5.1. Implizite Funktion und ihre Ableitung

(a) Damit

$$F(x,y) = 0\,,$$

wobei

$$F(x,y) = 4(x+y) - x^2 + 2y\arctan(y) - \log(y^2+1)\,,$$

überall lokal der Graph einer Funktion $y(x)$ ist, müssen wir nach dem impliziten Funktionentheorem

$$F_y(x,y) \neq 0$$

zeigen. Wir berechnen

$$F_y(x,y) = 4 + 2\arctan(y) + \frac{2y}{y^2+1} - \frac{2y}{y^2+1} = 4 + 2\arctan(y)\,.$$

Da

$$\arctan(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \pi < 4$$

folgt

$$F_y(x,y) = 4 + 2\arctan(y) > 4 - \pi > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

und somit die Behauptung.

(b) Die Ableitung von $y(x)$ ist gegeben durch

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))} = -\frac{4-2x}{4+2\arctan(y(x))} = \frac{x-2}{2+\arctan(y(x))}\,. \tag{1}$$

(c) Um $y''(x)$ zu erhalten, leiten wir (1) auf beiden Seiten ab, daraus folgt mit der Ketteregel

$$y''(x) = \frac{2+\arctan(y(x)) - (x-2)\frac{y'(x)}{y^2+1}}{(2+\arctan(y(x)))^2}$$

Weil $y'(x_0) = 0$ für einen kritischen Punkt x_0 ist, folgt

$$y''(x_0) = \frac{1}{2+\arctan(y(x_0))}\,.$$

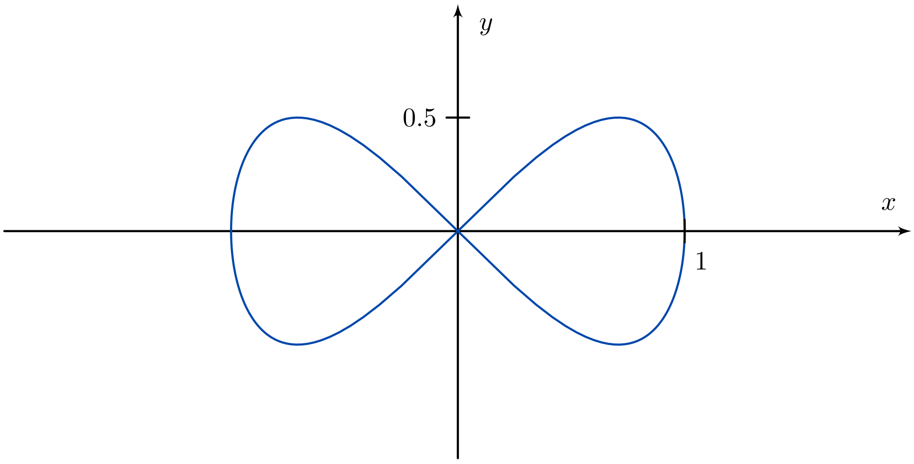


Abbildung 1: Die Menge $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2(1-x^2) + y^2 = 0\}$.

5.2. Implizite Funktion II

(a) Die Menge L ist in Abbildung 1 skizziert.

(b) Sei $f(x, y) := x^2(1-x^2) - y^2$, sodass $L = f^{-1}(0)$ gilt. Nach dem impliziten Funktionensatz lässt sich L lokal in einer Umgebung von $(x_0, y_0) \in L$ als Graph einer Funktion $y = \phi(x)$ schreiben, falls $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ gilt. Wir berechnen

$$\partial_y f(x_0, y_0) = -2y_0.$$

und erhalten somit die Bedingung $y_0 \neq 0$. Diese ist in allen Punkten von L ausser $(\pm 1, 0)$ und $(0, 0)$ erfüllt. Umgekehrt folgt aus der Skizze in Teil (a), dass sich die Funktion in diesen drei Punkten lokal nicht als Graph einer Funktion $y = \phi(x)$ schreiben lässt.

