4.1. Die Kettenregel

Die Funktion $y(t)$ ist charakterisiert durch die Eigenschaften

$$y'(t) = e^{-t^2}$$

und

$$y(1) = 42\,.$$

Die verallgemeinerte Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right) &= \nabla f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'(t) \\
&= 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) \\
&= 2\cos(\pi t) \cdot (-\pi \sin(\pi t)) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\
&= -2\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\
\left.\frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\right|_{t=1} &= -2\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \cos(\pi) + 2\underbrace{y(1)}_{42} \cdot e^{-1^2} = 84e^{-1}\,.
\end{aligned}$$

4.2. Integraldarstellung des Funktionenzuwachses

Mit der Kettenregel gilt, dass $Df(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} f(x(t))$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt also

$$\int_\alpha^\beta Df(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt = f(x(\beta)) - f(x(\alpha)) = f(b) - f(a).$$

4.3. Satz von Schwarz

4.3. Satz von Schwarz

a) Berechne die partiellen Ableitungen. Für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{yx^4+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-xy^4-4y^2x^2+x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

Bei $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Um C^1 zu zeigen, müssen wir zeigen, dass $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ überall stetig sind. Ausserhalb von $(0,0)$ folgt dies daraus, dass es Kompositionen von stetigen Funktionen sind und keine Division durch 0 stattfindet. Bei $(0,0)$: lim $(x,y) \to (0,0)$, schreibe $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^5(\sin\varphi\cos^4\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^3\varphi - \sin^5\varphi)}{r^4}$$

$$= \lim_{r\to 0} \underbrace{r}_{\to 0} \underbrace{(\sin\varphi\cos^4\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^3\varphi - \sin^5\varphi)}_{\text{beschränkt}} = 0$$

Analog: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$.

Dies zeigt, dass f stetig differenzierbar ist.

b) Ausserhalb von $(0,0)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2y(yx^4+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f\right) = \dots = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

Da dies wiedem Kompositionen stetiger Funktionen sind, sieht man, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\left(= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$ stetig sind ausserhalb von $(0,0)$. (Dass sie gleich sind ist dann auch sofort klar aus dem Satz von Schwarz.)

Bei $(0,0)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{t^5}{(t^2)^2} - 0}{t} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^5/t^4}{t} = +1$$

Die Ableitungen existieren also auch bei $(0,0)$.
(Dadurch, dass $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)$ bei $(0,0)$ sieht man übrigens sofort, dass die zweiten Ableitungen im Nullpunkt unstetig sein müssen, sonst hätten wir einen Widerspruch zu Schwarz.)

4.4. Taylor-Entwicklung

Das lineare Taylorpolynom (=Taylorpolynom erster Ordnung) um (x_0, y_0) ist durch

$$p_1(f,(x_0,y_0))(x-x_0,y-y_0) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

bestimmt, das quadratische durch

$$\begin{aligned} p_2(f,(x_0,y_0))(x-x_0,y-y_0) =& f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 \\ &+ f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) \end{aligned}$$

(a) Für die Ableitungen erhalten wir

$$f_x(x,y) = f_{xx}(x,y) = e^x \sin y, \quad f_y(x,y) = e^x \cos y,$$

$$f_{xy}(x,y) = e^x \cos y, \quad f_{yy}(x,y) = -e^x \sin y.$$

und damit im Punkt $(0, \pi/2)$:

$$f(0,\pi/2) = f_x(0,\pi/2) = f_{xx}(0,\pi/2) = 1, \quad f_y(0,\pi/2) = f_{xy}(0,\pi/2) = 0,$$

$$f_{yy}(0,\pi/2) = -1.$$

Das Taylorpolynom ersten Grades ist also

$$p_1(f,(0,\frac{\pi}{2}))(x-0,y-\frac{\pi}{2}) = 1 + 1\cdot(x-0) + 0\cdot(y-\pi/2) = 1+x$$

und das Taylorpolynom zweiten Grades

$$p_2(f,(0,\frac{\pi}{2}))(x-0,y-\frac{\pi}{2}) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(y-\pi/2)^2.$$

Für den Punkt $(0, \pi/2 + \frac{1}{4})$ erhalten wir die Näherungen

$$p_1(f,(0,\frac{\pi}{2}))(0,\frac{1}{4}) = 1, \quad p_2(f,(0,\frac{\pi}{2}))(0,\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4})^2 = \frac{31}{32} = 0.96875$$

Der Tatsächliche Wert ist (auf 6 Stellen genau)

$$f(0,\pi/2+1/4) = e^0 \sin(\pi/2+1/4) = 0.968912$$

Die Näherung durch P_2 ist also sehr gut.

