:

$$\text{“} \int_{\partial\gamma} f = \int_{\gamma} df \text{”} . \quad (2)$$

Diese Dualität $\partial \leftrightarrow d$ finden wir auch bei den weiteren Integralsätzen, nur wird dort über zwei- bzw. dreidimensionale Bereiche und ihre Ränder integriert.

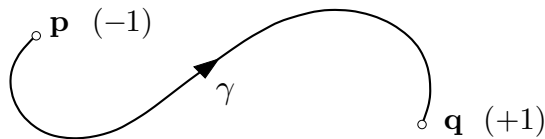


Fig. 6.2.1

Wir beginnen mit einem kompakten Bereich B in der (x, y) -Ebene, wobei wir folgendes voraussetzen: Der Rand von B besteht aus glatten Bögen γ_i ($1 \leq i \leq r$), die so orientiert sind, daß B zur Linken der γ_i liegt. Man nennt die von den γ_i gebildete Kette

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r =: \partial B$$

den **Randzyklus** von B (Fig. 6.2.2). Es ist eine Erfahrungstatsache, daß sich die γ_i zu einer oder mehreren *geschlossenen* Kurven zusammenfügen (daher der Name *Zyklus*). Es gilt also “ $\partial(\partial B) = 0$ ”. Diese Formel gehört zu den Urprinzipien der Geometrie und stellt einen sehr allgemeinen und tiefliegenden Sachverhalt dar.

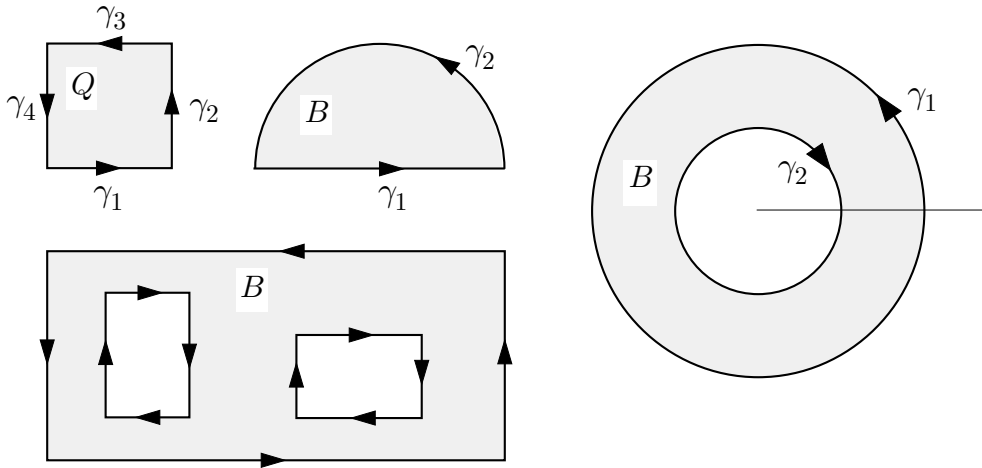


Fig. 6.2.2

Weiter sei (P, Q) ein C^1 -Vektorfeld auf B ; verabredungsgemäß sind dann P und Q auf einer offenen Menge $\Omega \supset B$ definiert. Man kann die in dem folgenden Satz auftretende Größe $Q_x - P_y$ als eine Art “Ableitung” des Feldes (P, Q) auffassen (leider gibt es in der hier verwendeten mathematischen Sprache keinen offiziellen Namen dafür). Die **Greensche Formel** (3) ist somit ein Integralsatz der in (2) dargestellten Bauart.

Die Greensche Formel

(6.3) Es seien $\mathbf{K} := (P, Q)$ ein Vektorfeld auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit Randzyklus ∂B . Dann gilt

$$\int_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y). \quad (3)$$

□ Wir beweisen (3) zunächst für einen dreieckigen “Wimpel”

$$W = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq d\}, \quad (4)$$

wobei wir die Fig. 6.2.3 zugrundelegen. W besitzt den Randzyklus

$$\partial W = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2.$$

Wir behandeln die Beiträge von P und von Q an die beiden Seiten von (3) getrennt voneinander und beginnen mit P . Dabei benützen wir für γ_0 die Parameterdarstellung

$$\gamma_0 : x \mapsto (x, \phi(x)) \quad (a \leq x \leq b).$$

Es ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned}
 \int_W (-P_y(x, y)) d\mu(x, y) &= - \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^d P_y(x, y) dy \right) dx \\
 &= - \int_a^b \left(P(x, d) - P(x, \phi(x)) \right) dx \\
 &= \int_a^b P(x, \phi(x)) dx - \int_a^b P(x, d) dx \\
 &= \int_{\gamma_0} P dx - \int_{\gamma_1} P dx = \int_{\partial W} P dx .
 \end{aligned}$$

Hier haben wir zuletzt benutzt, daß die Strecke γ_2 keinen Beitrag an das Integral $\int_{\partial W} P dx$ liefert, denn längs γ_2 ist $dx = 0$. Damit ist (3) bezüglich P bewiesen.

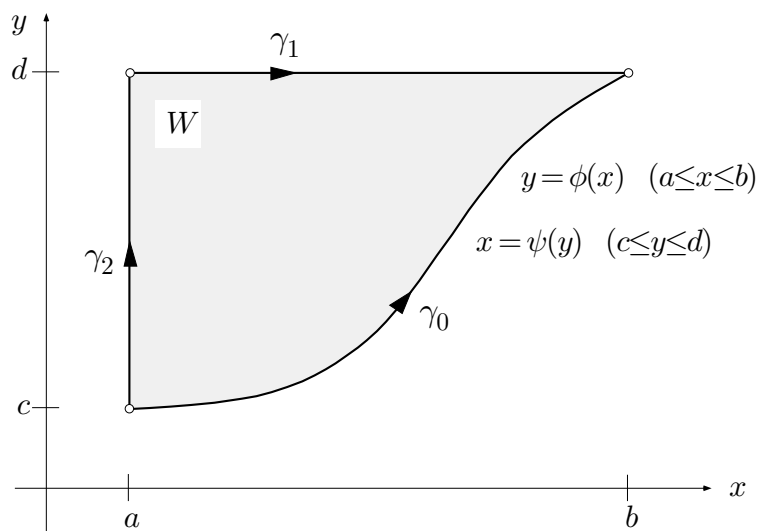


Fig. 6.2.3

Für den Beitrag von Q ersetzen wir (4) durch

$$W = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a \leq x \leq \psi(y)\}$$

und benützen für γ_0 die Parameterdarstellung

$$\gamma_0 : y \mapsto (\psi(y), y) \quad (c \leq y \leq d) .$$

Damit ergibt sich analog wie vorher

$$\begin{aligned}
 \int_W Q_x(x, y) d\mu(x, y) &= \int_c^d \int_a^{\psi(y)} Q_x(x, y) dx dy \\
 &= \int_c^d \left(Q(\psi(y), y) - Q(a, y) \right) dy \\
 &= \int_c^d Q(\psi(y), y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy \\
 &= \int_{\gamma_0} Q dy - \int_{\gamma_2} Q dy = \int_{\partial W} Q dy .
 \end{aligned}$$

Hier haben wir zuletzt benutzt, daß die Strecke γ_1 keinen Beitrag an das Integral $\int_{\partial W} Q dy$ liefert, denn längs γ_1 ist $dy = 0$.

Damit ist (3) für den in Fig. 6.2.3 dargestellten Wimpel W bewiesen, und für die Wimpel der Fig. 6.2.4 wird es wohl auch stimmen.

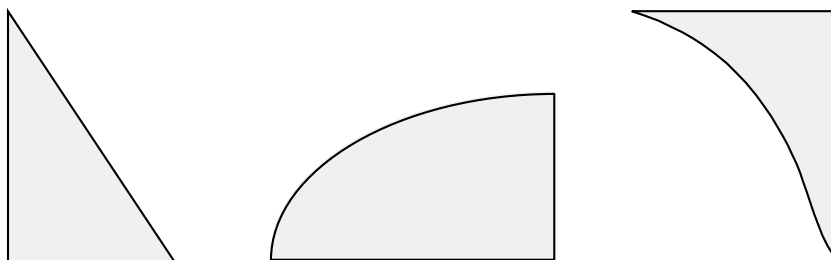


Fig. 6.2.4

Ein allgemeiner Bereich B der im Satz beschriebenen Art läßt sich durch vertikale und horizontale Schnitte in endlich viele Wimpel W_i ($1 \leq i \leq N$) zerlegen (Fig. 6.2.5). Dann gilt einerseits

$$\int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y) = \sum_{i=1}^N \int_{W_i} (Q_x - P_y) d\mu(x, y) , \quad (5)$$

andererseits aber auch

$$\int_{\partial B} (P dx + Q dy) = \sum_{i=1}^N \int_{\partial W_i} (P dx + Q dy) . \quad (6)$$

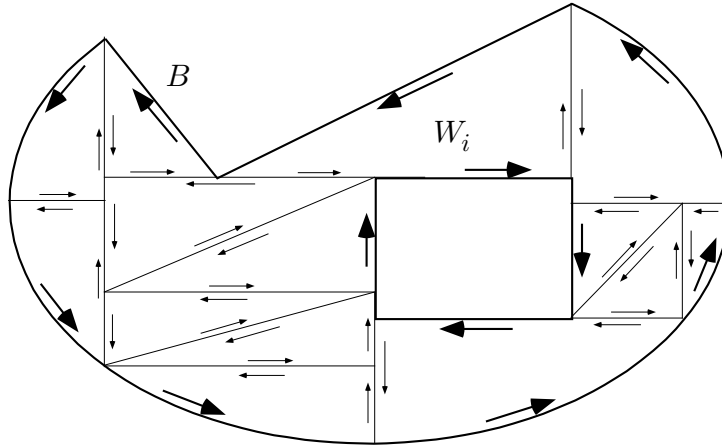


Fig. 6.2.5

Die Integrale längs den im Innern von B gelegenen Kanten der W_i heben sich nämlich heraus, da diese Kanten je zweimal gegenläufig abgefahren werden. Somit wird auch rechter Hand in (6) per saldo über ∂B integriert.

Da nun die Greensche Formel (3) für jedes einzelne W_i zutrifft, stimmen die Summanden rechts in (5) und (6) paarweise überein; folglich haben auch die linken Seiten dieser Formeln denselben Wert. \square

Wir bringen nun einige Anwendungen der Greenschen Formel.

Als erstes ein “Trick” zur Flächenberechnung. Zu den beiden Vektorfeldern

$$(P(x, y), Q(x, y)) := (0, x) \quad \text{bzw.} \quad := (-y, 0)$$

gehören die 1-Formen $x dy$ bzw. $-y dx$. In beiden Fällen ist $Q_x - P_y \equiv 1$ und folglich

$$\int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y) = \mu(B) .$$

Wenden wir daher Satz (6.3) auf diese Felder an, so erhalten wir die sogenannten **Flächenformeln**, die den Flächeninhalt eines Bereichs B als Umlaufintegral darstellen:

$$(6.4) \quad \mu(B) = \begin{cases} \int_{\partial B} x dy , \\ - \int_{\partial B} y dx , \\ \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x dy - y dx) . \end{cases}$$

Diese Formeln sind dann bequem, wenn B nicht durch Ungleichungen, sondern durch eine Parameterdarstellung von ∂B festgelegt ist.

① Rollt ein Kreis vom Radius a einmal auf der x -Achse ab (Fig. 6.2.6), so beschreibt der auf der Kreisperipherie festgemachte Punkt P eine **Zykloide** γ . Wir wählen als Parameter den Wälzwinkel τ und entnehmen der Figur die folgende Parameterdarstellung von γ :

$$\gamma: \tau \mapsto \begin{cases} x(\tau) = a(\tau - \sin \tau) \\ y(\tau) = a(1 - \cos \tau) \end{cases} \quad (0 \leq \tau \leq 2\pi).$$

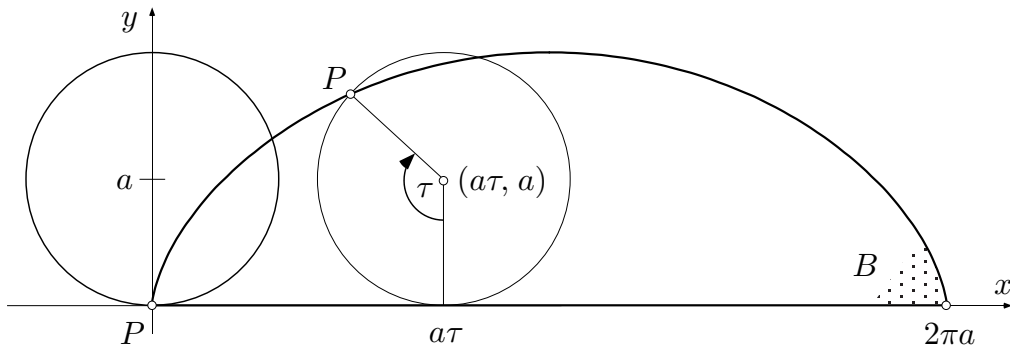
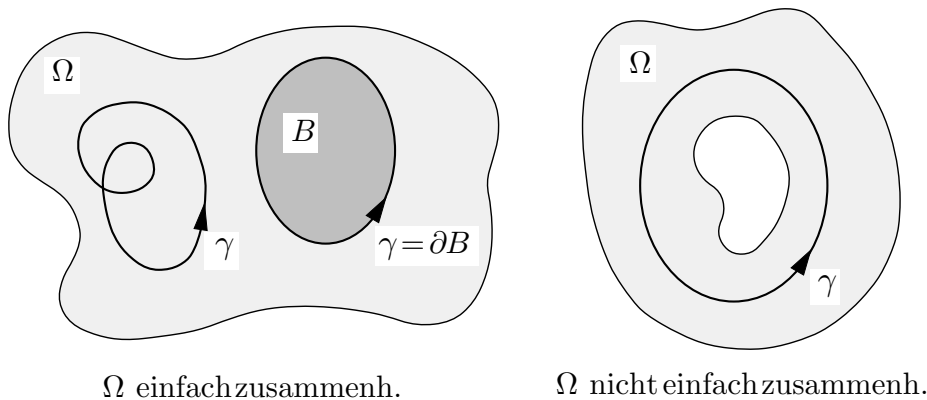


Fig. 6.2.6

Es soll nun der zwischen γ und der x -Achse eingeschlossene Flächeninhalt $\mu(B)$ berechnet werden. Hierzu verwenden wir zum Beispiel die zweite Formel des Angebots (6.4); dabei erhalten wir das Integral längs der Grundlinie gratis. Es ergibt sich

$$\mu(B) = - \int_{-\gamma}^{\gamma} y \, dx = \int_0^{2\pi} y(\tau) x'(\tau) \, d\tau = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \tau)^2 \, d\tau = 3\pi a^2. \quad \circ$$



Ω einfach zusammenh.

Ω nicht einfach zusammenh.

Fig. 6.2.7

Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder in der Ebene

Vor allem sind wir nun in der Lage, für Vektorfelder bzw. 1-Formen in der Ebene eine notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingung anzugeben. Dabei tritt überraschenderweise eine geometrische Zusatzbedingung auf, die sich auf das Definitionsgebiet Ω des betrachteten Feldes bezieht.

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene Kurve $\gamma \subset \Omega$ innerhalb Ω stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt (Fig. 6.2.7). Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt auch folgendes: Jede geschlossene Kurve $\gamma \subset \Omega$ berandet eine in Ω gelegene 2-Kette, im einfachsten Fall ein Flächenstück $B \subset \Omega$, nämlich das Flächenstück, das beim Zusammenziehen überstrichen wird (Fig. 6.2.8–9).

