3.1. Partielle Ableitungen

Es folgt direkt

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = ye^{xy},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = xe^{xy}$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = yx^{y-1},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y\ln x} = \ln x e^{y \ln x} = x^y \ln x$$

(d)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(e)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3y\cos(xy)$$

(f)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = y^2z^3,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2xyz^3,$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 3xy^2z^2$$

3.2. Differenzierbarkeit I

Als Verkettung von differenzierbaren Funktionen ist f an jeder Stelle $(x, y) \neq (0, 0)$ differenzierbar. An der Stelle $(0, 0)$ überprüfen wir zunächst ob die partiellen Ableitungen existieren:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{|h|} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$
$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Wir sehen also, dass beide partiellen Ableitungen existieren. Falls f in $(0, 0)$ differenzierbar ist, so müsste die Ableitung von f die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} Df(0,0) : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle Df(0,0), v\rangle = \partial_x f(0,0) \cdot v_1 + \partial_y f(0,0) \cdot v_2 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \end{aligned}$$

sein (d.h. $Df(0, 0) = 0$).

Wir überprüfen ob diese lineare Abbildung die Definition der Ableitung erfüllt:

$$\begin{aligned} &\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0) - Df(0,0)(v_1,v_2)}{||(v_1,v_2)||} \\ &= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Hierbei folgt der letzte Grenzwert aus der Abschätzung $\left|\frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2}\right| \leq |v_1|$. Damit haben wir gezeigt, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist und die Ableitung durch $Df(0, 0) = 0$ gegeben ist.

3.3. Differenzierbarkeit II

(a) Aus der Gleichung $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x})$ folgt mit $\lambda = 0$ zunächst $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Für die Richtungsableitungen erhalten wir also:

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{e}t) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^k f(\mathbf{e}) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t^{k-1} f(\mathbf{e}).$$

Für $k > 1$ ist der Grenzwert offensichtlich 0. Für $k = 1$ ist $t^{k-1} = t^0 = 1$ und der Grenzwert ist $f(\mathbf{e})$.

(b) Sei f 1-homogen, d.h. $k = 1$. Wäre nun f differenzierbar, so müsste insbesondere das Differential an jeder Stelle eine lineare Funktion sein (Achtung: linear in den Richtungen in denen man ableitet, nicht linear im Punkt, in denen man das Differential betrachtet!), d.h. $D_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} f(\mathbf{0}) = D_{\mathbf{e}_1} f(\mathbf{0}) + D_{\mathbf{e}_2} f(\mathbf{0})$. Betrachten wir nun Teil a) bedeutet dies im Fall einer homogenen Funktion mit $k = 1$ aber, dass $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2)$. Dies ist im Allgemeinen aber nicht erfüllt. Beispielsweise sieht man dies an folgender Funktion in Polarkoordinaten:

$$f(r, \varphi) = r \cos^3(\varphi).$$

3.4. Tangentialebene

(a) Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

und somit ist die Tangentialebene gegeben durch die Gleichung

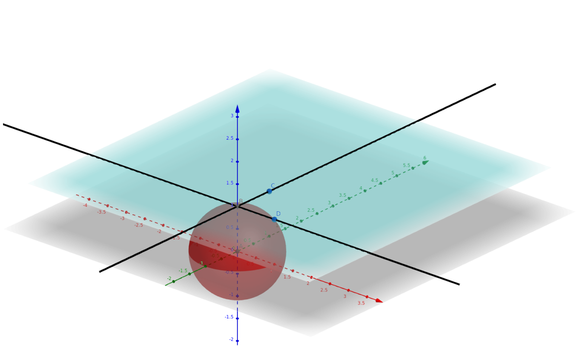
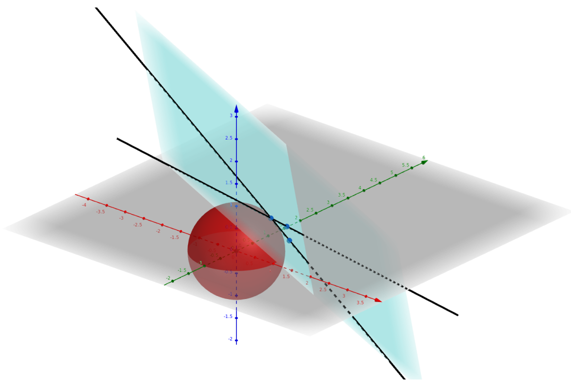
$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \\ &= \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(x - x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(y - y_0). \end{aligned}$$

(b) Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ reduziert sich die Gleichung zur sehr einfachen Form

$$z = 1.$$

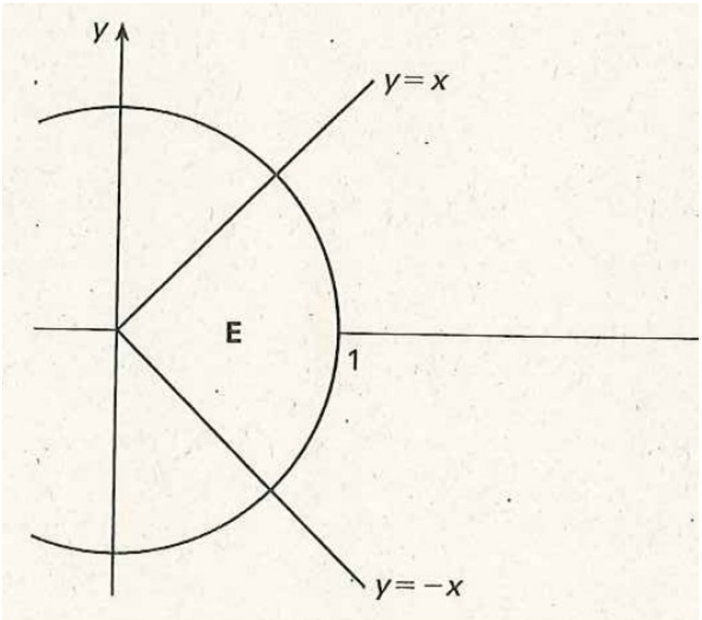
Für $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ kriegen wir

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

(Der Graph von f besteht nur aus der oberen Hälfte der Sphäre.)

3.5. y-einfacher und x-einfacher Bereich



(a)

Aus dem Bild sehen wir, dass $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

(b) Wir definieren die zwei stetigen Funktionen

$$g(y) = \begin{cases} -y & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{2}} < y \leq 0 \\ y & \text{falls } 0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$h(y) = \sqrt{1-y^2}\,, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dann gilt

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}, g(y) < x < h(y)\right\}$$

und wir folgern, dass E ein x-einfacher Bereich ist.

(c) Jetzt definieren wir

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1-x^2} & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, g(x) < y < h(x)\Big\}$$

und wir folgern, dass E ein y-einfacher Bereich ist.