(b) Die Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{e^{x/y}}{y} \Rightarrow f_x(1,1) = e\\
f_y(x,y) &= -\frac{xe^{x/y}}{y^2} \Rightarrow f_y(1,1) = -e\\
f_{xx}(x,y) &= \frac{e^{x/y}}{y^2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = e\\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{e^{x/y}}{y^2} - \frac{xe^{x/y}}{y^3} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = -2e\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{x^2e^{x/y}}{y^4} + \frac{2xe^{x/y}}{y^3} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 3e
\end{aligned}
$$

Als Taylorpolynom erster Ordnung um $(1,1)$ erhält man

$$p_1(f,(1,1))(x-1,y-1) = e + e(x-1) - e(y-1)$$

und für das quadratische

$$p_2(f,(1,1))(x-1,y-1) = e+e(x-1)-e(y-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2-2e(x-1)(y-1)+\frac{3e}{2}(y-1)^2$$

Die Taylorpolynome ergeben die folgenden Apporximationen im Punkt $(5/4,1/2)$:

$$p_1(f,(1,1))(\frac{5}{4}-1,\frac{1}{2}-1) = p_1(f,(1,1))(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}) = e+\frac{1}{4}e+\frac{1}{2}e = \frac{7}{4}e \approx 4.76$$

bzw.

$$p_2(f,(1,1))(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}) = e+\frac{1}{4}e+\frac{1}{2}e+e/2\cdot(1/4)^2-2e\cdot(1/4)\cdot(-1/2)+3e/2\cdot(1/2)^2 = \frac{77}{32}e \approx 6.54.$$

Der exakte Funktionswert ist

$$f(5/4,1/2) = e^{5/2} \approx 12.18$$

Die Approximation durch die Taylorentwicklung ist sehr schlecht. Ein Grund dafür ist der relativ grosse Abstand von $(5/4,1/2)$ zum Entwicklungspunkt, der andere ist, dass die höheren Ableitungen sehr gross sind, falls y einiges kleiner als 1 oder x einiges grösser als 1 ist. Es gilt z.B.

$$f_{yy}(5/4,1/2) = (5/4)^2\cdot 2^4e^{5/2} + 2^4\frac{5}{4}\cdot e^{5/4} \approx 548.$$

(c) Es gilt
$$f(x,y) = p_1(f,(x_0,y_0))(x-x_0,y-y_0) + R_1(x,y)$$
für das Restglied der Taylorentwicklung, dass in der Form
$$R_1(x,y) = \frac{1}{2}f_{xx}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(x_s,y_s)\cdot(y-y_0)^2 + f_{xy}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)$$
geschrieben werden kann, für eine Zahl $s \in [0,1]$ und $(x_s,y_s) = (x_0 + s(x-x_0), y_0 + s(y-y_0))$.
Auf dem Ball $B_r(0,\pi/2)$ können wir den Fehler also abschätzen durch
$$|R_1(x,y)| \leq 2M \cdot r^2$$
wobei M eine obere Schranke der 2. partiellen Ableitungen ist.
In unserem Fall gilt
$$|f_{xx}(x,y)| = |e^x \sin(y)| \leq e^x \leq e^r$$
für $(x,y) \in B_r(0,\pi/2)$ und analog auch für die Ableitungen f_{xy} und f_{yy}. Wir können also $M = e^r$ als Schranke aller Ableitungen 2. Ordnung auf $B_r(0,\pi/2)$ wählen.
Für den maximalen Fehler auf $B_{1/4}(0,\pi/2)$ ergibt dies die Fehlerabschätzung
$$|R_1(x,y)| \leq 2\cdot e^{1/4}\cdot(1/4)^2 = \frac{1}{8}e^{1/4} \approx 0.1605.$$

(d) Damit wir sicherstellen können, dass der Fehler kleiner als 10^{-4} ist, suchen wir r so dass (siehe c))
$$2\cdot r^2 \cdot e^r \leq 10^{-4}$$
ist. Die entsprechende Gleichung können wir nicht exakt lösen, wir müssen aber auch nicht unbedingt den grösstmöglichen Radius bestimmen auf dem die Abschätzung gilt. Wir können folgerndermassen einen sehr guten Radius r bestimmen.
Aus der Gleichung sieht man, dass sicher $r < 10^{-2}$ sein muss und dass damit gilt
$$2r^2e^r \leq 2r^2e^{10^{-2}}$$
Falls also
$$2r^2e^{10^{-2}} \leq 10^{-4}, \text{ d.h. } r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}10^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{2}10^{-2}} < 10^{-2}$$
gilt die Bedingung
$$2r^2e^r \leq 2r^2e^{10^{-2}} \leq 10^{-4}$$
wie gewünscht.
Wir erhalten also die gewünschte Abschätzung auf $B_r(0,\pi/2)$ für $r = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 10^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{2}10^{-2}} = 0.703580\cdot 10^{-2}$.

4.5. Kritische Punkte

(a) Die Ableitung ist gegeben durch

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 3y,\, 3y^2 + 3x\right)$$

und $\nabla f(x,y) = 0$ liefert

$$3x^2 + 3y = 0, \qquad 3y^2 + 3x = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = -x^2$ und einsetzen in die zweite Gleichung liefert $3x^4 = -3x$. Also gilt $x = 0$ oder $x = -1$ und wir erhalten die folgenden kritischen Punkte

$$\mathrm{Krit}(f) = \{(0,0),\, (-1,-1)\}$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

und wir erhalten in den kritischen Punkten

$$H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(f,(-1,-1)) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(H(f,(0,0))) = -9 < 0$, ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f. Da $\det(H(f,(-1,-1))) = 27 > 0$ und $\mathrm{tr}(H(f,(-1,-1))) = -12 < 0$ gilt, ist $(-1,-1)$ ein lokales Maximum von f.