② Hier einige Beispiele von Gebieten in der Ebene und im Raum:

Einfach zusammenhängend?	ja	nein
(a) Gebiete in der Ebene		
\mathbb{R}^2	✓	
Kreisscheibe	✓	
$\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$		✓
$\mathbb{R}^2 \setminus$ Kreisscheibe		✓
$\mathbb{R}^2 \setminus$ Halbstrahl	✓	
Kreisring		✓
(b) Gebiete im Raum		
\mathbb{R}^3	✓	
$\mathbb{R}^3 \setminus$ endlich viele Punkte	✓	
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Vollkugel	✓	
Kugelrinde	✓	
Inneres eines Volltorus		✓
zylindrische Hülse		✓
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Kreislinie		✓
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Gerade		✓

○

Die versprochene Integrabilitätsbedingung lautet nun folgendermaßen:

(6.5) Ein C^1 -Vektorfeld (P, Q) (bzw. eine 1-Form $Pdx + Qdy$) auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann ein Potentialfeld ∇f (ein totales Differential df), wenn gilt:

$$Q_x - P_y \equiv 0. \quad (7)$$

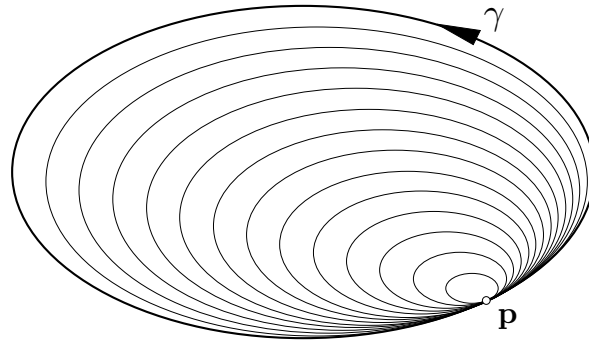


Fig. 6.2.8

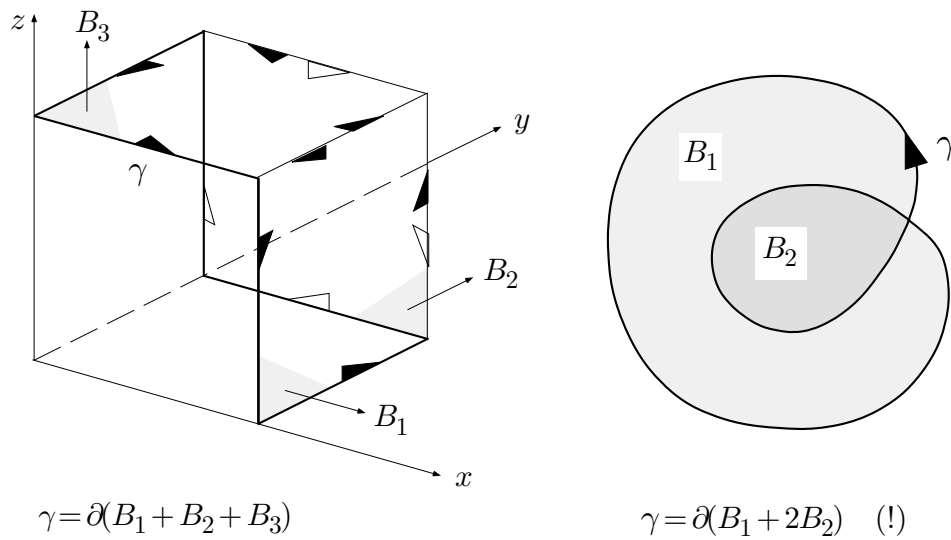


Fig. 6.2.9

□ Die Bedingung (7) ist notwendig: Ist

$$(P, Q) = \nabla f = (f_x, f_y),$$

so gilt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge:

$$Q_x - P_y = (f_y)_x - (f_x)_y \equiv 0.$$

Die Bedingung (7) ist aber auch hinreichend: Es sei γ eine beliebige geschlossene Kurve in Ω . Dann gibt es nach Voraussetzung über Ω einen Bereich $B \subset \Omega$ mit $\gamma = \pm \partial B$ (Fig. 6.2.10), und wir erhalten mit Satz (6.3):

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \pm \int_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \pm \int_B (Q_x - P_y) d\mu(x, y) = 0.$$

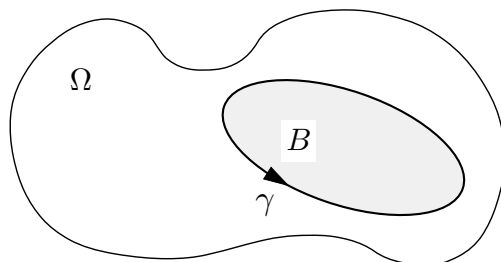


Fig. 6.2.10

Hieraus folgt, da γ beliebig war: Das Feld (P, Q) ist konservativ oder eben nach Satz (6.2)(a) ein Potentialfeld. \square

Für ein beliebiges, gemeint ist: nicht notwendigerweise einfach zusammenhängendes Gebiet Ω läßt sich folgendes sagen: Ist die Bedingung (7) erfüllt, so ist das Feld jedenfalls lokal, das heißt: in einfach zusammenhängenden Teilgebieten, ein Potentialfeld, global aber unter Umständen nicht. Siehe dazu das Beispiel (4) dieses Abschnitts.

(3) Das Feld

$$(P, Q) := (x^3 + xy^2, x^2y - y^5)$$

von Beispiel 6.1.(6) ist in der ganzen Ebene definiert und erfüllt die Integrabilitätsbedingung:

$$Q_x - P_y = 2xy - 2xy \equiv 0 .$$

Dieses Feld ist also ein Potentialfeld: Es gibt eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_x(x, y) = x^3 + xy^2 , \quad (8)$$

$$f_y(x, y) = x^2y - y^5 . \quad (9)$$

Um ein solches f zu konstruieren, gehen wir folgendermaßen vor: Wir integrieren die rechte Seite von (8) unbestimmt nach x und erhalten damit eine partikuläre Lösung

$$F(x, y) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}$$

der inhomogenen linearen (partiellen) Differentialgleichung (8). Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$f_x = 0$$

und besitzt nach Satz (5.1) die allgemeine Lösung

$$f(x, y) = g(y) ,$$

$g(\cdot)$ eine willkürliche Funktion der einen Variablen y . Die allgemeine Lösung der Gleichung (8) ist somit (nach allgemeinen Prinzipien betreffend inhomogene lineare Probleme) gegeben durch

$$f(x, y) = F(x, y) + g(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + g(y) .$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gleichung (9), so folgt für $g(\cdot)$ die Bedingung

$$x^2 y + g'(y) = x^2 y - y^5 . \quad (10)$$

An dieser Stelle muß die Variable x vollständig aus der Rechnung herausfallen, und das ist hier auch eingetroffen. Aus (10) folgt

$$g(y) = -\frac{y^6}{6} + C ;$$

die gesuchten Potentialfunktionen sind daher die Funktionen

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^6}{6} + C .$$

○

Das Gradientenfeld des Arguments (Polarwinkels)

④ Wir betrachten das Feld

$$\mathbf{A}(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(Fig. 6.2.11) in der punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Die Feldvektoren sind tangential zu den konzentrischen Kreisen um $\mathbf{0}$ und haben den Betrag

$$|\mathbf{A}(x, y)| = \frac{1}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} .$$

Ein elektrischer Strom i , der die z -Achse zum Beispiel von unten nach oben durchfließt (Fig. 6.2.12), erzeugt im umgebenden Raum ein Magnetfeld \mathbf{H} . Dieses Feld ist in jeder Ebene $z = \text{const.}$ ein Feld der obigen Art.

Schon ein Blick auf die Figur 6.2.11 zeigt, daß das Feld \mathbf{A} nicht konservativ sein kann und somit auch kein Potential besitzt. Beim Durchlaufen eines Kreises

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) := (r \cos t, r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ist das Feld ja ständig gleichsinnig parallel zum Tangentialvektor $\mathbf{z}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, so daß das Integral

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} \quad (11)$$

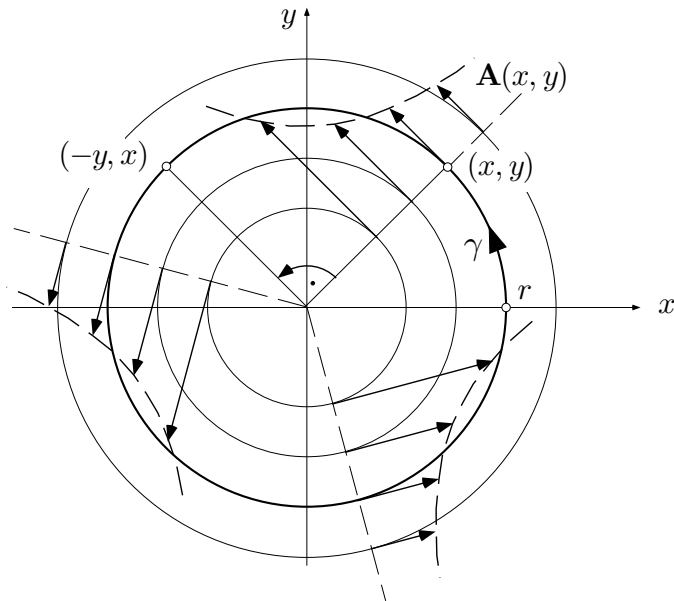


Fig. 6.2.11

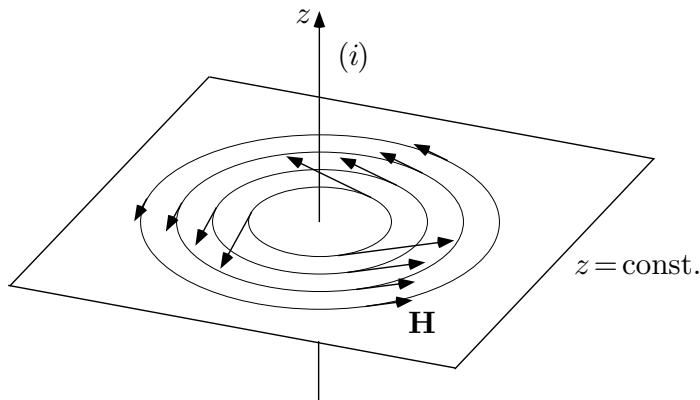


Fig. 6.2.12

bestimmt positiv ausfällt. Die Rechnung liefert

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{A}(\mathbf{z}(t))| \cdot |\mathbf{z}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r dt = 2\pi,$$

unabhängig von r .

Trotzdem genügt das Feld \mathbf{A} der Integritätsbedingung (7). Wir könnten das durch Nachrechnen verifizieren:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \dots \equiv 0.$$

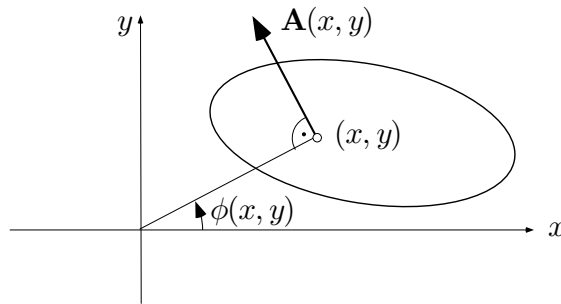


Fig. 6.2.13

Nun trifft es sich aber, daß uns das Feld \mathbf{A} in Beispiel 5.1.④ schon einmal begegnet ist, und zwar als Gradientenfeld der Argument“funktion“:

$$\mathbf{A} = \nabla \arg .$$

Lokal ist also

$$\mathbf{A} = (\phi_x, \phi_y)$$

mit richtiggehenden Funktionen ϕ (Fig. 6.2.13), und dann ist klar, daß \mathbf{A} die Bedingung (7) erfüllt. — Ein Widerspruch zu Satz (6.5) besteht nicht, denn der Definitionsbereich von \mathbf{A} ist nicht einfach zusammenhängend.

Der für (11) erhaltene Wert 2π überrascht nun nicht mehr: Bei einem Umlauf um $\mathbf{0}$ nimmt das Argument eben um 2π zu. Dabei ist nicht einmal nötig, daß man sich auf einem Kreis bewegt; es genügt, daß man auf irgendeine Weise einmal in positivem Sinn um $\mathbf{0}$ herumgeht — immer hat das Integral (11) den Wert 2π . Hier kommt ein allgemeiner Sachverhalt zum Vorschein:

Besitzt das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein “Loch” und genügt das Feld (P, Q) (bzw. die 1-Form $Pdx + Qdy$) auf Ω der Integrabilitätsbedingung (7), so hat das Integral

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy)$$

für alle einmal um das Loch herumlaufenden Kurven γ (Fig. 6.2.14) denselben Wert. Ist dieser Wert $= 0$, so ist das Feld (global) ein Potentialfeld. Diese Tatsache wird in der komplexen Analysis eine fundamentale Rolle spielen.



Strömungsfelder in der Ebene, Begriff des Flusses

Bis dahin haben wir uns ein Vektorfeld am ehesten als Kraftfeld vorgestellt. Wir wechseln nun die Betrachtungsweise und interpretieren unser Feld als Strömungsfeld, was wir durch Verwendung des Buchstabens \mathbf{v} anstelle von

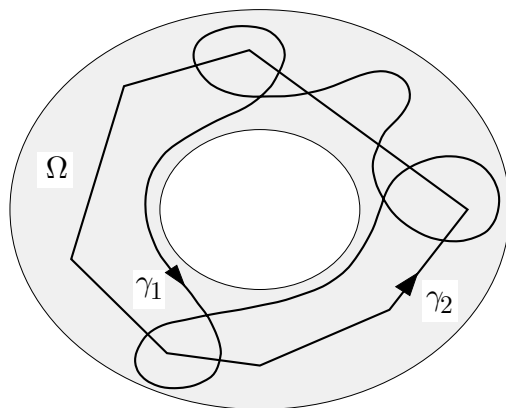


Fig. 6.2.14

\mathbf{K} zum Ausdruck bringen: $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ bezeichnet die Fließgeschwindigkeit eines strömenden Mediums an der Stelle \mathbf{x} . Dies wird zu neuen Begriffen und Sätzen führen, die allerdings erst im dreidimensionalen Fall richtig zum Tragen kommen.

Vorläufig betrachten wir ein Gebiet Ω der (x, y) -Ebene und stellen uns folgendes vor: Ein bestimmtes Flüssigprodukt, zum Beispiel Milch, wird in den verschiedenen Regionen von Ω mit unterschiedlicher Intensität produziert bzw. konsumiert. Der Mengenausgleich erfolgt durch Transport von Flüssigkeit aus den Produktionsgebieten in die Konsumzentren. Diesen Transport modellieren wir durch ein kontinuierliches Strömungsfeld $\mathbf{v} = (P, Q)$, das das ganze Gebiet Ω überzieht (Fig. 6.2.15). Das resultierende Zusammenspiel dieser verschiedenen Prozesse soll nun quantitativ untersucht werden, wobei wir ein stationäres Verhalten aller Beteiligten zugrundelegen.

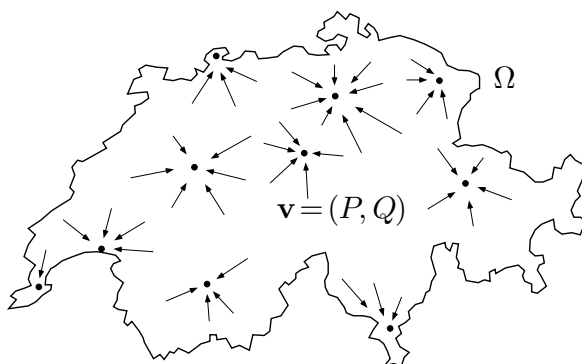


Fig. 6.2.15

Wir nehmen für einen Moment an, das Strömungsfeld $\mathbf{v} = (P, Q)$ sei homogen, und fragen nach der Flüssigkeitsmenge ΔM , die im Zeitintervall Δt

die gerichtete Strecke $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$ von links nach rechts überquert (Fig. 6.2.16). Diese Menge wird repräsentiert durch den Flächeninhalt des von den Vektoren $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$ und $\mathbf{v}\Delta t$ aufgespannten Parallelogramms. Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist folglich

$$\Delta M = (P(y_1 - y_0) - Q(x_1 - x_0)) \Delta t ,$$

wobei das Vorzeichen von selbst richtig hinkommt; das heißt: Von rechts nach links überquerende Flüssigkeitsmengen werden negativ gezählt. Die Größe

$$\Phi := \frac{\Delta M}{\Delta t} = P(y_1 - y_0) - Q(x_1 - x_0) \quad (12)$$

stellt die Flüssigkeitsmenge dar, die *pro Zeiteinheit* die gerichtete Strecke $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$ von links nach rechts überquert, und heißt der **Fluß** des Feldes \mathbf{v} über diese Strecke.

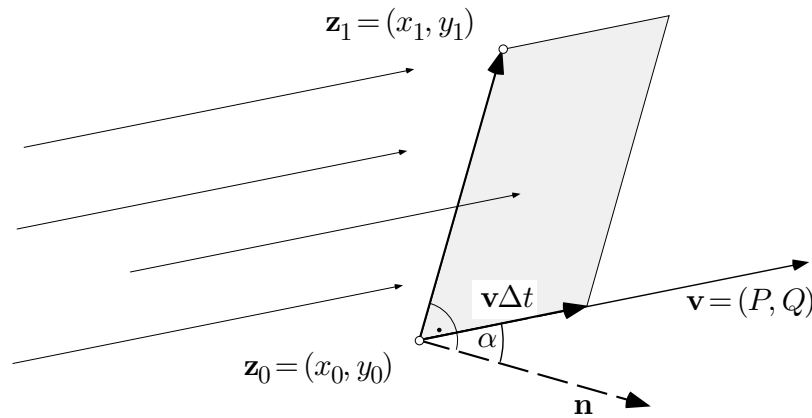


Fig. 6.2.16

Wir leiten noch eine zweite Darstellung der Größe Φ her. Führen wir nämlich den nach rechts weisenden Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n} := \left(\frac{y_1 - y_0}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0|}, -\frac{x_1 - x_0}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0|} \right)$$

der Strecke $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$ ein, so können wir Φ als Skalarprodukt interpretieren:

$$\Phi = |\mathbf{v}| \cos \alpha |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0| . \quad (13)$$

Das Strömungsfeld sei jetzt örtlich variabel, und anstelle der gerichteten Strecke $\underline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$ sei eine glatte Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

gegeben. Wir interessieren uns für die Flüssigkeitsmenge Φ , die pro Zeiteinheit diese Kurve von links nach rechts überquert, und betrachten hierzu eine hinreichend feine Teilung

$$\mathcal{Z}: \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

des Intervalls $[a, b]$. Zu jedem Teilungspunkt t_k gehört ein Kurvenpunkt $\mathbf{z}_k := \mathbf{z}(t_k) \in \gamma$. Aufgrund von (12) können wir dann die Größe Φ folgendermaßen veranschlagen (Fig. 6.2.17):

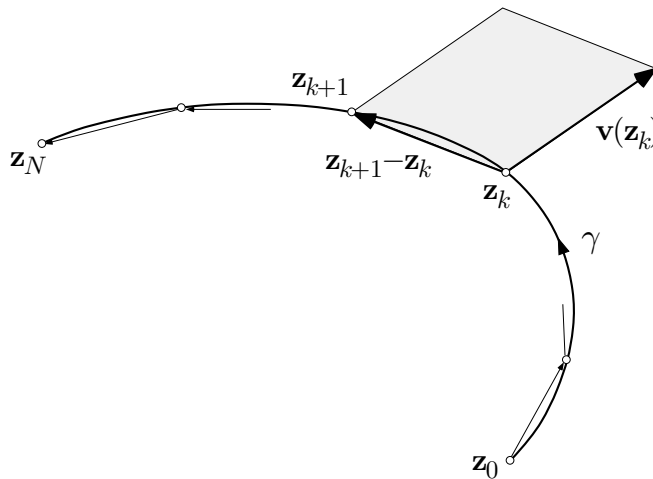


Fig. 6.2.17

$$\begin{aligned} \Phi &\doteq \sum_{k=0}^{N-1} \left(P(\mathbf{z}_k)(y_{k+1} - y_k) - Q(\mathbf{z}_k)(x_{k+1} - x_k) \right) \\ &\doteq \sum_{k=0}^{N-1} \left(P(\mathbf{z}(t_k))y'(t_k) - Q(\mathbf{z}(t_k))x'(t_k) \right) (t_{k+1} - t_k) \\ &\doteq \int_a^b \left(P(\mathbf{z}(t))y'(t) - Q(\mathbf{z}(t))x'(t) \right) dt \\ &= \int_{\gamma} (Pdy - Qdx) . \end{aligned}$$

Man nennt daher das Linienintegral

$$\Phi := \int_{\gamma} (Pdy - Qdx)$$

den **Fluß** des Vektorfeldes $\mathbf{v} = (P, Q)$ über (englisch: *across*) die Kurve γ . Damit ist auch der Fluß von \mathbf{v} über beliebige 1-Ketten definiert.

