2.1. Norm und Skalarprodukt

(Lösung auf Seite 3)

2.2. Französische Eisenbahnmetrik

(a) Notation: $||\cdot|| := ||\cdot||_2$

Symmetrie ist klar, positive Definitheit folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $||\cdot||$ oder ebenfalls ziemlich direkt aus der Definition.

Für die Dreiecksungleichung wollen wir zeigen, dass $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})$. Dazu müssen wir Fallunterscheidung nach der Lage von $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ machen, denn je nachdem, wie viele und welche davon auf einer Gerade durch $(0,0)$ liegen, ändert sich die Definition der Metrik.

Fall 1: $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ liegen alle auf der selben Gerade durch $(0,0)$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| + ||\mathbf{z}-\mathbf{y}|| = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

wobei wir hier genutzt haben, dass wir bereits wissen, dass $||\cdot||$ die Dreiecksungleichung erfüllt.

Fall 2: $\mathbf{x},\mathbf{y}$ liegen auf der selben Gerade durch $(0,0)$, $\mathbf{z}$ nicht. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{z}|| \\ &= d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt wiederum aus der Dreiecksungleichung für $||\cdot||$, dieses Mal mit Umweg über $(0,0)$.

Fall 3: $\mathbf{x},\mathbf{z}$ liegen auf der selben Gerade durch $(0,0)$, $\mathbf{y}$ nicht. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}-\mathbf{z}+\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| \\ &\leq ||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| + ||\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Fall 4: $\mathbf{y},\mathbf{z}$ liegen auf der selben Gerade durch $(0,0)$, $\mathbf{x}$ nicht. Dies ist analog zu Fall 3.

Fall 5: Von den drei Punkten liegen keine zwei auf einer Geraden durch $(0,0)$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{z}|| = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

(b) Wir betrachten die in der Aufgabe angegebene Folge $(2^{-n}, 1)$ und rechnen in den beiden Metriken den Abstand jedes Folgengliedes zum Punkt $(0, 1)$ aus. In der bekannten euklidschen Metrik ist dies

$$||(2^{-n}, 1) - (0, 1)|| = ||(2^{-n}, 0)|| = 2^{-n}.$$

Für die französische Eisenbahnmetrik bemerken wir zuerst, dass $(2^{-n}, 1)$ und $(0, 1)$ niemals auf einer Gerade durch $(0, 0)$ liegen, wir also immer den zweiten Fall der Definition brauchen und dann haben wir

$$d((2^{-n}, 1), (0, 1)) = ||(2^{-n}, 1)|| + ||(0, 1)|| = \sqrt{(2^{-n})^2 + 1} + 1 > 2.$$

Wir sehen also, dass der Abstand der Folgeglieder zum Punkt $(0, 1)$ gegen 0 geht, die Folge also gegen diesen Punkt konvergiert, während der Abstand in der französischen Eisenbahnmetrik immer mindestens 2 beträgt, die Folge deshalb also nicht gegen diesen Punkt konvergiert. (Tatsächlich konvergiert diese Folge in der französischen Eisenbahnmetrik überhaupt nicht.) Damit sehen wir also, dass wir in der einen Metrik eine Konvergenz haben, welche wir in der anderen Metrik nicht haben, also sind die beiden Metriken nicht äquivalent.

2.1. Norm und Skalarprodukt

a) i) $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$: Nehme an, $f \neq 0$, d.h. $\exists\, x_0 \in [0,1]$, so dass $f(x_0) \neq 0$. Wir können annehmen, dass $f(x_0) > 0$. Wegen Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x_0) - f(x)| > \frac{f(x_0)}{2}$ für $|x - x_0| < \delta$. Also ist $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ auf dem Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$. Dann gilt

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|\,dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

Dies zeigt $\|f\| \neq 0$ und damit die Kontraposition der Aussage.

ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$: Folgt aus der Linearität des Integrals.

iii) Dreiecksungleichung: Seien $f, g \in V$. Es gilt

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ für jedes x und damit auch

$$\int |f+g|\,dx \leq \int (|f| + |g|)\,dx = \int |f|\,dx + \int |g|\,dx$$

b) i) Symmetrie: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$

ii) Linearität: $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \int (f_1(x_1) + f_2(x))\, g(x)$

$$= \int (f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x))\,dx$$
$$= \int f_1 g\,dx + \int f_2 g\,dx = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$$

$\langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle$ folgt direkt

iii) positiv Definitheit: Beachten Sie, dass

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \geq 0$$

Mit einem Argument fast identisch zu a) i) können wir ausserdem zeigen, dass gilt:

$$f \neq 0 \Rightarrow \langle f, f\rangle \neq 0.$$

2.3. Produktmetrik

Wir müssen überprüfen, ob die Eigenschaften einer Metrik erfüllt sind. Die Symmetrie ist ganz klar. Für die Positive Definitheit bemerken wir, dass das Maximum zweier nichtnegativer Zahlen nicht negativ sein kann. Ferner gilt

$$\begin{aligned} d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0 &\Leftrightarrow \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1) = 0,\ d_2(x_2,y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)\,. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1,2\}$, sodass

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} = d_i(x_i,y_i)\,.$$

Es gilt auch für $i \in \{1,2\}$ und für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$d_i(x_i,y_i) \le d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i) \le d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) + d((z_1,z_2),(y_1,y_2))$$

Beide Ungleichungen zusammen beweisen die Aussage. Wir sind fertig.

2.4. Stetigkeit

(a) Wir zeigen zuerst die Stetigkeit der Einschränkung auf Geraden.
Auf der Geraden beschrieben durch $x = 0$ ist f konstant 0, also insbesondere stetig. Alle anderen Geraden durch den Nullpunkt lassen sich beschreiben durch $y = a \cdot x$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen liefert

$$g(x) := f(x, a\cdot x) = \begin{cases} |a/x| \cdot 2^{-|a/x|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun gilt

$$\lim_{x\to 0} |a/x| \cdot 2^{-|a/x|} = \lim_{k\to\infty} k \cdot 2^{-k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

(b) Auf der Parabel beschrieben durch $y = x^2$ gilt

$$h(x) := f(x, x^2) = \begin{cases} 1 \cdot 2^{-1} = 1/2 & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

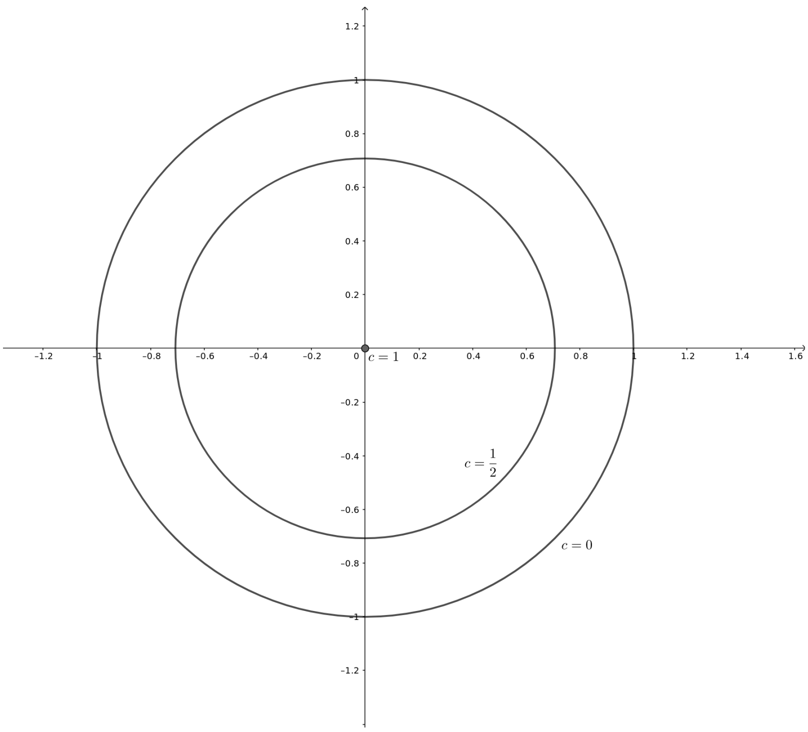
was beweist, dass f an der Stelle $(0, 0)$ unstetig ist.