(b) Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + 2yz, 2y + 2xz, 2z + 2xy).$$

und $\nabla f(x,y,z) = 0$ liefert die drei Gleichungen

$$2x + 2yz = 0, \qquad 2y + 2xz = 0, \qquad 2z + 2xy = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -yz$. Einsetzen in die zweite und dritte Gleichung liefert dann

$$2y = 2yz^2, \qquad 2z = 2y^2 z$$

Falls $y = 0$ gilt, so folgt $z = x = 0$ und wir erhalten den kritischen Punkte $(0,0,0)$. Analog folgt aus $z = 0$ ebenfalls $x = y = 0$. Falls $y, z \neq 0$ gilt, so erhalten wir $z^2 = 1 = y^2$ und aus $x = -yz$ folgt auch $x^2 = 1$. Also gilt $x, y, z = \pm 1$ und durch ausprobieren erhalten wir die kritischen Punkte $(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,-1,-1)$. Zusammengefasst erhalten wir

$$\mathrm{Krit}(f) = \{(0,0,0), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,-1,-1)\}.$$

Die Hessemarix von f ist gegeben durch

$$H(f,(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diskutieren die Hessematrix in den kritischen Punkten:

$$H(f,(0,0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist eine postive Diagonalmatrix und folglich positiv definit. Somit ist $(0,0,0)$ ein lokales Minimum.

Die Matrizen

$$H(f,(-1,1,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H(f,(1,-1,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(f,(1,1,-1)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H(f,(-1,-1,-1)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

haben alle Determinante -36. Wir argumentieren, dass diese Matrizen alle indefinit sind: Als symmetrische Matrizen, sind diese Matrizen alle diagonalisierbar und die Determinante ist das Produkt der drei Eigenwerte. Da die Determinante negativ ist, sind also entweder alle drei Eigenwerte negativ oder es gibt genau einen negativen Eigenwert und zwei positive Eigenwerte. Im ersten Fall wäre die Matrix negativ definit und im zweiten Fall wäre die Matrix indefinit. Da bei allen vier Matrizen der Eintrag oben links positiv ist, gilt insbesondere $e_1^t(H(f,)e_1 > 0$ und keine dieser Matrizen ist negativ definit. Damit haben wir schliesslich geklärt, dass die kritischen Punkte $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$ Sattelpunkte sind.

(c) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = (e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x-1)e^{-(x^2+y^2)},\, -2y(x-1)e^{-(x^2+y^2)})$$

und $\nabla f(x,y) = 0$ liefert die zwei Gleichungen

$$(1-2x^2+2x)e^{-(x^2+y^2)} = 0, \qquad -2y(x-1)e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $1-2x^2+2x = 0$ und folglich $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$. Da $x \neq 1$ gilt, ist die zweite Gleichung äquivalent zu $y = 0$. Somit gilt:

$$\mathrm{Krit}(f) = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} -4x+2-2x(1-2x^2+2x) & -2y(1-2x^2+2x) \\ -2y(1-2x^2+2) & (x-1)(4y^2-2) \end{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)}$$

In den kritischen Punkten vereifacht sich dieser Ausdruck erheblich, da $1-2x^2+2x=0$ gilt, und wir erhalten

$$H(f,\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},0\right)) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$H(f,\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)) = \begin{pmatrix} +2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

Damit ist der erste Punkt ein lokales Maximum, der zweite ein lokales Minimum.

(d) Ausmultiplizieren liefert $f(x,y)=2x^4-3x^2y+y^2$ und wir erhalten

$$\nabla f(x,y) = (8x^3-6xy,\ -3x^2+2y)$$

und $\nabla f(x,y)=0$ is äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$8x^3-6xy=0, \qquad -3x^2+2y=0.$$

Die zweite Gleichung liefert $y=\frac{3}{2}x^2$ und einsetzen in die erste Gleichung ergibt $8x^3-9x^3=0$ und folglich $x=0$. Aus der zweiten Gleichung folgt dann $y=0$ und somit

$$\mathrm{Krit}(f) = \{(0,0)\}.$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 24x^2-6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}.$$

In dem kritischen Punkt erhalten wir

$$H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(H(f,(0,0)))=0$ gilt, ist $(0,0)$ ein degenerierter kritischer Punkt und wir können keine Aussage darüber treffen ob es sich um ein lokales Maximum, lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Wir können das Verhalten von f in $(0,0)$ durch sorgfältiges betrachten der Definition $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ klären. Es gilt für jedes $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$f(x,\frac{3}{2}x) = -\frac{1}{4}x^4 < 0, \qquad f(x,0)=2x^4>0$$

Insbesondere folgt für $x\to 0$, dass f in jeder Umgebung $B_\epsilon(0,0)$ des Ursprungs postive und negative Werte annimmt. Da $f(0,0)=0$ gilt, kann also f kein lokales Maximum oder Minimum im Ursprung besitzen.