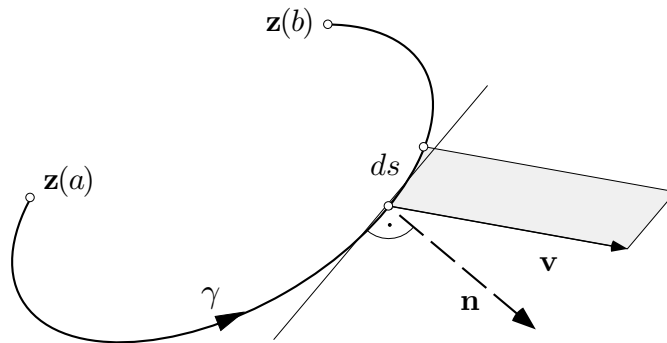


Fig. 6.2.18

Geht man von (13) aus statt von (12), so erhält man für denselben Fluß die folgende Formel (die aber überflüssige Quadratwurzeln enthält):

$$\Phi = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{z}(t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}(t)) |\mathbf{z}'(t)| dt =: \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds .$$

In dieser Formel bezeichnet \mathbf{n} den nach rechts weisenden Normaleneinheitsvektor und $ds := |\mathbf{z}'(t)| dt$ das Linienelement längs γ (Fig. 6.2.18).

Es sei jetzt $B \subset \Omega$ ein beliebiger ortsfester Bereich (zum Beispiel ein Kanton) mit Randzyklus ∂B . Dann stellt das Integral

$$\Phi := \int_{\partial B} (Pdy - Qdx) = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (14)$$

den Saldo der pro Zeiteinheit über ∂B aus B herausströmenden Flüssigkeitsmengen dar (Fig. 6.2.19). Kommt mehr Flüssigkeit aus B heraus, als hineinfließt, so ist dieser Saldo positiv; im andern Fall ist er negativ.

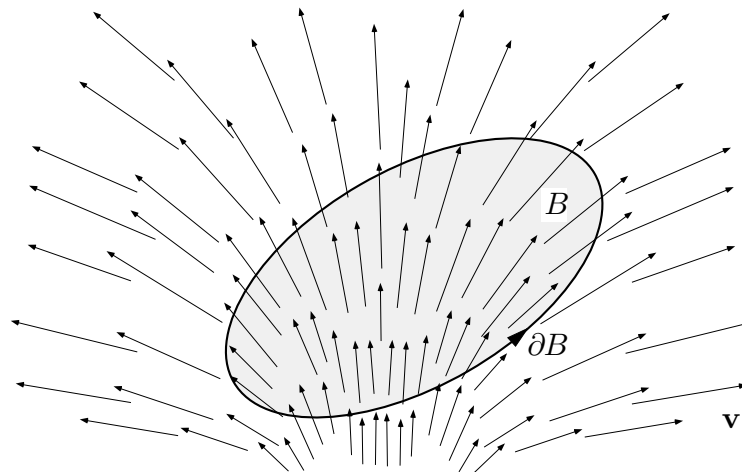


Fig. 6.2.19

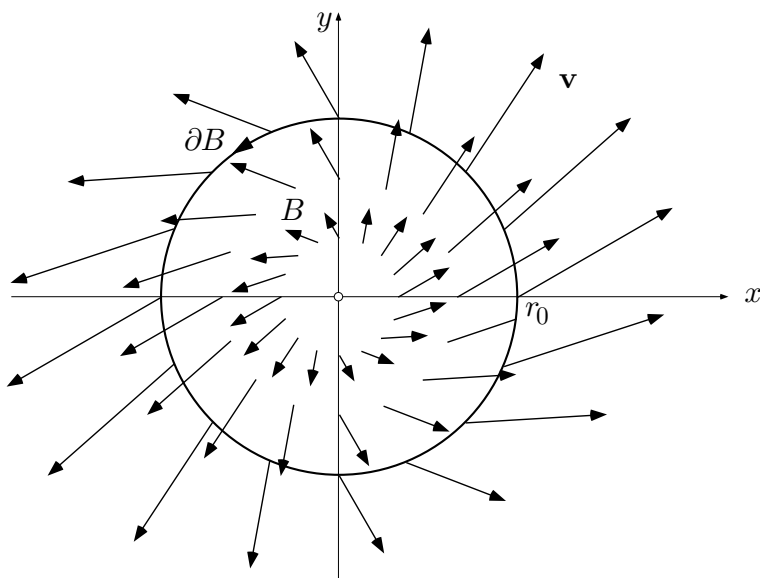


Fig. 6.2.20

⑤ Wir betrachten das linear von x und y abhängende Strömungsfeld

$$\mathbf{v}(x, y) := (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

sowie die Kreisscheibe B vom Radius r_0 um $\mathbf{0}$ (Fig. 6.2.20). Der Fluß Φ von \mathbf{v} über den Randzyklus

$$\partial B : \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) := r_0 \cos t \\ y(t) := r_0 \sin t \end{cases} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

ist nach (14) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\partial B} ((\alpha x + \beta y) dy - (\gamma x + \delta y) dx) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} ((\alpha r_0 \cos t + \beta r_0 \sin t) r_0 \cos t - (\gamma r_0 \cos t + \delta r_0 \sin t) (-r_0 \sin t)) dt \\ &= r_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha \cos^2 t + \delta \sin^2 t) dt = r_0^2 (\alpha + \delta) \pi \\ &= (\alpha + \delta) \mu(B) . \end{aligned}$$

○

Divergenz und der Satz von Gauß in der Ebene

Nun kommt der eigentliche Clou. Das erste Integral (14) sieht aus wie ein Linienintegral für das Kraftfeld $\mathbf{K} := (-Q, P)$ und läßt sich mit Hilfe der Greenschen Formel (3) in ein Integral über das Innere von B verwandeln. Rein formal ergibt sich

$$\Phi = \int_B (P_x + Q_y) d\mu(x, y) . \quad (15)$$

Man nennt die rechter Hand erscheinende Größe

$$P_x + Q_y =: \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (16')$$

die **Divergenz** oder **Quellstärke** des Vektorfelds \mathbf{v} . In nummerierten Koordinaten tritt das Bildungsgesetz noch deutlicher hervor:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} . \quad (16'')$$

Die Divergenz ist eine Skalarfunktion, deren geometrische bzw. physikalische Bedeutung wir gleich erläutern werden. Jedenfalls können wir aufgrund von (14) und (15) den folgenden Integralsatz notieren:

(6.6) *Es seien $\mathbf{v} = (P, Q)$ ein Strömungsfeld auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit Randzyklus ∂B . Dann gilt*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} d\mu . \quad (17)$$

Dies ist der **Divergenzsatz** oder **Satz von Gauß** für die Ebene. Er besagt folgendes: Der Fluß von \mathbf{v} über ∂B nach außen ist gleich dem Integral der Divergenz $\operatorname{div} \mathbf{v}$ über das Innere von B .

⑤ (Forts.) Es ist

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x + \beta y) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma x + \delta y) \equiv \alpha + \delta .$$

Nach **(6.6)** gilt daher

$$\Phi = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) d\mu(x, y) = (\alpha + \delta) \mu(B) ,$$

wie vorher.

○

Was bedeutet die rechte Seite von (17)? Wenn per saldo Flüssigkeit aus B herausfließt, so darum, weil im Inneren von B zusätzlich zum Strömungsvorgang Flüssigkeit “produziert” wird. Die Flüssigkeitsproduktion erfolgt mit einer gewissen örtlich variablen Intensität ($:=$ Produktion pro Flächeneinheit und Zeiteinheit) oder eben Quellstärke $\operatorname{div} \mathbf{v}$, und die Gesamtproduktion (pro Zeiteinheit) innerhalb B ist gleich dem Integral dieser Intensität über die Gesamtfläche B .

Um einzusehen, daß $\operatorname{div} \mathbf{v}$ tatsächlich die örtliche Intensität der Flüssigkeitsproduktion darstellt, betrachten wir einen festen Punkt $\mathbf{z}_0 \in \Omega$ sowie zum Beispiel eine kleine Kreisscheibe B_ε vom Radius $\varepsilon > 0$ um \mathbf{z}_0 (Fig. 6.2.21). Wenden wir Satz (6.6) auf diese Kreisscheibe an, so ergibt sich folgendes: Die pro Zeiteinheit in B_ε produzierte und aus B_ε herausfließende Flüssigkeitsmenge $\Phi(B_\varepsilon)$ hat den Wert

$$\Phi(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) d\mu(x, y) \doteq \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{z}_0) \cdot \mu(B_\varepsilon) .$$

Die örtliche Produktionsintensität ist somit tatsächlich gegeben durch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{z}_0) . \quad (18)$$

Soviel zum Satz von Gauß in der Ebene. Im nächsten Abschnitt behandeln wir den dreidimensionalen Fall, der in der Hydro- und der Elektrodynamik eine zentrale Rolle spielt. Da der Satz von der gegebenen physikalischen Interpretation her ziemlich einleuchtet, werden wir allerdings auf den Beweis der dreidimensionalen Version verzichten.

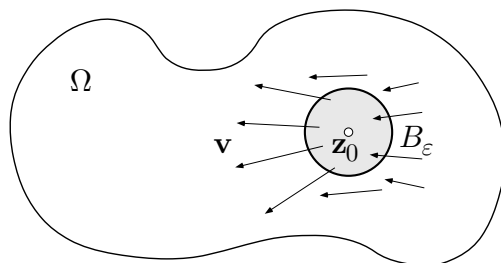


Fig. 6.2.21

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe der Greenschen Formel:

(a) $\int_{\partial B} (xy \, dx + x^2 \, dy)$, $B := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{2/3}\}$;

(b) $\int_{\partial B} (y \, dx + \sin x \, dy)$, $B := \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq \cos x\}$.

2. In der (x, y) -Ebene wird das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y) := (3x^2 - 4xy + 4y^2, -2x^2 + 8xy + 12y^2)$$

betrachtet. Man berechne auf möglichst einfache Weise das Linienintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für den in der Fig. 6.2.22 eingezeichneten Weg γ .

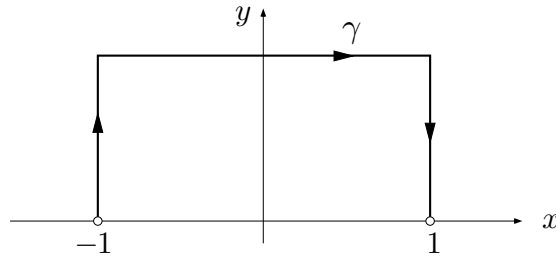


Fig. 6.2.22

3. (M) Schneidet man das Descartessche Blatt $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Fig. 5.3.1) mit Geraden $y = mx$ ($0 < m < \infty$), so erhält man eine Parameterdarstellung der Schleife mit m als Parameter. Bestimme den Flächeninhalt der Schleife.
4. (M) Skizziere die verlängerte Zykloide

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) := t - \frac{\pi}{2} \sin t \\ y(t) := 1 - \frac{\pi}{2} \cos t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

(vgl. Beispiel ①) und berechne den Flächeninhalt einer Schlinge.

5. Die n Punkte (x_k, y_k) ($1 \leq k \leq n$) bilden die linksherum aufeinanderfolgenden Ecken eines ebenen Polygons P . Der Flächeninhalt von P lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\mu(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k (y_{k+1} - y_{k-1}),$$

mit sinngemäßer Interpretation von y_0 und y_{n+1} .

6. Rollet ein Kreis auf einem anderen Kreis ab, so beschreibt ein fester Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises eine **Epizykloide**. Man bestimme eine Parameterdarstellung der Epizykloide γ in Fig. 6.2.23 und berechne den von γ eingeschlossenen Flächeninhalt.

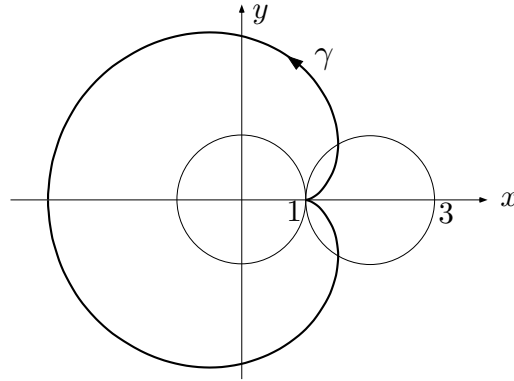


Fig. 6.2.23

7. Betrachte in der punktierten (x, y) -Ebene das Feld

$$\mathbf{K}(x, y) := \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

- Verifiziere: $\operatorname{rot} \mathbf{K} \equiv 0$. Folgt daraus, daß \mathbf{K} konservativ ist?
- Berechne das Umlaufsintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$ für einen Kreis γ vom Radius $r > 0$ um $\mathbf{0}$.
- Zeige: \mathbf{K} ist konservativ. (*Hinweis*: Ein Potential läßt sich explizit angeben.)

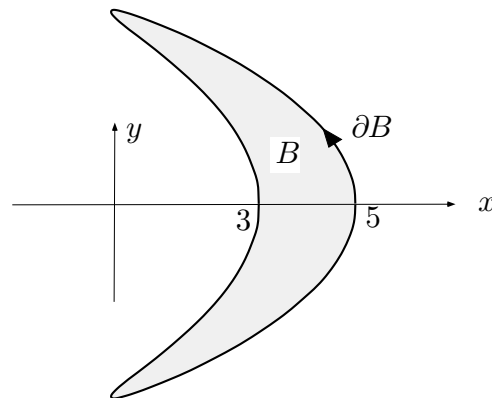


Fig. 6.2.24

8. Die Randkurve ∂B des in der Fig. 6.2.24 dargestellten Bumerangs B besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$\partial B : t \mapsto \begin{cases} x := 4 \cos^2 t + \cos t \\ y := \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Bestimme den Schwerpunkt von B . (*Hinweis:* Unter anderem benötigt man hierzu ein Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q)$ mit $Q_x - P_y \equiv x$, zum Beispiel $(P, Q) := (0, x^2/2)$. Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t \, dt = 0.)$$

9. Berechne den Fluß des Feldes

$$\mathbf{v}(x, y) := (2xy - y^2, x^2 + y^2)$$

aus dem Dreieck $B := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ heraus einmal als Flußintegral und einmal mit Hilfe des Divergenzsatzes.

6.3 Der Satz von Gauß

Zur Theorie der Flächen im Raum

Wir beginnen mit der genaueren Betrachtung von zweidimensionalen Flächen im dreidimensionalen Raum. Für die Integralrechnung ist notwendig, daß diese Flächen in Parameterdarstellung vorliegen.

Ist eine Fläche S als Graph einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ präsentiert:

$$S: \quad z = f(x, y)$$

(Fig. 6.3.1), so können wir eine Parameterdarstellung mit x, y als Parameter sofort hinschreiben:

$$S: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) := (x, y, f(x, y)).$$

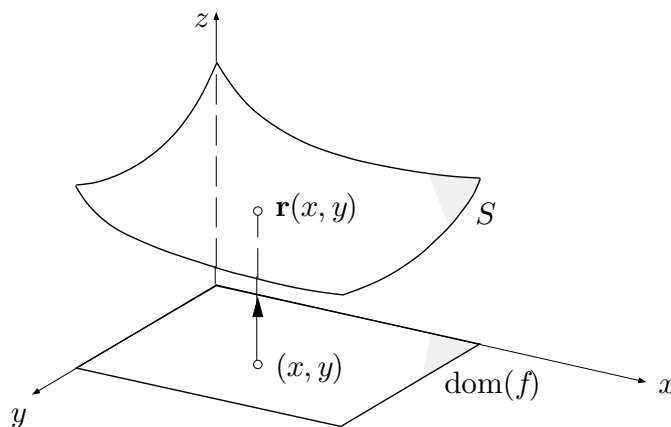


Fig. 6.3.1

Ist weiter S eine Rotationsfläche mit der Meridiankurve

$$\gamma_M: \quad t \mapsto (\rho(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

(Fig. 6.3.2), so erhält man eine Parameterdarstellung von S , indem man zusätzlich eine "Rotationsvariable" ϕ einführt:

$$S: \quad (t, \phi) \mapsto \begin{cases} x = \rho(t) \cos \phi \\ y = \rho(t) \sin \phi \\ z = z(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b, \phi \in \mathbb{R}/2\pi).$$

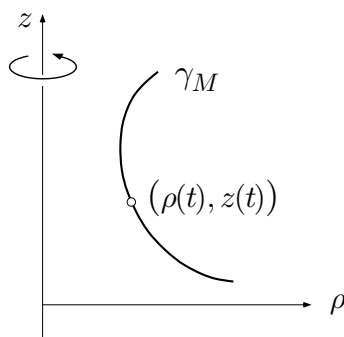


Fig. 6.3.2

Wenn wir von Flächen im allgemeinen reden, so verwenden wir u, v als Parametervariablen. Gegeben sind also ein Bereich B in der (u, v) -Ebene, am liebsten ein Rechteck, und eine vektorwertige C^2 -Funktion

$$\mathbf{r}(\cdot, \cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (1)$$

Die Bildmenge S im \mathbb{R}^3 ist typischer Weise eine Fläche, allenfalls mit Ausnahmepunkten.