2.5. Niveaumengen/Höhenlinien

Für die Niveaumenge zu einem Niveau d gilt

$$x^2 + y^2 = d,$$

also ein Kreis mit Radius $\sqrt{d}$ (respektive die leere Menge, falls $d < 0$). Die angegebenen Werte sind in folgender Graphik skizziert, wobei in dieser Graphik $c = 1 - d$, also eigentlich umgekehrt zur Aufgabenstellung:



2.6. Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$

2. Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$

a) U heisst offen :$\Leftrightarrow$ Für jedes $\underline{x} \in U$ existiert $r>0$, sodass $B_r(\underline{x}) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}-y\| < r \} \subseteq U$.

b) Es bezeichne $|\cdot|$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, existieren $C, c > 0$, so dass

$$c\|\cdot\| \leq |\cdot| \leq C\|\cdot\|. \qquad (1)$$

Sei U offen bzgl. $\|\cdot\|$. Wir zeigen, dass U auch offen ist bzgl. $|\cdot|$, d.h. offen nach der üblichen Definition. Sei also $\underline{x} \in U$ und wähle $r>0$ wie in a), so dass $B_r(\underline{x}) \subseteq U$. Beachte, dass folgendes gilt:

$$|\underline{x}-\underline{y}| < cr \Rightarrow \|\underline{x}-\underline{y}\| \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{c}|\underline{x}-\underline{y}| < r$$

Bezeichnen wir mit $B_\varrho^{|\cdot|}(\underline{x})$ also den Ball mit Radius ϱ in der Standardmetrik gilt

$$B_{cr}^{|\cdot|}(\underline{x}) \subseteq B_r(\underline{x}) \subseteq U$$

Also ist U offen bzgl. $|\cdot|$, denn für jedes $\underline{x}$ haben wir den Ball $B_{cr}^{|\cdot|}(x)$, welcher in U liegt.

Sei nun U offen bzgl. $|\cdot|$. Für $\underline{x} \in U$ gibt es $\tilde{r} > 0$, so dass $B_{\tilde{r}}^{|\cdot|}(\underline{x}) \subseteq U$. Wie oben gilt

$$\|\underline{x}-\underline{y}\| \leq \frac{\tilde{r}}{C} \Rightarrow |\underline{x}-\underline{y}| \overset{(1)}{\leq} C\|\underline{x}-\underline{y}\| < \tilde{r}.$$

Also wiederum $B_{\frac{\tilde{r}}{C}}(\underline{x}) \subseteq B_{\tilde{r}}^{|\cdot|}(\underline{x}) \subseteq U$. Also ist U offen bzgl. $\|\cdot\|$.

c) f heisst stetig bei $\underline{x}_0$:$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ so dass gilt: Falls $\|\underline{x}-\underline{x}_0\| < \delta$, dann ist $\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon$.

f heisst stetig :$\Leftrightarrow$ f ist stetig bei jedem $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

d) Sei f stetig bzgl. $\|\cdot\|$. Wir zeigen, dass f auch stetig ist bzgl. $|\cdot|$, also bezüglich der üblichen Definition.

Fixiere $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\varepsilon} > 0$.

Sei $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{C}$ und wähle $\delta > 0$ wie in c) für Stetigkeit bezüglich $\|\cdot\|$. Setze $\tilde{\delta} := C\delta$. Dann gilt:

$$|\underline{x} - \underline{x}_0| < \tilde{\delta} \Rightarrow \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{C} |x - x_0| < \frac{1}{C} \tilde{\delta} = \delta$$

$$\underset{\text{bzgl. } \|\cdot\|}{\overset{\text{Stetigkeit}}{\Rightarrow}} \|f(\underline{x}) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \overset{(1)}{\leq} C \|f(\underline{x}) - f(x_0)\| < C\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$$

Dies beweist Stetigkeit bzgl. $|\cdot|$.

Sei nun f stetig bzgl. $|\cdot|$. Fixiere $\underline{x}_0$ und $\varepsilon > 0$ und setze $\tilde{\varepsilon} = C\varepsilon$. Dann existiert $\tilde{\delta} > 0$, wie in der Definition von Stetigkeit bzgl $|\cdot|$ bei $\underline{x}_0$. Setze $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{C}$.
Wie oben lässt sich dann zeigen:

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

also haben wir Stetigkeit bzgl. $\|\cdot\|$.