1.1. Separation der Variablen

(a) Wir sehen, dass die konstanten Funktionen $y \equiv 1$ und $y \equiv -1$ Lösungen der DGl sind. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Lösung(en):

$$y(x) = 1, \qquad y(x) = -1, \qquad y(x) = \sin\left(\arcsin x + C\right), C \in \mathbb{R}.$$

Die nicht konstanten Lösungen können äquivalent als $y(x) = x\cos C + (\sqrt{1-x^2})\sin C$ geschrieben werden.

(b) Wir sehen, dass die konstante Funktion $y \equiv -1$ Lösung der DGl ist. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung den Variablen erhalten wir:

$$y\,\frac{dy}{dx} = (1+y)x^2 \Rightarrow \int \frac{y}{1+y}\,dy \;= \int x^2\,dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)dy = \int x^2\,dx,$$

somit erhalten wir die implizite Relation für die nicht konstanten Lösungen der DGl:

$$y - \log|1+y| = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Aus $y' = x(1+y^2)$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} &\int \frac{dy}{1+y^2} = \int x dx \\ &\Rightarrow \arctan y = \frac{1}{2}x^2 + C. \end{aligned}$$

Aus $y(0) = 1$ kriegen wir $C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Die Lösung ist also

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

ETH zürich

Aufgabe 1.2. : Variation der Konstanten I

a) homogene Lösung: $y_{hom}(x) = Ce^{3x}$

Ansatz: $y(x) = C(x)\, e^{3x}$

Ableiten und Einsetzen:

$C' e^{3x} + \cancel{3Ce^{3x}} - \cancel{3Ce^{3x}} = e^{5x}$

$\Rightarrow C' = e^{2x}$

Integrieren:

$C = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$

Lösung:

$y(x) = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + K\right) e^{3x} = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{5x} + Ke^{3x}}} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$

b) $C' e^{3x} + \cancel{3Ce^{3x}} - \cancel{3Ce^{3x}} = e^{3x}$

$\Rightarrow C' = 1$

Integrieren: $C = x + K$

Lösung: $\underline{\underline{y(x) = xe^{3x} + Ke^{3x}}} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$

c) homogene Lösung: $y_{hom}(x) = Ce^{x}$

Ansatz: $y(x) = C(x)\, e^{x}$

Ableiten und Einsetzen:

$C' e^{x} + \cancel{Ce^{x}} - \cancel{Ce^{x}} = \sin x$

$\Rightarrow C' = \sin x \; e^{-x}$

Integrieren: $C = \int \sin x \; e^{-x}\, dx$

ETH zürich

zweifache partielle Integration:

$$C = \int \underset{\downarrow}{\sin x}\, \underset{\uparrow}{e^{-x}}\, dx = -e^{-x}\sin x + \int \underset{\downarrow}{\cos x}\, \underset{\uparrow}{e^{-x}}\, dx$$

$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \underbrace{\int \sin x\, e^{-x}\, dx}_{=C}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + K$$

Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + K e^{x}}}$$

d) homogene Lösung mit Separation der Variablen:

$$y' = \frac{y}{x} \leadsto \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \leadsto \log|x| + C$$

$$\overset{\shortparallel}{\log|y|} \Rightarrow |y| = e^{C}|x|$$

$$\Rightarrow y = Bx \quad , \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nullstellen von $\frac{y}{x}$ sind $y = 0$, also ist auch $B = 0$ zugelassen

$$y_{hom}(x) = Bx \quad , \quad B \in \mathbb{R}$$

Ansatz: $y(x) = B(x) \cdot x$

Ableiten und Einsetzen:

$$B' \cdot x + \cancel{B} - \frac{\cancel{B}\cancel{x}}{\cancel{x}} = x$$

$$\Rightarrow B' = 1$$

Integrieren: $B(x) = x + K$

Lösung: $\underline{\underline{y(x) = x^2 + Kx}}$, $K \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.3: Variation der Konstanten II

a) $y'' + y' - 6y = 4e^x =: r(x)$

homogene Lösung:

char. Polynom $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow y_{hom}(x) = C_1 \underbrace{e^{-3x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{2x}}_{y_2(x)}$$

Allgemein kriegen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

hier also

$$\begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^x \end{pmatrix}$$

Dieses hat als Lösung $C_1' = -\frac{4}{5}e^{4x}$, $C_2' = \frac{4}{5}e^{-x}$

Integrieren: $C_1 = -\frac{1}{5}e^{4x} + K_1$

$C_2 = -\frac{4}{5}e^{-x} + K_2$ $\quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

Lösung: $\underline{\underline{y(x) = K_1 e^{-3x} + K e^{2x} - e^x}}$

b) $y_{hom}(x) = C_1 \cosh(x) + C_2 \sinh(x)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sin x & \cosh x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cosh x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}_{=1}} \begin{pmatrix} \cosh x & -\sinh x \\ -\sinh x & \cosh x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cosh x} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C_1' = - \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $C_2' = 1$

Integrieren:

$C_1 = - \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \, dx = - \int \frac{dt}{t} = -\log t + K_1 = -\log(\cosh x) + K_1$

$t = \cosh x \quad dt = \sinh x \, dx$

$C_2 = x + K_2$

Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = K_1 \cosh x + K_2 \sinh x + x \sinh x - \cosh x \cdot \log(\cosh x)}}$$

ETH zürich

Aufgabe 1.4: Exakte Differentialgleichung

$$y + \left(x + \frac{2}{y}\right) y' = 0$$

a) Es ist $p(x,y) = y$, $q(x,y) = x + \frac{2}{y}$

Da $\frac{\partial p}{\partial y} = 1 = \frac{\partial q}{\partial x}$ existiert ein Potential.

Sei $\Phi(x,y)$ dieses Potential. Es muss gelten:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p = y \Rightarrow \Phi = xy + C_1(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = q = x + \frac{2}{y} \Rightarrow \Phi = xy + 2\log y + C_2(x)$$

Wähle $\underline{\underline{\Phi(x,y) = xy + 2\log y}}$

b) Die Lösungen sind jene y, welche die Gleichung

$$xy + 2\log y = C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$ erfüllen.

c) Damit $y(0) = e$, muss gelten

$$0 + 2\log e = C \Rightarrow \underline{C = 2}$$

Also $\underline{\underline{xy + 2\log y = 2}}$