Wir betrachten nun die Parameterdarstellung (1) in der Umgebung eines festen Parameterpunktes $(u_0, v_0) \in B$. Es sei $\mathbf{p} := \mathbf{r}(u_0, v_0)$ der zugehörige Punkt auf S . Wir halten $v := v_0$ für einen Moment fest, betrachten also die partielle Funktion

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0).$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer auf S liegenden Kurve, der sogenannten **u -Linie** durch den Punkt \mathbf{p} (Fig. 6.3.3). Die u -Linie besitzt in diesem Punkt den Tangentialvektor $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) =: \mathbf{r}_u$. Analog stellt die partielle Funktion

$$v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v)$$

die **v -Linie** durch den Punkt \mathbf{p} dar, die ebenfalls auf S liegt und im Punkt \mathbf{p} den Tangentialvektor $\mathbf{r}_v(u_0, v_0) =: \mathbf{r}_v$ besitzt.

Die Parameterdarstellung (1) ist an der Stelle (u_0, v_0) **regulär**, wenn die Funktionalmatrix

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \end{array} \right]_{(u_0, v_0)}$$

den Rang 2 besitzt, oder einfacher: wenn

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0} \quad (2)$$

ist. Die beiden Vektoren \mathbf{r}_u und \mathbf{r}_v spannen dann eine wohlbestimmte Ebene auf, nämlich die Tangentialebene $T_{\mathbf{p}}S$. Ist die Bedingung (2) erfüllt, so besitzt die Menge S in der Umgebung von \mathbf{p} tatsächlich Flächencharakter; insbesondere bildet dann (1) eine kleine Kreisscheibe um (u_0, v_0) bijektiv und

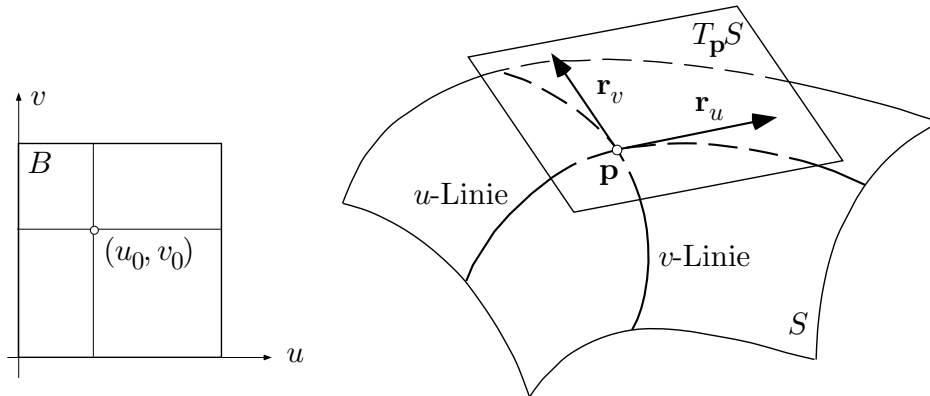


Fig. 6.3.3

in beiden Richtungen stetig auf ein kleines Flächenscheibchen um \mathbf{p} ab. Dies ergibt sich aus einer Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen, auf die wir schon in Abschnitt 5.4 kurz hingewiesen haben.

Im allgemeinen sind die verwendeten Parameterdarstellungen in allen inneren Punkten des Parameterbereichs B regulär. In einzelnen Randpunkten oder längs gewissen Kanten von B ist jedoch die Regularitätsbedingung (2) gelegentlich verletzt, und in den zugehörigen Flächenpunkten ist der Flächencharakter von S unter Umständen defekt. Für die Integralrechnung ist das aber ohne Belang, da ∂B eine “zweidimensionale Nullmenge” ist.

① Für die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \theta \cos \phi \\ y &= R \cos \theta \sin \phi \\ z &= R \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \left(\phi \in \mathbb{R}/2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

der 2-Sphäre vom Radius R hat man

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= (-R \cos \theta \sin \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \mathbf{r}_\theta &= (-R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = R^2 \cos \theta (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta). \quad (4)$$

Der Vektor $(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$ ist ein Einheitsvektor. Folglich ist die Darstellung (3) im Inneren des Parameterbereichs regulär. Auf den beiden Kanten $\theta = \pm\pi/2$ verschwindet $\cos \theta$ und damit auch $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$. Diese zwei Kanten werden auf zwei Punkte (Nordpol und Südpol) abgebildet; allerdings sieht man der Sphäre dort nichts an.

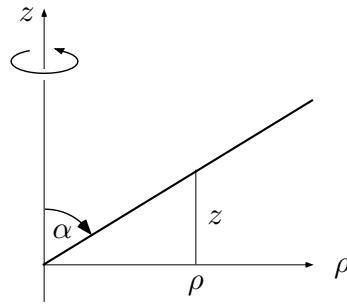


Fig. 6.3.4

Durch

$$\left. \begin{aligned} x &:= \rho \cos \phi \\ y &:= \rho \sin \phi \\ z &:= \cot \alpha \cdot \rho \end{aligned} \right\} \quad (\rho \geq 0, \phi \in \mathbb{R}/2\pi) \quad (5)$$

wird ein Rotationskegel (Fig. 6.3.4) vom halben Öffnungswinkel α dargestellt; $\alpha \in]0, \pi[$ ist fest. Man berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, \cot \alpha), \\ \mathbf{r}_\phi &= (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0), \\ \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi &= \rho (-\cot \alpha \cos \phi, -\cot \alpha \sin \phi, 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Die Darstellung ist also längs der Kante $\rho = 0$ des Parameterbereichs singulär. Tatsächlich wird diese Kante in den einzigen Punkt $\mathbf{0}$ abgebildet, und dort ist der Flächencharakter des Kegels offensichtlich gestört. \bigcirc

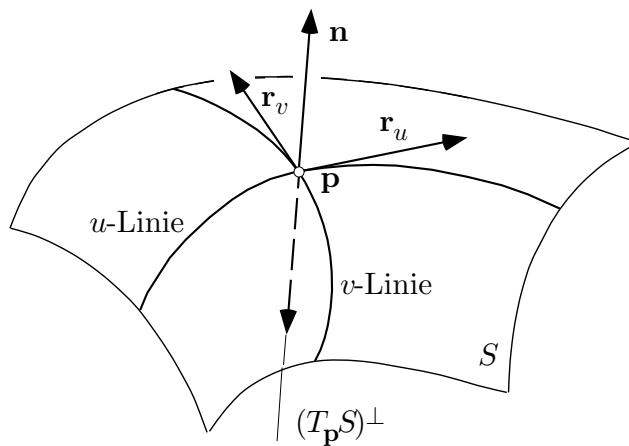


Fig. 6.3.5

Ist die Parameterdarstellung (1) im Punkt (u_0, v_0) regulär, so stellt

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (7)$$

den **Normaleneinheitsvektor** von S im Punkt \mathbf{p} , kurz: die **Flächennormale** dar (Fig. 6.3.5). A priori besitzt S in jedem Punkt zwei gleichberechtigte, einander entgegengesetzte Normalenrichtungen, und es ist nur eine 50%-Chance, daß (7) gerade die “gewünschte” Richtung, zum Beispiel die der “äußeren Normalen” repräsentiert. In allen Fällen, wo es auf das Vorzeichen ankommt, insbesondere beim Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche, hat man daher \mathbf{n} wenn nötig umzupolen.

① (Forts.) Für die Parameterdarstellung (3) der 2-Sphäre gilt nach (4):

$$\mathbf{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) = \frac{\mathbf{r}}{R};$$

dies ist die äußere Normale. — Beim Kegel (5) haben wir nach (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \alpha + 1}} (-\cot \alpha \cos \phi, -\cot \alpha \sin \phi, 1) \\ &= (-\cos \alpha \cos \phi, -\cos \alpha \sin \phi, \sin \alpha). \end{aligned}$$

Ob das die innere oder die äußere Normale ist, bleibe dahingestellt (siehe die Fig. 6.3.6). Jedenfalls zeigt sie nach oben. ○

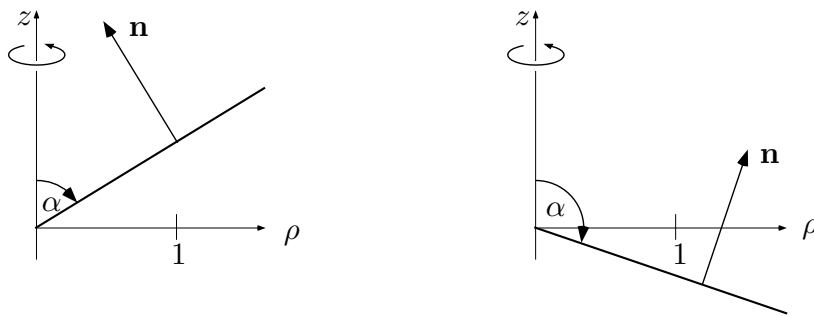


Fig. 6.3.6

Berechnung des Flächeninhalts

Wir wenden uns nun dem Problem des Flächeninhalts zu. Um eine Formel für den Flächeninhalt $\omega(S)$ der Fläche S herzuleiten, zerlegen wir den Parameterbereich B in kleine achsenparallele Rechtecke B_k ($1 \leq k \leq N$). Es sei

$$B_k := [u_k, u_k + \Delta u] \times [v_k, v_k + \Delta v]$$

ein derartiges Teilrechteck (Fig. 6.3.7). Durch die Parameterdarstellung (1) wird B_k in ein Flächenstück $S_k \subset \mathbb{R}^3$ übergeführt, das sich fast nicht von einem Parallelogramm unterscheiden läßt. Dieses winzige Parallelogramm P wird aufgespannt von den beiden Vektoren

$$\mathbf{r}_u \Delta u, \quad \mathbf{r}_v \Delta v$$

und besitzt somit den Flächeninhalt

$$\omega(P) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v .$$

Es gilt daher mit vertretbarem Fehler

$$\omega(S_k) \doteq \omega(P) = |\mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k)| \mu(B_k)$$

und folglich

$$\omega(S) \doteq \sum_{k=1}^N |\mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k)| \mu(B_k) .$$

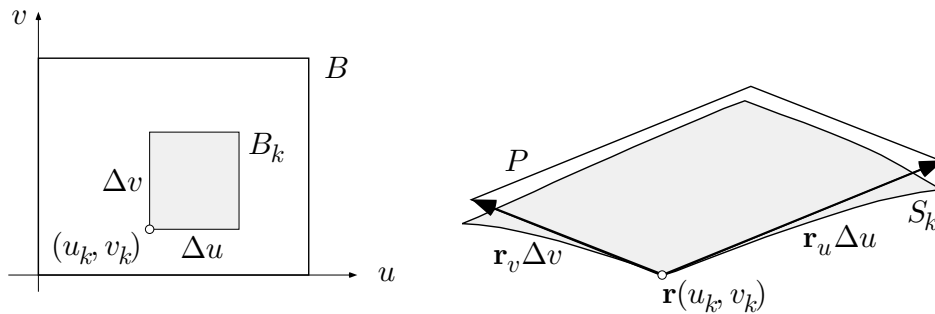


Fig. 6.3.7

Diese Überlegungen führen dazu, den **Flächeninhalt** $\omega(S)$ der Fläche

$$S : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$$

folgendermaßen festzusetzen:

$$\omega(S) := \int_B |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| d\mu(u, v) .$$

Der unter dem Integralzeichen erscheinende Ausdruck

$$d\omega := |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| d\mu(u, v)$$

wird als (**skalares**) **Oberflächenelement** bezeichnet.

① (Forts.) Aus (4) ergibt sich für die Oberfläche der 2-Sphäre vom Radius R der Wert

$$\begin{aligned}\omega(S_R^2) &= \int_{[0,2\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| d\mu(\phi, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \theta d\theta \right) d\phi = \int_0^{2\pi} 2R^2 d\phi \\ &= 4\pi R^2,\end{aligned}$$

wie erwartet. ○

② In Fig. 5.2.5 ist das hyperbolische Paraboloid

$$z = x^2 - y^2$$

dargestellt. Es sei S der innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 \leq R^2$ liegende Teil dieser Fläche. Um den Flächeninhalt $\omega(S)$ zu berechnen, bestimmen wir erst das auf beliebige Graphen

$$S: (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

bezügliche Oberflächenelement. Es ist

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$$

und somit

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1). \quad (8)$$

Dies liefert das Oberflächenelement

$$d\omega = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\mu(x, y).$$

Im vorliegenden Beispiel ist $f(x, y) := x^2 - y^2$. Wir haben daher

$$\omega(S) = \int_B d\omega = \int_B \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\mu(x, y);$$

dabei ist B die Kreisscheibe vom Radius R in der (x, y) -Ebene. Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so ergibt sich nach Satz (4.17):

$$\begin{aligned}\omega(S) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right) d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^R \\ &= \frac{\pi}{6} ((1 + 4R^2)^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

○

Fluß eines Vektorfelds durch eine Fläche

Es seien jetzt in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld \mathbf{v} sowie eine Fläche

$$S: B \rightarrow \Omega, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) \quad (9)$$

gegeben. Im folgenden geht es um den Fluß von \mathbf{v} durch S . Hierzu ist es notwendig, die Fläche S zu **orientieren**, das heißt: eine der beiden möglichen Normalenrichtungen als *positiv* zu erklären. Diesbezüglich wollen wir im folgenden annehmen, die Reihenfolge der Variablen u und v sei so gewählt, daß der Vektor

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

die positive Richtung anzeigt. Wir ergänzen die Fig. 6.3.7 durch den Feldvektor $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u_k, v_k)) =: \mathbf{v}$ und überlegen ähnlich wie am Schluß von Abschnitt 6.2.

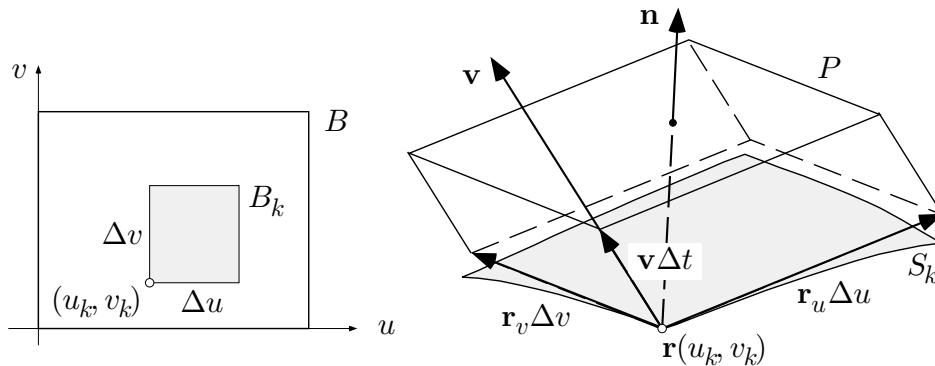


Fig. 6.3.8

Die Flüssigkeitsmenge ΔM , die im Zeitintervall Δt das Flächenstück S_k in positiver Richtung durchquert, füllt angenähert das von den Vektoren

$$\mathbf{r}_u \Delta u, \quad \mathbf{r}_v \Delta v, \quad \mathbf{v} \Delta t$$

aufgespannte Parallelepiped P (Fig. 6.3.8) und läßt sich daher folgendermaßen als Spatprodukt darstellen:

$$\Delta M \doteq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \Delta u \Delta v \Delta t .$$

Diese Formel liefert auch das richtige Vorzeichen, das heißt: Flüssigkeitsmengen, die S_k gegenläufig zu \mathbf{n} durchqueren, werden automatisch negativ gezählt. Somit wird der Fluß Φ_k von \mathbf{v} durch S_k approximativ wiedergegeben durch

$$\Phi_k := \frac{\Delta M}{\Delta t} \doteq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \mu(B_k),$$

und wir erhalten für den Fluß Φ von \mathbf{v} durch die Gesamtfläche S die folgende Näherungsformel:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=1}^N \Phi_k \doteq \sum_{k=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{r}(u_k, v_k)) \cdot (\mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k)) \mu(B_k) \\ &\doteq \int_B \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) d\mu(u, v). \end{aligned} \quad (10)$$

Aufgrund dieser Überlegungen nennt man definitiv das zuletzt angeschriebene Integral den **Fluß** des Vektorfelds \mathbf{v} durch die (orientierte) Fläche S . Damit ist auch schon der Fluß von \mathbf{v} durch eine beliebige **2-Kette** (das ist eine "formale Summe" von glatten Flächenstücken (9)) erklärt.

Der im Flußintegral auftretende Ausdruck

$$d\vec{\omega} := (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) d\mu(u, v) = \mathbf{n} d\omega$$

(vgl. (7)) ist das **vektorielle Oberflächenelement**. Der Fluß (10) läßt sich damit in suggestiver Weise durch

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\vec{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega$$

bezeichnen. Das ändert aber nichts daran, daß für die konkrete Berechnung die Parameterdarstellung von S ins Vektorfeld \mathbf{v} einzusetzen und auch das Oberflächenelement $d\vec{\omega}$ durch u und v auszudrücken sind. Nur in besonders einfachen Fällen gelingt es hie und da, durch direkte geometrische Überlegungen billiger davonzukommen.

③ Es soll der Fluß Φ des Coulombfeldes

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) := \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$$

durch die nach außen orientierte 2-Sphäre S_R^2 berechnet werden. — In den Punkten \mathbf{r} dieser Sphäre (Fig. 6.3.9) ist

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$$

und somit

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \frac{C}{R^2} \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{C}{R^2} .$$

Hieraus folgt

$$\Phi = \int_{S_R^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \frac{C}{R^2} \int_{S_R^2} d\omega = \frac{C}{R^2} \omega(S_R^2) = 4\pi C .$$

Der betrachtete Fluß ist also unabhängig von R . ○

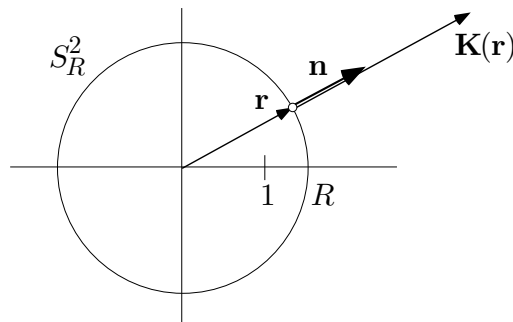


Fig. 6.3.9

② (Forts.) Wir berechnen den Fluß Φ des Feldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (xz, yz, R^2 - x^2 - y^2)$$

von unten nach oben durch die Fläche

$$S : (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x, y) := (x, y, x^2 - y^2) \quad (x^2 + y^2 \leq R^2) .$$

Nach (8) gilt

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-2x, 2y, 1) .$$

Die z -Komponente von $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ ist > 0 ; wir haben also von selbst die richtige Orientierung erwischt. Weiter ist

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) = \mathbf{v}(x, y, x^2 - y^2) = (x(x^2 - y^2), y(x^2 - y^2), R^2 - x^2 - y^2)$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) &= x(x^2 - y^2)(-2x) + y(x^2 - y^2)2y + (R^2 - x^2 - y^2)1 \\ &= R^2 - x^2 - y^2 - 2(x^2 - y^2)^2 . \end{aligned}$$

Aufgrund von (10) haben wir daher das folgende Integral zu berechnen:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_B \mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, d\mu(x, y) \\ &= \int_B (R^2 - x^2 - y^2 - 2(x^2 - y^2)^2) \, d\mu(x, y) .\end{aligned}$$

Der Integrationsbereich B ist die Kreisscheibe vom Radius R ; es liegt daher nahe, zu Polarkoordinaten (r, ϕ) überzugehen. Wegen

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 - y^2 = r^2 \cos(2\phi)$$

erhält man nach (4.17):

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2 - 2r^4 \cos^2(2\phi)) r \, dr \, d\phi .$$

Das innere Integral hat den Wert

$$\left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{3} \cos^2(2\phi) \right) \Big|_0^R = \frac{R^4}{4} - \frac{R^6}{3} \cos^2(2\phi) ,$$

so daß sich schließlich folgendes ergibt:

$$\Phi = \frac{R^4}{4} 2\pi - \frac{R^6}{3} \pi = \frac{\pi}{2} R^4 \left(1 - \frac{2}{3} R^2 \right) .$$

Ist $R > \sqrt{3/2}$, so wird der betrachtete Fluß negativ, obwohl die z -Komponente von \mathbf{v} stets > 0 ist. Wie läßt sich dieses Paradox erklären? \circ

Divergenz und der Satz von Gauß im Raum

Der Satz von Gauß bezieht sich auf ein C^1 -Vektorfeld \mathbf{v} in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und einen kompakten Bereich $B \subset \Omega$.

Als ‘‘Ableitung’’ des Feldes \mathbf{v} erscheint dabei die Divergenz dieses Feldes. Im zweidimensionalen Fall haben wir dafür 6.2.(16) erhalten, im räumlichen Fall ist ein analog gebildeter dritter Term anzuhängen. Die **Divergenz** oder **Quellstärke** des Vektorfeldes

$$\mathbf{v} = (P, Q, R) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

ist also definiert durch

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := P_x + Q_y + R_z \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} .$$

Über den dreidimensionalen Bereich B wird weiter folgendes vorausgesetzt: B wird berandet durch endlich viele glatte Flächenstücke S_i ($1 \leq i \leq r$), die längs sichtbaren oder unsichtbaren Kanten “zusammengenäht” sind, siehe die Fig. 6.3.10. Die S_i bilden zusammen eine geschlossene zweidimensionale Kette (einen sogenannten **2-Zyklus**), die wir die **Oberfläche** von B nennen und mit ∂B bezeichnen:

$$\partial B := S_1 + S_2 + \dots + S_r .$$

Dabei haben wir stillschweigend angenommen, die S_i seien so orientiert, daß die Flächennormale \mathbf{n} durchwegs ins Äußere von B zeigt.

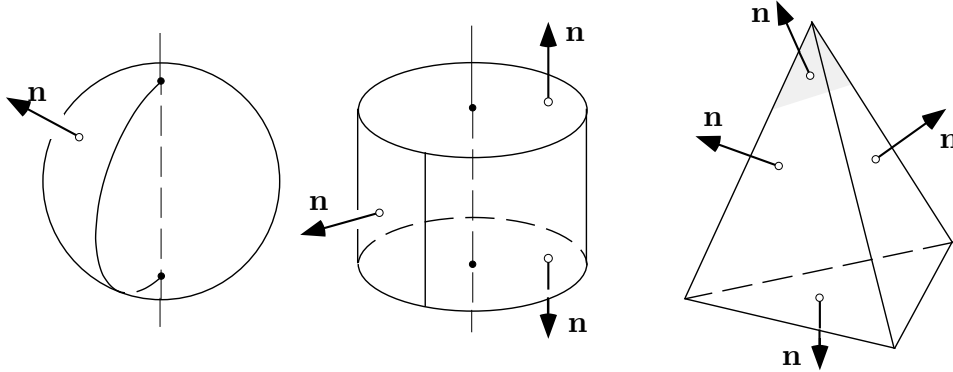


Fig. 6.3.10

Damit sind wir endlich in der Lage, den **Satz von Gauß**, auch **Divergenzsatz** genannt, zu formulieren:

(6.7) *Es seien \mathbf{v} ein C^1 -Vektorfeld auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit nach außen orientierter Oberfläche ∂B . Dann gilt*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\vec{\omega} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu .$$

In Worten: Der Fluß von \mathbf{v} durch die Oberfläche von B nach außen ist gleich dem Integral der Divergenz von \mathbf{v} über das Innere von B . Die physikalische Interpretation ist dieselbe wie im zweidimensionalen Fall: Die pro Zeiteinheit aus B herauskommende Flüssigkeitsmenge wird im Inneren von B mit örtlich variabler Intensität ($:=$ Produktion pro Volumeneinheit und Zeiteinheit) oder eben “Quellstärke” $\operatorname{div} \mathbf{v}$ produziert und ist somit gleich dem Integral dieser Intensität über B .

Daß $\operatorname{div} \mathbf{v}$ tatsächlich die Intensität der Flüssigkeitsproduktion darstellt, beweist man wie 6.2.(18): Es bezeichne B_ε die Kugel vom Radius ε um den Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ und $\Phi(B_\varepsilon)$ den aus B_ε heraustretenden Fluß (Fig. 6.3.11). Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{p}) .$$

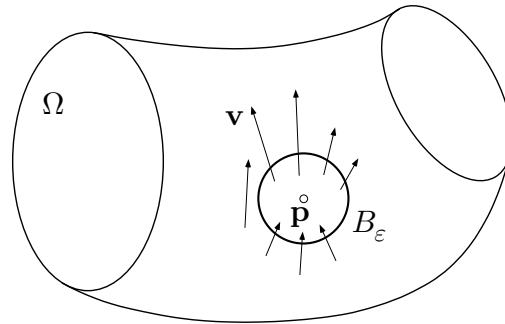


Fig. 6.3.11

Wir haben versprochen, den Satz von Gauß nicht zu beweisen. Der Beweis verläuft an sich ähnlich wie derjenige der Greenschen Formel (6.3): Der Satz wird rechnerisch zunächst für besonders "einfache" Bereiche bewiesen, und allgemeine Bereiche B werden in einfache zerlegt, wobei sich die Integrale über die Schnittflächen im Inneren von B herausheben, siehe die Fig. 6.3.12.

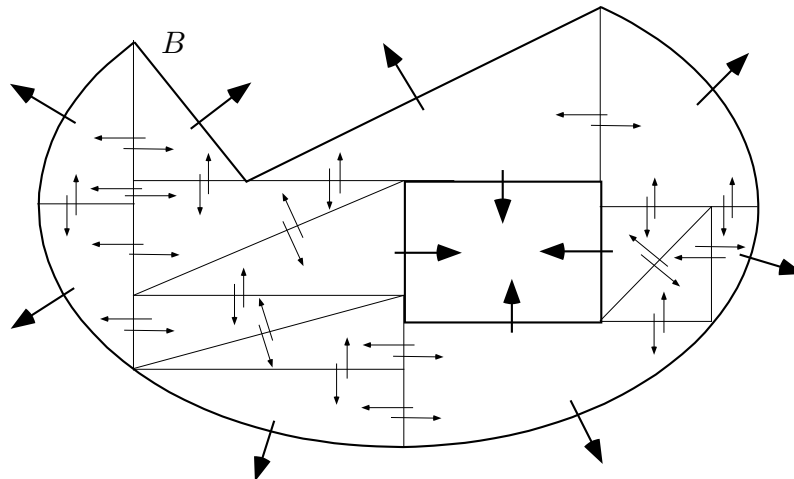


Fig. 6.3.12

④ Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$$

aus dem Kegel

$$B := \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$

(Fig. 6.3.13) heraus einmal als Flußintegral und einmal mit Hilfe des Divergenzsatzes.

Für die Deckfläche S_1 wählen wir als Parameterbereich den Einheitskreis D der (x, y) -Ebene. Ohne Rechnung ergibt sich

$$\mathbf{n} \, d\omega = (0, 0, 1) \, d\mu(x, y)$$

und somit (auf S_1 ist $z \equiv 1$):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = (2x - y, x + 3y, xy - 1) \cdot (0, 0, 1) \, d\mu(x, y) = (xy - 1) \, d\mu(x, y) .$$

Wir erhalten daher

$$\int_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \int_D (xy - 1) \, d\mu(x, y) = -\pi ;$$

dabei hat der Term xy aus Symmetriegründen keinen Beitrag geliefert.

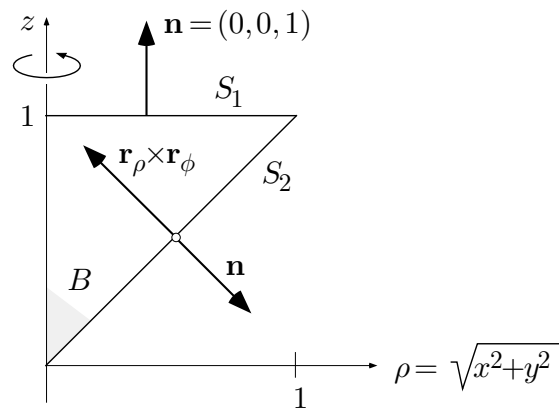


Fig. 6.3.13

Für die Mantelfläche S_2 verwenden wir die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = \rho \end{array} \right\} \quad (0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \phi \leq \pi),$$

also (5) mit $\alpha := \frac{\pi}{4}$. Nach (6) gilt somit

$$\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi = \rho(-\cos \phi, -\sin \phi, 1).$$

Da dieser Vektor ins Innere von B zeigt, müssen wir im weiteren das Vorzeichen richtigstellen. Wir benötigen noch

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) = (2\rho \cos \phi - \rho^2 \sin \phi, \rho^2 \cos \phi + 3\rho \sin \phi, \rho^2 \cos \phi \sin \phi - \rho).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega &= - \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi) \, d\mu(\rho, \phi) \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (2\rho^2 \cos^2 \phi - \rho^3 \sin \phi \cos \phi + \rho^3 \cos \phi \sin \phi \\ &\quad + 3\rho^2 \sin^2 \phi - \rho^3 \cos \phi \sin \phi + \rho^2) \, d\phi \, d\rho. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \phi \, d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos \phi \sin \phi \, d\phi = 0$$

ergibt sich hieraus weiter

$$\int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \int_0^1 (2\pi\rho^2 + 3\pi\rho^2 + 2\pi\rho^2) \, d\rho = 7\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{7\pi}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = \int_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega + \int_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = -\pi + \frac{7\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Andererseits ist

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz + 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - z) \equiv 2 + 3 - 1 = 4,$$

und damit ergibt sich

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu = 4 \int_B d\mu(x, y, z) = 4\mu(B) = \frac{4\pi}{3},$$

wie vorher. ○

Anwendung: Die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

⑤ Die Abläufe in einem strömenden Medium (Flüssigkeit oder Gas) lassen sich mit Hilfe von zwei Funktionen ρ und \mathbf{v} beschreiben: $\rho(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet die Dichte des Mediums an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zur Zeit t und $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ die Geschwindigkeit der Masseteilchen an der Stelle \mathbf{x} zur Zeit t . Die örtlichen und zeitlichen Änderungsraten dieser Funktionen sind aneinander gekoppelt durch eine gewisse partielle Differentialgleichung, die wir nun herleiten wollen.

Wir gehen davon aus, daß in dem strömenden Medium weder Masse produziert noch Masse vernichtet wird. Wenn also insgesamt Masse aus einem Raumbereich abströmt, so muß dabei die Dichte ρ im Inneren dieses Bereiches entsprechend abnehmen. Es geht nun darum, diesen Sachverhalt auch quantitativ richtig zu erfassen und in einer prägnanten Formel zum Ausdruck zu bringen.

Das strömende Medium erfüllt ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Es sei $B \subset \Omega$ ein kleiner "Probereich", der für den Moment festgehalten wird und sich nicht mit der Strömung mitbewegt. Zur Zeit t befindet sich in B eine gewisse Gesamtmasse

$$M(t) := \int_B \rho(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) .$$

Diese Masse besitzt eine zeitliche Änderungsrate, die sich nach der Leibnizschen Regel (5.4) folgendermaßen berechnet:

$$M'(t) = \int_B \rho_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (11)$$

Die Veränderung der in B enthaltenen Masse ergibt sich aus dem Zu- und Wegströmen von Masseteilchen durch die Oberfläche ∂B . Quantitativ ausgedrückt: Die Änderungsrate von $M(\cdot)$ ist gleich dem "Massenfluß" durch ∂B ,

$$-M'(t) = \int_{\partial B} (\rho \mathbf{v}) \cdot d\vec{\omega} ;$$

dabei haben wir berücksichtigt, daß nach außen fließende Masse eine Abnahme von M zur Folge hat. Wenden wir auf das letzte Integral den Satz von Gauß an, so ergibt sich

$$-M'(t) = \int_B \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mu . \quad (12)$$

Wir addieren nun die Gleichungen (11) und (12):

$$\int_B (\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) d\mu = 0 .$$

Diese Beziehung gilt für jeden Probereich $B \subset \Omega$ und zu jedem Zeitpunkt t . Stellen wir uns B als transportables kleines Kügelchen vor, so sehen wir, daß der Integrand notwendig identisch verschwindet:

$$\forall \mathbf{x}, \forall t: \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (13)$$

Dies ist das erste Grundgesetz der Hydrodynamik, die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**. Ist die Strömung **stationär** (das heißt: ρ und \mathbf{v} hängen nicht von t ab), so gilt $\rho_t \equiv 0$, und (13) geht über in $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Ist das Medium inkompressibel, was bei Flüssigkeiten im allgemeinen angenommen werden darf, so ist ρ räumlich und zeitlich konstant. Die Gleichung (13) lautet dann einfach

$$\forall \mathbf{x}, \forall t: \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

in Worten: Das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit ist divergenzfrei. (*Hinweis:* Die Operatoren ∇ , div , Δ , **rot** (s.u.) wirken nur auf die Raumvariablen.) \bigcirc

Die Wärmeleitungsgleichung

Im folgenden geht es um die Wärmeleitung in einem homogenen Medium. Wir stellen uns vor, das Medium erfülle ein gewisses Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, und nehmen an, daß sich im Inneren von Ω keine wärmeerzeugenden oder wärmevernichtenden Vorgänge abspielen. Hingegen wird durch Wärmeleitung Wärme verschoben, was mit der Zeit zu einem Ausgleich der Temperatur führt, wenn nicht durch thermische Einwirkung von außen (das heißt: durch die Oberfläche von Ω) ein Temperaturgradient aufrechterhalten wird. Da aber nichts Sichtbares mit wohldefinierter Geschwindigkeit strömt, liegt a priori kein Strömungsfeld wie in Beispiel (5) vor, und wir müssen neuartige Überlegungen anstellen, wenn wir die Wärmeleitung mathematisch beschreiben wollen.

Der Temperaturzustand unseres Mediums läßt sich mit einer einzigen Funktion u erfassen: Der Funktionswert $u(\mathbf{x}, t)$ stellt die Temperatur an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zur Zeit t dar. Oft beschränkt man sich auf den **stationären** Fall, bei dem die Temperatur u nur von \mathbf{x} abhängt. Die unter dem Regime der Wärmeleitung sich einstellenden räumlichen und zeitlichen Änderungsraten der Funktion u sind aneinander gekoppelt durch eine gewisse partielle Differentialgleichung, die wir nun herleiten wollen.

Wir betrachten zunächst eine besonders einfache Modellsituation (siehe die Fig. 6.3.14): Die Temperatur hänge nur von x_3 (insbesondere nicht von t) ab und nehme linear mit x_3 zu:

$$u(\mathbf{x}, t) := u_0 + \eta x_3.$$

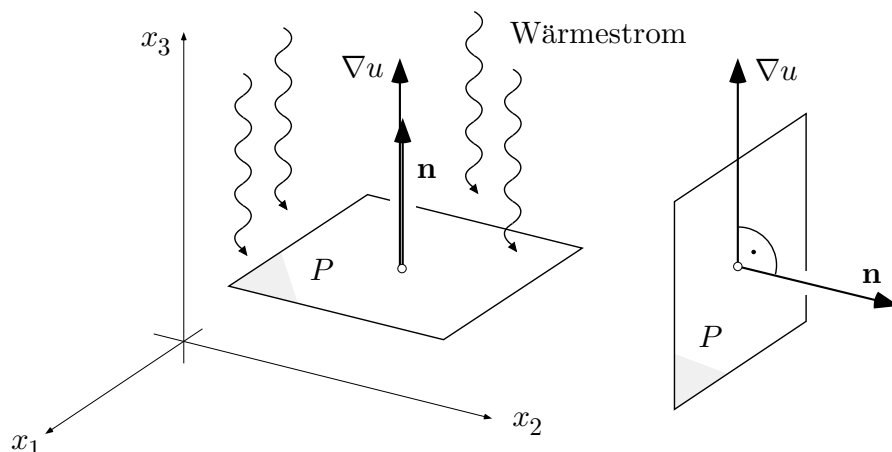


Fig. 6.3.14

Die Konstante $\eta > 0$ stellt die Temperaturzunahme pro Längeneinheit dar und ist gleich dem Betrag des Temperaturgradienten $\nabla u = (0, 0, \eta)$. Es sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine zunächst horizontale Parallelogrammfläche, die wir uns nach oben orientiert denken. Es liegt nahe, den **Wärmefluß** $\Phi(P)$ — gemeint ist die Wärmemenge, die *pro Zeiteinheit* das Parallelogramm in Richtung $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ durchströmt — wie folgt zu veranschlagen:

$$\Phi(P) = -k \eta \omega(P) .$$

Dabei ist k eine Materialkonstante, die **Wärmeleitfähigkeit** des betreffenden Mediums. Ein großer k -Wert bedeutet große Wärmeleitfähigkeit. Das Minuszeichen drückt aus, daß die Wärme von oben nach unten strömt, wenn die Temperatur von unten nach oben zunimmt.

Wird nun das Parallelogramm P gekippt, so verändert sich auch der Fluß $\Phi(P)$, und in dem Grenzfall, wo P parallel zur x_3 -Achse ist, wird $\Phi(P) = 0$. Die Intuition sagt uns, daß die Formel

$$\Phi(P) = -k (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \omega(P)$$

den fraglichen Fluß für beliebige Stellung von P richtig wiedergibt.

Es sei jetzt u eine beliebige Temperaturverteilung in dem Gebiet Ω und $P \subset \Omega$ ein kleines orientiertes Parallelogramm mit Mittelpunkt \mathbf{x} . Für die Wärmemenge, die in einem sehr kurzen Zeitintervall $[t_0 - h, t_0 + h]$ durch dieses Parallelogramm fließt, kommt es nur auf die Verhältnisse in der unmittelbaren Nähe des "Weltpunktes" (\mathbf{x}, t_0) an. Mit Mikroskop und Zeitlupe betrachtet sind aber diese Verhältnisse von der Art, wie wir sie eben diskutiert haben: homogen und stationär. Hieraus folgt: Der Wärmefluß durch das betrachtete Parallelogramm hat zur Zeit t_0 den Wert

$$\Phi(P) \doteq -k (\nabla u(\mathbf{x}, t_0) \cdot \mathbf{n}) \omega(P) , \quad (14)$$

und der Wärmefluß durch eine makroskopische orientierte Fläche $S \subset \Omega$ hat folglich zu jeder Zeit t den (von t abhängigen) Wert

$$\Phi(S) = - \int_S k \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\omega . \quad (15)$$

Man bezeichnet übrigens die Größe

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}} u =: \frac{\partial u}{\partial n}$$

als **Normalenableitung** der Funktion u . Die Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ ist nur in den Punkten \mathbf{x} einer gegebenen orientierten Fläche S definiert (Fig. 6.3.15). Dieser Begriff erlaubt, die Formeln (14) und (15) in folgender Weise zu schreiben:

$$d\Phi = -k \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega ,$$

in Worten: Der Wärmedurchsatz pro Flächeneinheit ist proportional zur Normalenableitung der Temperatur, und

$$\Phi(S) = - \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega .$$

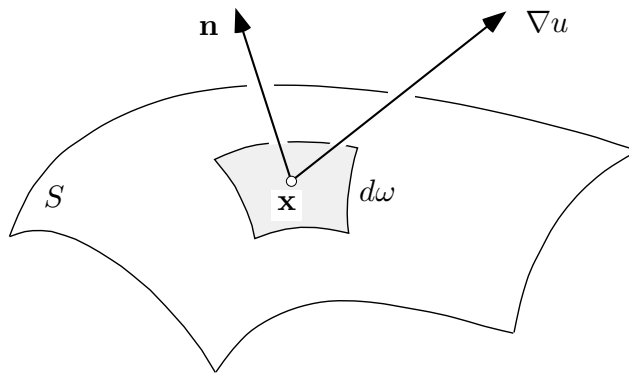


Fig. 6.3.15

Wie in Beispiel ⑤ führen wir jetzt einen Probebereich $B \subset \Omega$ ein, den wir für den Moment festhalten. Die gesamte zur Zeit t in dem Bereich B gespeicherte Wärmemenge $W(t)$ ist gegeben durch

$$W(t) = \int_B c\rho u(\mathbf{x}, t) \, d\mu(\mathbf{x}) .$$

Dabei sind c und ρ Materialkonstanten: c ist die sogenannte Wärmekapazität des betreffenden Mediums und ρ dessen Dichte. Die zeitliche Änderungsrate von $W(\cdot)$ ist damit gegeben durch

$$W'(t) = \int_B c\rho u_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) \quad (16)$$

(vgl. ⑤). Die momentane Änderungsrate $W'(t)$ ist andererseits gleich dem zur Zeit t wirksamen Wärmefluß durch ∂B ; dabei ist zu berücksichtigen, daß abfließende Wärme eine Abnahme von W zur Folge hat. Aufgrund von (15) gilt daher

$$W'(t) = -\Phi(\partial B) = \int_{\partial B} k \nabla u \cdot \mathbf{n} d\omega .$$

Wir verwandeln das letzte Integral mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Integral über B und erhalten

$$W'(t) = \int_B k \operatorname{div}(\nabla u) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (17)$$

Hier erscheint neu die Skalarfunktion

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(u_x, u_y, u_z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

(in Koordinaten x, y, z). Der für C^2 -Funktionen von n Raumvariablen definierte Differentialoperator

$$\Delta : \quad u \mapsto \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

ist so ziemlich der wichtigste überhaupt und heißt **Delta-Operator** oder auch **Laplace-Operator**. Gleichung (17) geht damit über in

$$W'(t) = \int_B k \Delta u d\mu(\mathbf{x}) ,$$

und im Verein mit (16) erhalten wir

$$\int_B (c\rho u_t - k \Delta u) d\mu(\mathbf{x}) = 0 .$$

Da der Probebereich B ganz beliebig ist, schließen wir hieraus wie im hydrodynamischen Fall: Der Integrand muß identisch in \mathbf{x} und t verschwinden. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$\frac{k}{c\rho} =: a^2$$

und erhalten damit die sogenannte **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u . \quad (18)$$

Der Stofftransport durch Diffusion in einem ruhenden Trägermedium erfolgt übrigens nach demselben Gesetz; dabei stellt $u(\mathbf{x}, t)$ die Konzentration des diffundierenden Stoffes an der Stelle \mathbf{x} zur Zeit t dar.

Im stationären Fall ist $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$; die Temperaturverteilung (oder Konzentrationsverteilung) $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$ genügt dann der **Laplace-** oder **Potentialgleichung**

$$\Delta u = 0 . \quad (19)$$

Geometrische Erklärung des Laplace-Operators

Damit man (18) und (19) besser versteht, geben wir noch eine geometrische Interpretation des Laplace-Operators, wobei wir uns für die Rechnung den Fall $n = 3$ vornehmen. Es genügt, eine Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$$

in der Umgebung des Ursprungs $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ zu betrachten. Nach der Taylorschen Formel gilt

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^3 u_{.i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} u_{.ik} x_i x_k + o(r^2) \quad (r \rightarrow 0); \quad (20)$$

dabei sind die partiellen Ableitungen von u an der Stelle $\mathbf{0}$ zu nehmen, sind also Konstanten. Im folgenden geht es darum, ob $u(\mathbf{x})$ im Mittel über eine kleine 2-Sphäre S_r um $\mathbf{0}$ eher größer ist als $u(\mathbf{0})$ oder nicht. Wir betrachten daher das Integral

$$A(r) := \int_{S_r} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})) \, d\omega(\mathbf{x})$$

(Fig. 6.3.16). Aus (20) ergibt sich

$$A(r) = \sum_{i=1}^3 u_{.i} \int_{S_r} x_i \, d\omega + \frac{1}{2} \sum_{i,k} u_{.ik} \int_{S_r} x_i x_k \, d\omega + o(r^4),$$

denn S_r besitzt den Flächeninhalt $4\pi r^2$. Hier sind die Integrale

$$\int_{S_r} x_i \, d\omega, \quad \int_{S_r} x_i x_k \, d\omega \quad (i \neq k)$$

aus Symmetriegründen gleich 0, und die Integrale $\int_{S_r} x_i^2 d\omega$ haben alle denselben Wert, nämlich

$$\int_{S_r} x_i^2 d\omega = \frac{1}{3} \int_{S_r} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d\omega = \frac{r^2}{3} \int_{S_r} d\omega = \frac{4\pi}{3} r^4 .$$

Damit ergibt sich

$$A(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_{.ii} \cdot \frac{4\pi}{3} r^4 + o(r^4) = \frac{2\pi}{3} r^4 \Delta u + o(r^4) .$$

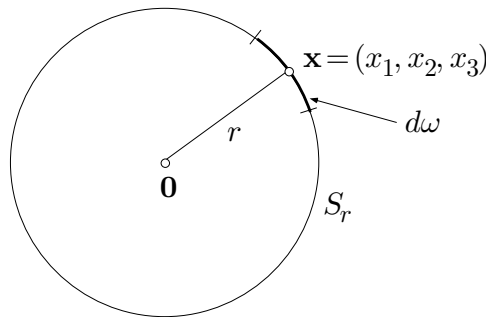


Fig. 6.3.16

Die Größe, die uns interessiert, ist ja $\Delta u := \Delta u(\mathbf{0})$. Lösen wir die letzte Gleichung nach Δu auf, so folgt

$$\Delta u(\mathbf{0}) = \frac{3}{2\pi r^4} A(r) + o(1) \quad (r \rightarrow 0) ,$$

das heißt:

$$\Delta u(\mathbf{0}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{6}{r^2} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})) d\omega(\mathbf{x}) \right) .$$

In Worten: $\Delta u(\mathbf{0})$ ist bis auf einen Skalierungsfaktor gleich dem mittleren Mehrwert von u in den Punkten \mathbf{x} rund um $\mathbf{0}$ gegenüber dem Wert von u an der Stelle $\mathbf{0}$. Die Wärmeleitungsgleichung (18) erhält damit folgende anschauliche Interpretation: Wenn es in den Punkten rund um \mathbf{x} zur Zeit t im Schnitt wärmer ist als an der Stelle \mathbf{x} , so wird die Temperatur an der Stelle \mathbf{x} in der nächsten Sekunde zunehmen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die im wesentlichen proportional ist zu der über alle Richtungen von \mathbf{x} aus gemittelten räumlichen Temperaturzunahme.

Im stationären Fall ($\Delta u \equiv 0$) ist die Temperatur an jeder Stelle \mathbf{x} "innerlich ausgewogen", und $u(\mathbf{x})$ wird von den Temperaturwerten rund um \mathbf{x} per saldo

weder nach oben noch nach unten gezogen. Funktionen, die der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ genügen, werden **harmonische Funktionen** genannt (dies hat nichts mit harmonischen Schwingungen zu tun). Harmonische Funktionen sind wunderbarerweise von selbst beliebig oft differenzierbar, obwohl in ihrer Definition nur von zweiten Ableitungen die Rede ist.

Aufgaben

1. (M) Skizziere die Fläche S mit der Parameterdarstellung

$$S : (r, \phi) \mapsto \begin{cases} x := r \cos \phi \\ y := r \sin \phi \\ z := c \phi \end{cases} \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi < 2\pi),$$

c eine positive Konstante, und berechne den Flächeninhalt $\omega(S)$.

2. Die Fläche

$$S_\varepsilon : z = 1 + \varepsilon r^n \sin(n\phi) \quad (0 \leq r \leq 1; \text{Zylinderkoordinaten})$$

modelliert eine radial gefältelte Membran über dem Einheitskreis der (x, y) -Ebene.

- (a) Produziere eine handliche Parameterdarstellung von S .
- (b) Stelle den Flächeninhalt $\omega(S_\varepsilon)$ als möglichst einfaches (für $n > 3$ leider nicht elementares) Integral dar.
- (c) Berechne näherungsweise die aus der Fältelung resultierende Oberflächenvergrößerung $\omega(S_\varepsilon) - \omega(S_0)$ unter der Annahme $\varepsilon \ll 1$. (*Hinweis*: Man darf in (b) den Integranden durch eine erste Näherung ersetzen.)
3. Verifiziere: Das Coulombfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}$ ($r := |\mathbf{x}|$) ist divergenzfrei. (*Hinweis*: Verwende $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$.)
4. Berechne den Fluß des Vektorfeldes $\mathbf{K}(x, y, z) := (yz, zx, xy)$ von innen nach außen durch den im ersten Oktanten gelegenen Teil der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(*Hinweis*: Die Parameterdarstellung der 2-Sphäre geeignet anpassen.)

5. Es sei B der im ersten Oktanten gelegene Teil der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 . Berechne den aus B heraustretenden Fluß des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (\alpha x, \beta y, \gamma z)$$

einmal als Flußintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

6. Finde und beweise dabei koordinatenfreie Identitäten der Form

(a) $\operatorname{div}(f \mathbf{v}) = \dots$,

(b) $\operatorname{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) = \dots$,

(c) $\operatorname{div}(f \operatorname{rot} \mathbf{K}) = \dots$

für C^1 -Skalarfunktionen und C^2 -Vektorfelder im \mathbb{R}^3 .

7. Die Feldvektoren eines Strömungsfeldes $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ im \mathbb{R}^3 sind parallel zur (x, y) -Ebene, von der z -Achse aus radial nach außen gerichtet und besitzen den konstanten Betrag 1. Auf der z -Achse sei $\mathbf{v} := \mathbf{0}$.

- (a) Bestimme P, Q, R als Funktionen von x, y, z .

- (b) Berechne den Fluß dieses Feldes von innen nach außen durch den Mantel M des Kreiskegels $K := \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$. (*Hinweis:* Die besondere Geometrie dieser Situation erlaubt, den gesuchten Fluß sozusagen “im Kopf” auszurechnen.)

- (c) Berechne den Fluß von \mathbf{v} durch die nach außen orientierte Einheitskugel S^2 . (*Hinweis:* Anhand der Fig. 6.3.17 läßt sich die Rechnung wesentlich vereinfachen.)

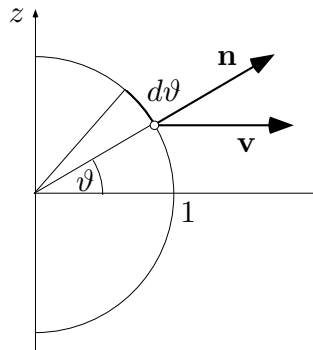


Fig. 6.3.17

8. Bestimme die sämtlichen Polynome in zwei Variablen x und y vom Grad ≤ 2 , die als Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch sind, d.h. der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ genügen.

9. Berechne den Fluß des Feldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$ von innen nach außen durch die Oberfläche des Oktaeders $P := \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$, und zwar
- als Flußintegral, unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrien,
 - mit Hilfe des Satzes von Gauß (das Integral läßt sich “im Kopf” ausrechnen).
10. Es sei S das Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$, so orientiert, daß \mathbf{n} vom Ursprung wegzeigt. Berechne den Fluß Φ des Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$ durch S , und zwar
- als Flußintegral,
 - mit Hilfe des Satzes von Gauß, angewandt auf einen geeigneten dreidimensionalen Bereich B .
11. Ein ebenes Feld $\mathbf{K}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, das sowohl divergenzfrei wie **wirbelfrei** (d.h. $Q_x - P_y \equiv 0$) ist, wird **harmonisch** genannt.
- Warum wohl?
 - Es sei \mathbf{K} ein harmonisches ebenes Feld und \mathbf{K}_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor um den Winkel α gedreht wird. Zeige: Dann ist auch \mathbf{K}_α harmonisch.
12. Betrachte im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, die nur von $|\mathbf{x}| =: r$ abhängige Funktion

$$u(\mathbf{x}) := r^\alpha,$$

α ein reeller Parameter. Es ist $\Delta u = C r^{\alpha-2}$ für ein gewisses von der Raumdimension n abhängiges C . Berechne C .

(*Hinweis:* Verwende wiederholt $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$.)

6.4 Der Satz von Stokes

Für den dritten klassischen Integralsatz der Vektoranalysis interpretieren wir die gegebenen Vektorfelder wieder als Kraftfelder oder als elektrische Felder und verwenden als Variable dafür den Buchstaben \mathbf{K} . Es geht im folgenden um Linienintegrale

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

längs geschlossenen Kurven γ im (dreidimensionalen) Raum (Fig. 6.4.1). Man nennt (1) auch die **Zirkulation** des Feldes \mathbf{K} längs γ . Die Zirkulation ist besonders groß, wenn \mathbf{K} längs γ durchwegs die Richtung des Tangentialvektors $\mathbf{r}'(t)$ hat, so daß sich die von den einzelnen “Kurvenelementen” $d\mathbf{r}$ herrührenden Beiträge laufend kumulieren. Dies ist zum Beispiel der Fall für das in Beispiel 6.2.④ betrachtete Feld $\mathbf{A} := \nabla \arg$ (“Magnetfeld der stromdurchflossenen z -Achse”) und einen Kreis γ um die z -Achse herum.

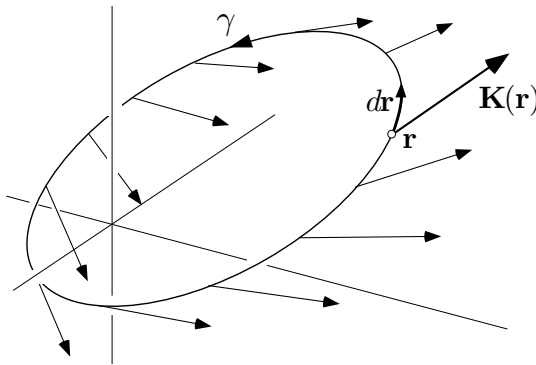


Fig. 6.4.1

Die Greensche Formel (6.3) bezieht sich auf ein Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q)$ in einem Gebiet Ω der (x, y) -Ebene und einen Bereich $B \subset \Omega$ mit Randzyklus ∂B . Sie verwandelt die Zirkulation von \mathbf{K} längs ∂B in das Integral einer gewissen “Ableitung” von \mathbf{K} (genau: des Ausdrucks $Q_x - P_y$) über das Innere von B .

Der Randzyklus einer orientierten Fläche

Der Satz von Stokes ist die räumliche Version der Greenschen Formel. Er bezieht sich auf ein Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine orientierte Fläche (2-Kette) $S \subset \Omega$ mit Randzyklus ∂S (Fig. 6.4.2). Nach diesem Satz ist die Zirkulation von \mathbf{K} längs ∂S gleich dem Integral einer “Ableitung” von \mathbf{K} , der sogenannten Rotation, über die Fläche S , genau:

gleich dem Fluß von $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ durch S . Man beweist den Satz von Stokes, indem man eine Parameterdarstellung

$$S: B \rightarrow \Omega, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) \quad (2)$$

heranzieht und die Greensche Formel auf B , ∂B und den Pullback $\mathbf{K}^* = (P^*, Q^*)$ von \mathbf{K} anwendet. Die Rechnung ist allerdings ziemlich mühsam, weshalb wir im folgenden nicht alle Details ausführen.

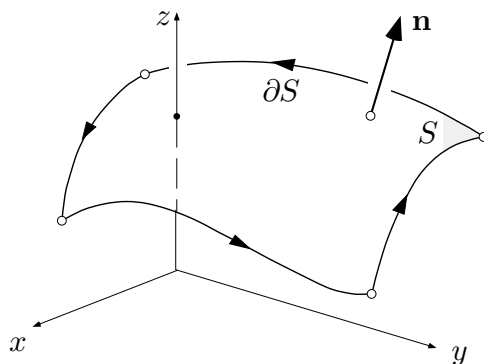


Fig. 6.4.2

Wir setzen also voraus, daß die Fläche (2-Kette) S eine C^2 -Parameterdarstellung (2) besitzt, wobei der Parameterbereich B den Voraussetzungen der Greenschen Formel (6.3) genügt. Insbesondere gehört zu B ein Randzyklus ∂B , der das Innere von B zur Linken läßt. B braucht aber nicht zusammenhängend zu sein.

Die Parameterdarstellung (2) liefert zu jeder glatten Kurve

$$\gamma: t \mapsto (u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

im Parameterbereich B eine Kurve

$$\mathbf{r}(\gamma): t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

im Raum. In der Folge besitzt der Randzyklus

$$\partial B = \gamma_1 + \dots + \gamma_r$$

des Parameterbereichs B einen wohlbestimmten Bildzyklus

$$\partial S := \mathbf{r}(\partial B);$$

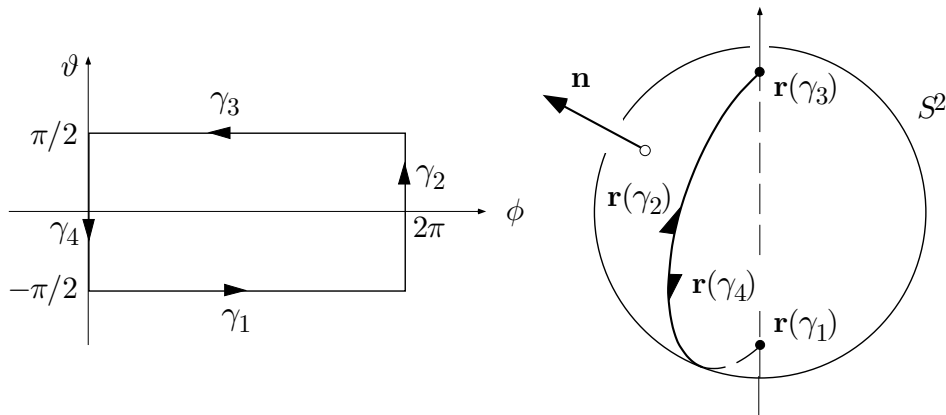


Fig. 6.4.3

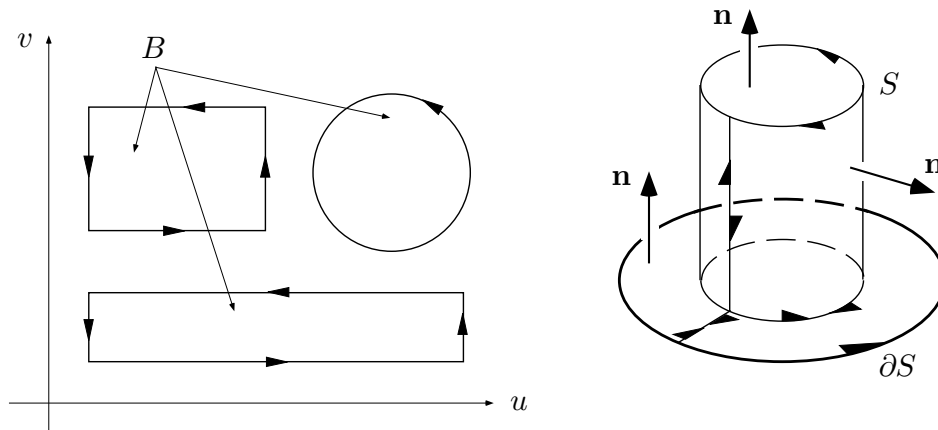


Fig. 6.4.4

dies ist der **Randzyklus** der Fläche S . Dabei kann es durchaus vorkommen, daß die Parameterdarstellung (2) gewisse γ_i einzeln oder in Paaren annulliert, so daß ∂S in Wirklichkeit aus weniger Kurven besteht, als formal in Erscheinung treten; siehe die Figuren 6.4.3–4. Ist $\partial S = 0$, so heißt die Fläche S **geschlossen**. 2-Sphären und Torusflächen, allgemein die Oberflächen von dreidimensionalen Bereichen B im Sinn von Satz (6.7), sind geschlossen. Das ergibt sich aus dem “Urprinzip” $\partial(\partial B) = 0$.

Was die Orientierung von S betrifft, so legt (2) vermöge

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

eine Normalenrichtung fest. Diese Normalenrichtung ist auf folgende Weise mit dem Umlaufssinn von ∂S gekoppelt: Blickt man von der Spitze von \mathbf{n}

her auf S , so läuft ∂S einmal im Gegenuhrzeigersinn um S herum. Anders ausgedrückt: Der Umlauf um ∂S bildet mit \mathbf{n} eine Rechtsschraube.

□ Wir verifizieren das nur in dem folgenden trivialen Spezialfall: Es sei S die Kreisscheibe mit Mittelpunkt O und Radius 1 in der (x, y) -Ebene, aufgefaßt als Fläche im Raum. S besitzt die Parameterdarstellung

$$B \rightarrow S, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) := (u, v, 0)$$

mit derselben Kreisscheibe ($=: B$) in der (u, v) -Ebene als Parameterbereich, siehe die Fig. 6.4.5. Der Randzyklus von B ,

$$\partial B: \quad t \mapsto \begin{cases} u(t) := \cos t \\ v(t) := \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

geht dabei über in den Randzyklus von S ,

$$\partial S: \quad t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)) = (\cos t, \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Andererseits ist

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \equiv (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

und somit $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Blickt man nun vom Punkt $(0, 0, 1)$ auf die (x, y) -Ebene hinunter, so geht ∂S in der Tat einmal im Gegenuhrzeigersinn um S herum. □

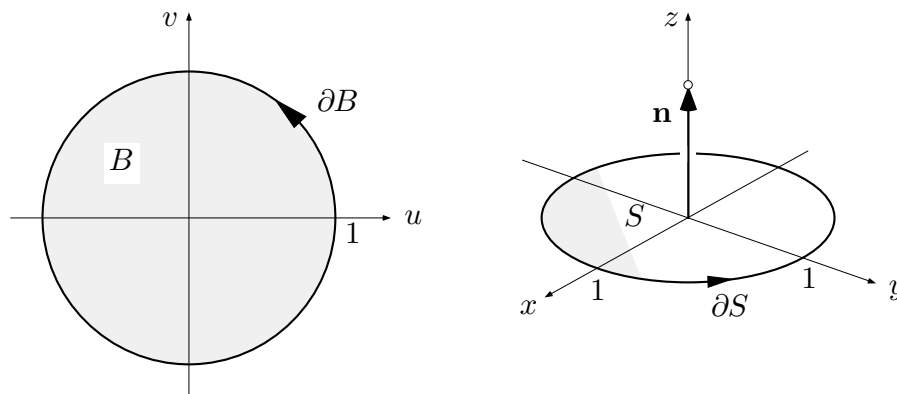


Fig. 6.4.5

Von der Greenschen Formel zum Satz von Stokes

Es sei jetzt $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ ein C^1 -Vektorfeld in dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und S eine in Ω liegende Fläche (2-Kette) der beschriebenen Art, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, der Randzyklus ∂B des Parameterbereichs B bestehe aus einer einzigen glatten Kurve

$$\partial B : t \mapsto (u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

(Fig. 6.4.6). Der Randzyklus von S ist dann gegeben durch

$$\partial S : t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b) . \quad (3)$$

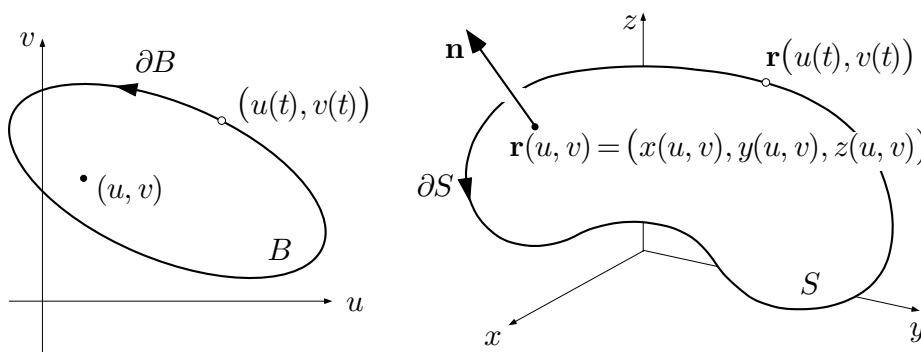


Fig. 6.4.6

Wir gehen nun daran, die Zirkulation

$$Z := \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$$

von \mathbf{K} längs ∂S zu berechnen. Aufgrund von (3) hat man zunächst

$$Z = \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{r}(u(t), v(t))) \cdot (\mathbf{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{r}_v(u(t), v(t))v'(t)) dt .$$

Wir können dieses Integral als Linienintegral längs ∂B interpretieren, und zwar für das Feld $\mathbf{K}^* = (P^*, Q^*)$ mit

$$P^*(u, v) := \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u(u, v) , \quad Q^*(u, v) := \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_v(u, v) .$$

Wir haben also

$$Z = \int_{\partial B} (P^* du + Q^* dv)$$

und können hierauf die Greensche Formel **(6.3)** anwenden. Es ergibt sich

$$Z = \int_B H(u, v) d\mu(u, v) \quad (4)$$

mit

$$H(u, v) := Q_u^* - P_v^* = \frac{\partial}{\partial u} \left(\mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_v(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u(u, v) \right).$$

Hier sind die Skalarprodukte nach der Produktregel zu differenzieren. Dabei heben sich die beiden \mathbf{r}_{uv} -Terme heraus, und es bleibt

$$H(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_v - \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u.$$

Aufgrund der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) = (\nabla P \cdot \mathbf{r}_u, \nabla Q \cdot \mathbf{r}_u, \nabla R \cdot \mathbf{r}_u)$$

und Entsprechendes für $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v))$. Damit ergibt sich

$$H(u, v) = (\nabla P \cdot \mathbf{r}_u, \nabla Q \cdot \mathbf{r}_u, \nabla R \cdot \mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v - (\nabla P \cdot \mathbf{r}_v, \nabla Q \cdot \mathbf{r}_v, \nabla R \cdot \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_u.$$

Hiernach ist H linear in “ $\nabla \mathbf{K}$ ” (gemeint ist: in den ersten partiellen Ableitungen von P, Q, R nach x, y, z), und H ist bilinear und schiefsymmetrisch in den Vektorargumenten \mathbf{r}_u und \mathbf{r}_v . Die genaue Rechnung zeigt, daß sich $H(u, v)$ folgendermaßen schreiben läßt:

$$H(u, v) = \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v). \quad (5)$$

Dabei sind die auftretenden Ableitungen von P, Q, R auf bestimmte Weise zusammengefaßt in dem Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{K} &:= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R), \end{aligned} \quad (6)$$

der **Rotation** von $\mathbf{K} = (P, Q, R)$. In nummerierten Koordinaten ist

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \left(\frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3}, \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1}, \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \right)$$

(zyklische Vertauschung!). Die Rotation ist ein weiteres, von \mathbf{K} abgeleitetes, Vektorfeld.

Wir setzen nun (5) in (4) ein und erhalten

$$\begin{aligned} Z &= \int_B \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) d\mu(u, v) \\ &= \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} . \end{aligned}$$

In Worten: Die Zirkulation Z von \mathbf{K} längs ∂S ist gleich dem Fluß von $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ durch die (orientierte) Fläche S . Wir haben damit den **Satz von Stokes** bewiesen:

(6.8) (S , ∂S und \mathbf{K} haben die angegebene Bedeutung.)

$$\int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} .$$

Geometrische Erklärung der Rotation

Diese Formel hat natürlich erst dann einen Sinn, wenn wir auch die rechte Seite einigermaßen verstehen. Wir haben oben die Rotation rein formal, durch eine Rechenvorschrift, definiert. Der Rotationsvektor hat aber auch eine geometrische Bedeutung. Um sie zu finden, wenden wir den Satz von Stokes auf eine besonders einfache Situation an; ähnlich, wie wir seinerzeit den Satz von Gauß auf eine kleine Kugel angewandt haben, um die Divergenz zu erklären. Ganz so anschaulich wie dort wird es bei der Rotation allerdings nicht.

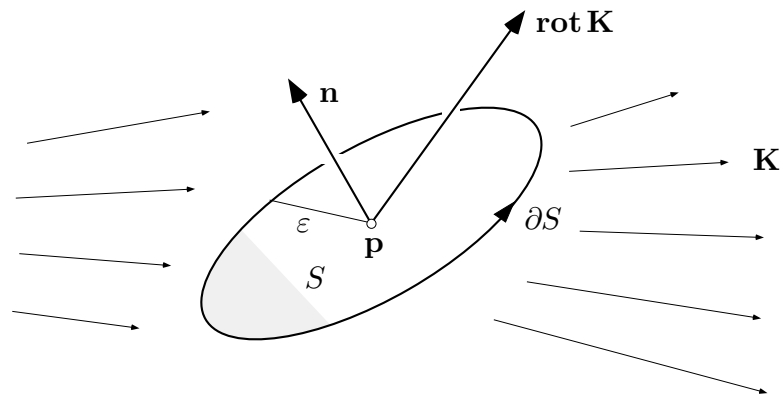


Fig. 6.4.7

Wir halten einen Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ fest und betrachten eine orientierte Kreisscheibe $S := S_{\mathbf{n}, \varepsilon}$ mit Zentrum \mathbf{p} , Normalenvektor \mathbf{n} und Radius ε (siehe die Fig. 6.4.7). Dabei stellen wir uns vor, daß S beweglich ist; das heißt: \mathbf{n} und ε sind variabel. Die Zirkulation Z von \mathbf{K} längs ∂S ist dann eine Funktion von \mathbf{n} und ε :

$$Z(\mathbf{n}, \varepsilon) := \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} .$$

Dieses Integral läßt sich mit Hilfe des Satzes von Stokes verwandeln in

$$Z(\mathbf{n}, \varepsilon) = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \, d\omega \doteq \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \, \omega(S) ,$$

und es folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Z(\mathbf{n}, \varepsilon)}{\pi \varepsilon^2} = \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} . \quad (7)$$

In dieser Beziehung, die man auch als “geometrische Definition” von $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ betrachten kann, ist \mathbf{n} die Variable; alles andere ist fest oder im Limes verduftet. Es zeigt sich, daß (für gegebenes $\varepsilon \ll 1$) die Zirkulation $Z(\mathbf{n}, \varepsilon)$ am größten ist, wenn die Normale \mathbf{n} des Scheibchens in die Richtung von $\mathbf{rot} \mathbf{K} := \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p})$ weist. Damit man besser sieht, was das bedeutet, ziehen wir für einen Moment das homogene und weder zur Zirkulation noch zur Rotation beitragende Feld $\mathbf{K}(\mathbf{p})$ von \mathbf{K} ab, betrachten also das Feld

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) := \mathbf{K}(\mathbf{r}) - \mathbf{K}(\mathbf{p}) .$$

Wegen $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ sind nun die minimalen Feldvariationen in der Umgebung des Punktes \mathbf{p} viel besser sichtbar.

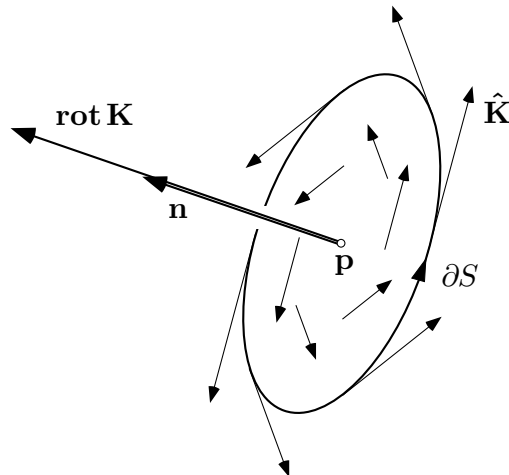


Fig. 6.4.8

Weist \mathbf{n} in die Richtung von $\mathbf{rot K}$, so sieht das Feld $\hat{\mathbf{K}}$ längs ∂S bzw. in der Ebene von S im Extremfall aus, wie in Fig. 6.4.8 dargestellt (ohne Beweis). Das Feld $\hat{\mathbf{K}}$ "wirbelt" um die Achse \mathbf{n} herum, und man erkennt, daß $Z(\mathbf{n}, \varepsilon)$ hier besonders groß ausfallen wird. Beispiel ① (s.u.) illustriert diese Situation noch auf andere Art.

Steht aber \mathbf{n} senkrecht auf $\mathbf{rot K}$, so bietet sich ein ganz anderes Bild (siehe die Fig. 6.4.9). Im Extremfall steht $\hat{\mathbf{K}}$ überall senkrecht auf ∂S , und es leuchtet ein, daß $Z(\mathbf{n}, \varepsilon)$ dann verschwindet.

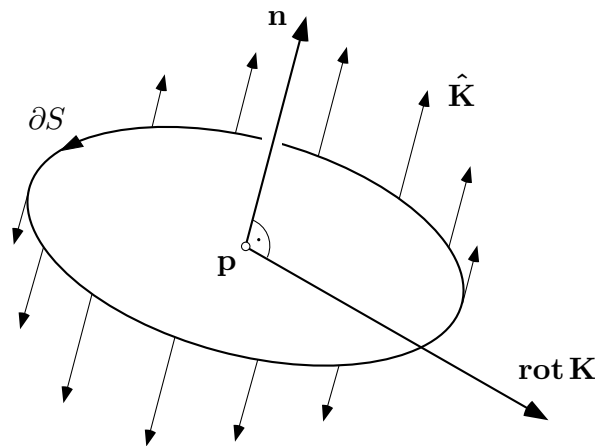


Fig. 6.4.9

Im Hinblick auf diese Erklärungen und Figuren nennt man die Rotation auch **Wirbeldichte** des Feldes \mathbf{K} . Ist

$$\mathbf{rot K} \equiv \mathbf{0},$$

so heißt das Feld \mathbf{K} **wirbelfrei**.

① Das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} des mit Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega \mathbf{e}$$

rotierenden "Weltäthers" ist gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \vec{\omega} \times \mathbf{x}$$

(siehe Beispiel 6.2.②) und besitzt somit die Rotation

$$\begin{aligned} \mathbf{rot v}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) \\ &= (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Die Rotation dieses Feldes \mathbf{v} ist also im ganzen Raum konstant, kurz: $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ ist ein homogenes Vektorfeld (und ist nicht etwa auf der Achse konzentriert, siehe auch die Fig. 6.4.10). \circ

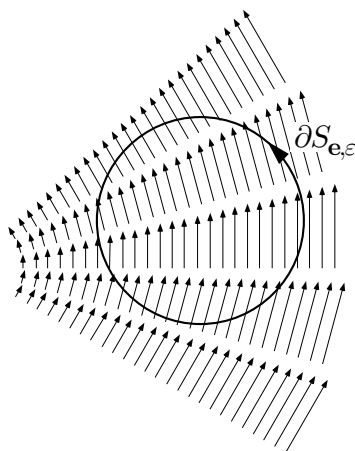


Fig. 6.4.10

② Wir betrachten weiter das Feld

$$\mathbf{A}(x, y, z) := \nabla \arg(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

im Gebiet $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$ und bemerken zunächst allgemein: Die Rotation eines im Grunde genommen ebenen Feldes

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (P(x, y), Q(x, y), 0)$$

ist aufgrund der definierenden Formel (6) gegeben durch

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = (0, 0, Q_x - P_y) .$$

Das Feld \mathbf{A} ist von dieser Art. In Beispiel 6.2.④ wurde überdies gezeigt, daß $\nabla \arg$ die Integrabilitätsbedingung $Q_x - P_y \equiv 0$ erfüllt. Somit ist $\mathbf{rot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$. Das Feld \mathbf{A} ist also wirbelfrei, obwohl sich eindeutig "etwas" um die z -Achse herumbewegt, siehe die Figur 6.2.11. Die Rotation ist eben eine lokale Eigenschaft des Feldes, und im Kleinen sieht es etwas anders aus. Betrachten wir etwa einen kleinen Kreisring-Sektor B in der (x, y) -Ebene (Fig. 6.4.11), so wird die größere Länge des Außenbogens durch die Abnahme der Feldstärke $|\mathbf{A}|$ gerade kompensiert, und die Zirkulation längs ∂B ist 0. \circ

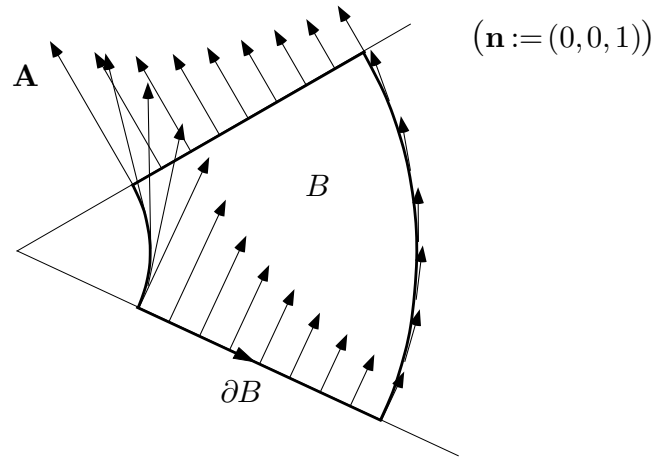


Fig. 6.4.11

③ Wir erproben den Satz von Stokes an dem folgenden “Zahlenbeispiel”: \mathbf{K} ist das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (y(z^2 - x^2), x(y^2 - z^2), z(x^2 + y^2))$$

und S die nach oben orientierte Halbsphäre

$$S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

(Fig. 6.4.12). S besitzt den Randzyklus

$$\partial S: \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \sin^2 t \cdot \cos t + 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(2t))^2 dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits besitzt S die Parameterdarstellung

$$(\phi, \theta) \mapsto \mathbf{r}(\phi, \theta) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

mit dem Parameterbereich $B := [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Nach 6.3.(4) gilt

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \cos \theta (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta),$$

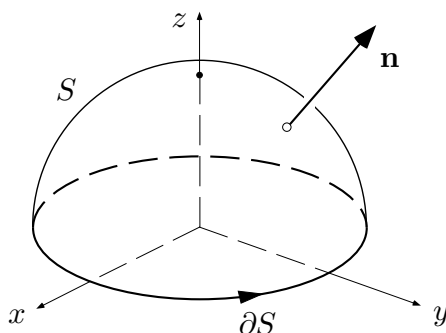


Fig. 6.4.12

und zwar ist dieser Vektor schon richtig (nach oben) orientiert. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (y(z^2 - x^2), x(y^2 - z^2), z(x^2 + y^2)) \\ &= (2z(x + y), 2z(y - x), x^2 + y^2 - 2z^2) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \\ &= (2 \sin \theta \cos \theta (\cos \phi + \sin \phi), 2 \sin \theta \cos \theta (\sin \phi - \cos \phi), \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\phi, \theta) &:= \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) \\ &= 2 \sin \theta \cos^3 \theta (\cos^2 \phi + \cos \phi \sin \phi) \\ &\quad + 2 \sin \theta \cos^3 \theta (\sin^2 \phi - \cos \phi \sin \phi) + \cos^3 \theta \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta \\ &= 3 \cos^3 \theta \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

und hieraus schließlich

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} &= \int_B H(\phi, \theta) d\mu(\phi, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (3 \cos^3 \theta \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta) d\theta d\phi \\ &= 2\pi \left(-\frac{3}{4} \cos^4 \theta - \frac{1}{2} \sin^4 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wie oben. ○

Die Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder im Raum

Der Satz von Stokes besitzt zahlreiche Anwendungen in der Kontinuumsmechanik und in der Elektrodynamik, auf die wir hier nicht eingehen. Wir behandeln hingegen eine mathematische Anwendung dieses Satzes, nämlich die **Integrabilitätsbedingung** für Vektorfelder bzw. 1-Formen im dreidimensionalen Raum (vgl. Satz (6.5)):

(6.9) Ein C^1 -Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ (bzw. eine 1-Form $Pdx + Qdy + Rdz$) auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Potentialfeld ∇f (ein totales Differential df), wenn gilt:

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} \equiv \mathbf{0} . \quad (8)$$

□ Wir beweisen auf zwei Arten, daß die Bedingung (8) notwendig ist.

(a) Ist \mathbf{K} ein Potentialfeld, so ist \mathbf{K} nach Satz (6.1)(a) konservativ, und die Zirkulation längs irgendwelchen Zyklen ist 0. Hieraus folgt: Die linke Seite von (7) ist 0 für jede Wahl von \mathbf{n} . Dann muß aber der Vektor $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p})$ der Nullvektor sein, und da das für jeden Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ gilt, folgt (8).

(b) Ist $\mathbf{K} = \nabla f$, so folgt

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) \equiv \mathbf{0}$$

aufgrund der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge.

(Wir haben zweifach gezeigt: $\mathbf{rot} \circ \nabla = 0$. Wie man leicht verifiziert, gilt auch die hierzu "duale" Beziehung

$$\mathbf{div} \circ \mathbf{rot} = 0 .$$

Das alles hat einen geheimnisvollen Zusammenhang mit der geometrischen Identität $\partial(\partial B) = 0$.)

Die Bedingung (8) ist aber auch hinreichend: Es sei γ eine beliebige geschlossene Kurve in Ω . Dann gibt es nach Voraussetzung über Ω eine orientierte Fläche $S \subset \Omega$ mit $\gamma = \partial S$, und wir erhalten mit Satz (6.8):

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\vec{\omega} = 0 .$$

Hieraus folgt, da γ beliebig war: Das Feld \mathbf{K} ist konservativ oder eben nach Satz (6.2)(a) ein Potentialfeld. □

Die im Anschluß an (6.5) gemachte Bemerkung trifft auch hier zu: Ist die Bedingung (8) erfüllt, so ist das Feld jedenfalls (das heißt: ohne Rücksicht auf die Gestalt von Ω) lokal ein Potentialfeld, global aber unter Umständen nicht. Hierfür verweisen wir einmal mehr auf das Beispiel

$$\mathbf{A}(x, y, z) := \nabla \arg(x, y) .$$

④ Das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (4x^3 + 6xy^2 + 5y^2z, 6x^2y + 10xyz + 7z^3, 5xy^2 + 21yz^2)$$

ist im ganzen Raum definiert und genügt dort der Integrabilitätsbedingung:

$$R_y - Q_z = (10xy + 21z^2) - (10xy + 21z^2) \equiv 0 ,$$

analog: $P_z - R_x \equiv 0$, $Q_x - P_y \equiv 0$. Folglich ist \mathbf{K} ein Potentialfeld: Es gibt eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{K}$, das heißt:

$$f_x = 4x^3 + 6xy^2 + 5y^2z ,$$

$$f_y = 6x^2y + 10xyz + 7z^3 ,$$

$$f_z = 5xy^2 + 21yz^2 .$$

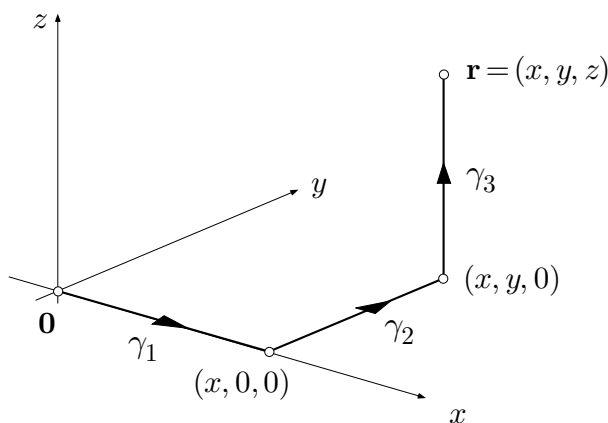


Fig. 6.4.13

Ein derartiges f läßt sich nach der Methode von Beispiel 6.2.③ — ausgedehnt auf drei Variable x, y, z — konstruieren. Da man sich dabei gerne verheddert, greifen wir lieber auf Satz (6.2)(b) zurück: Wir wählen $\mathbf{0}$ als Nullpunkt des Potentials f und erhalten den Wert von f an einer beliebigen Stelle $\mathbf{r} = (x, y, z)$, indem wir \mathbf{K} längs eines geeigneten Weges von $\mathbf{0}$ nach \mathbf{r}

aufintegrieren. Für den in Fig. 6.4.13 dargestellten Weg $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit achsenparallelen Teilstücken γ_i ergibt sich

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} Q dy + \int_{\gamma_3} R dz$$

(alle anderen Beiträge ans Integral entfallen). Mit Hilfe der Parametrisierung

$$\gamma_1: \quad x' \mapsto (x', 0, 0) \quad (0 \leq x' \leq x),$$

analog für γ_2 und γ_3 , erhalten wir die allgemein verwendbare Formel

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(x', 0, 0) dx' + \int_0^y Q(x, y', 0) dy' + \int_0^z R(x, y, z') dz',$$

im vorliegenden Fall also

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x 4x'^3 dx' + \int_0^y 6x^2 y' dy' + \int_0^z (5xy^2 + 21yz'^2) dz' \\ &= x^4 + 3x^2 y^2 + 5xy^2 z + 7yz^3. \end{aligned}$$

Das allgemeinste Potential von \mathbf{K} unterscheidet sich hiervon um eine Konstante. ○

Aufgaben

1. Finde und beweise dabei koordinatenfreie Identitäten der Form

(a) $\mathbf{rot}(f \nabla g) = \dots$,

(b) $\mathbf{rot}(f \mathbf{K}) = \dots$,

(c) $\mathbf{rot}(f \nabla f) = \dots$

für C^2 -Skalarfunktionen f, g und C^1 -Vektorfelder \mathbf{K} im \mathbb{R}^3 .

2. Es sei $\vec{\omega} := (0, 0, \omega)$. Betrachte das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{x})$$

und berechne $\mathbf{rot} \mathbf{K}$. Für die Rechnung Koordinaten benutzen; das Resultat soll aber koordinatenfrei dargestellt werden.

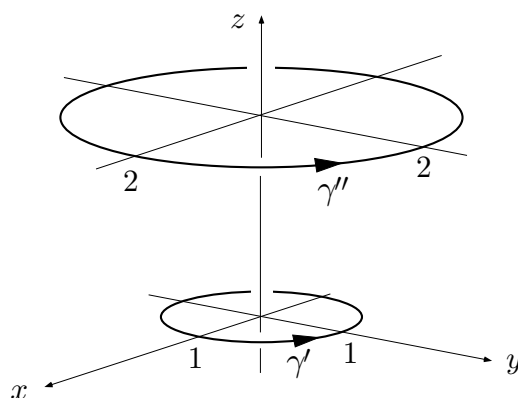


Fig. 6.4.14

3. Betrachte im $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \left(\frac{2(zx + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(zy - x)}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)$$

sowie die beiden Kreiswege γ' , γ'' der Fig. 6.4.14. Berechne die Größe

$$Z := \int_{\gamma'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma''} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$$

- (a) als Linienintegral,
 (b) mit Hilfe des Satzes von Stokes (geschenkt: $\mathbf{rot} \mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$; dafür ist eine Figur verlangt).

4. Gegeben sind erstens das (weder quellenfreie noch wirbelfreie) Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (-y, x, z)$$

und zweitens die Drahtschleife

$$\gamma: t \mapsto \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(siehe die Fig. 6.4.15). Von den beiden folgenden “Flüssen” ist mindestens einer sinnlos. Dies ist zu begründen und der andere gegebenenfalls zu berechnen.

- (a) Der “Fluß” von \mathbf{K} von unten nach oben durch die Drahtschleife γ .
 (b) Der “Fluß” des Feldes $\mathbf{v} := \mathbf{rot} \mathbf{K}$ von unten nach oben durch die Drahtschleife γ .

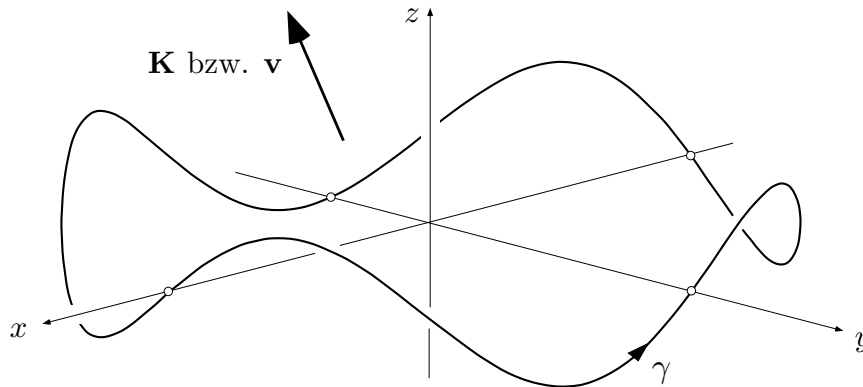


Fig. 6.4.15

5. Bestimme ein Potential für die wirbelfreien Felder der folgenden Liste:

- (a) $\mathbf{K}(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y)$,
- (b) $\mathbf{K}(x, y, z) := (x^3 + y + 2xz, x + yz + z^3, x^2 + z^3)$,
- (c) $\mathbf{K}(x, y, z) := (4x^3 + 2xyz, x^2z + 2yz^2, x^2y + 2y^2z)$.

6. Man berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$$

und den Zyklus γ der Fig. 6.4.16 auf drei Arten:

- (a) direkt,
- (b) mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer geeigneten Parameterdarstellung der Dreiecksfläche,
- (c) mit Hilfe des Satzes von Stokes und geometrischer Einsicht, die erlaubt, das Flächenintegral "im Kopf" auszuwerten.

(Hinweis: Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$.)

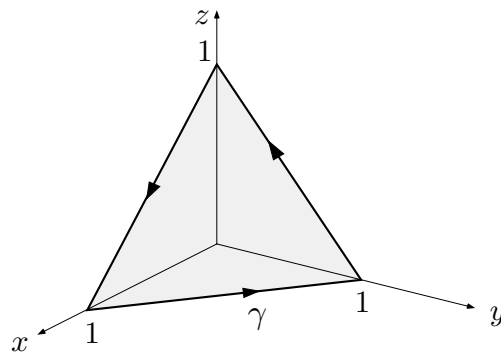


Fig. 6.4.16

7. Lege die Parameter α , β , γ so fest, daß das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

wirbelfrei wird. Das so erhaltene Feld besitzt ein Potential f . Bestimme f durch Integration von $\mathbf{0}$ aus.

8. Es seien \mathbf{e} ein in $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ angehefteter Einheitsvektor und \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld einer mit Winkelgeschwindigkeit ω um \mathbf{e} rotierenden Flüssigkeit. Weiter seien zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gegeben. Berechne die Zirkulation von \mathbf{v} längs der Ellipse

$$\gamma: \quad t \mapsto \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

einmal als Linienintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Stokes. (*Hinweis:* Das Flächenintegral läßt sich mit Hilfe von geometrischen Überlegungen “im Kopf” ausrechnen.)