5.3. Die Jacobi-Determinante

Für $x_1 + x_2 + x_3 \neq 1$ haben wir:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1-x_1-x_2-x_3} \\ \frac{x_2}{1-x_1-x_2-x_3} \\ \frac{x_3}{1-x_1-x_2-x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad df(\mathbf{x}) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{1-x_2-x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \\ \frac{x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{1-x_1-x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \\ \frac{x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{1-x_1-x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \cdot \begin{bmatrix} 1-x_2-x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J_f(x) \;=\; \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot \det \begin{bmatrix} 1-x_2-x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

(Jetzt addiere die zweite und dritte Zeile zur ersten)

$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

(Jetzt subtrahiere die erste Spalte von der zweiten und dritten)

$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1-x_1-x_2-x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & 1-x_1-x_2-x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot (1-x_1-x_2-x_3)^2$$
$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^4}$$

5.4. Die Kettenregel

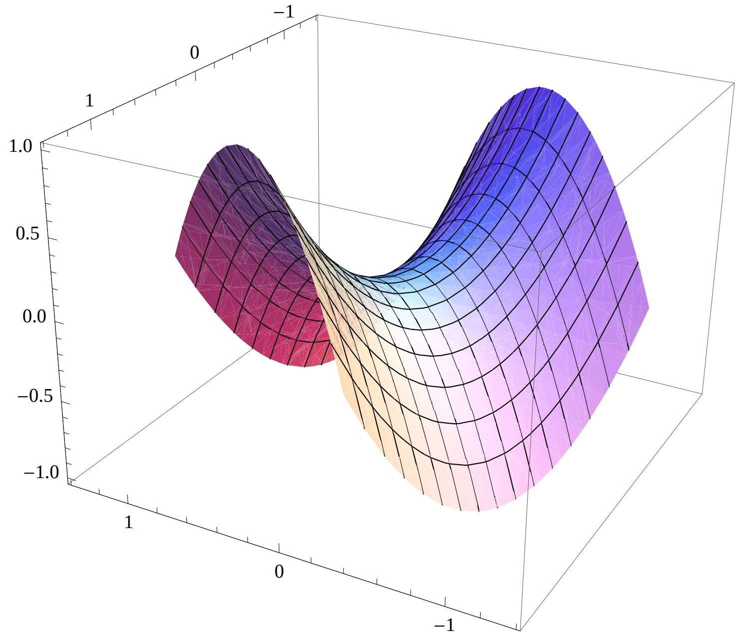
Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

sowie die Projektion auf die (y,z)–Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Fläche sieht folgendermassen aus:



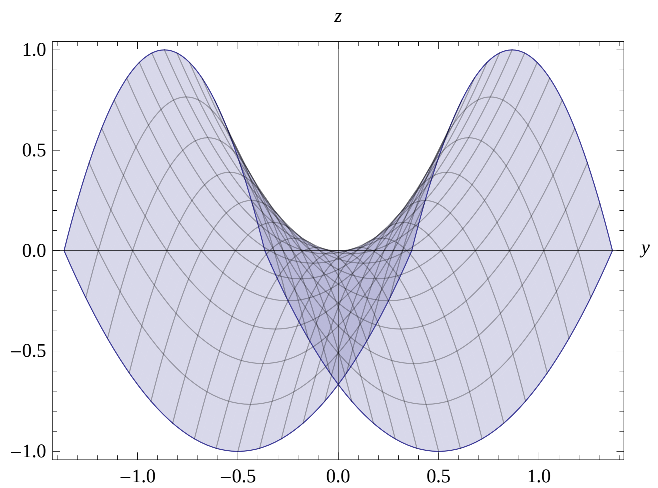
(a) Wir haben

$$(\Pi \circ \mathbf{f})(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Die Projektion auf die (y,z)-Ebene sieht wie folgt aus



(b) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(u,v)}(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial(x,y,z)}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die mehrdimensionale Kettenregel liefert:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) &= \frac{\partial \Pi}{\partial(x,y,z)}(\mathbf{f}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(u,v)}(u,v) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dies entspricht genau dem, was die Kettenregel besagt.

(c) Wir betrachten die Determinante von $\Pi \circ \mathbf{f}$:

$$
\det \frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) = -\sqrt{3}v + u\,.
$$

Diese verschwindet genau dann, wenn $u = \sqrt{3}v$ ist. Folglich ist $(\Pi \circ \mathbf{f})(u,v)$ für alle Punkte $(u,v) = (\sqrt{3}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, nicht regulär.

5.5. Die Jacobi-Matrix

Bevor wir die Aufgabe lösen erinnern wir uns an die allgemeine Kettenregel. Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ zwei differenzierbare Funktionen. Die Verknüpfung $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist auch differenzierbar und ihre Funktionalmatrix an der Stelle $p \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$
\left[\frac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}}\right]_p = \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{f}(p)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]_p
$$

Die Jacobi-Matrix von α ist

$$
\begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

und die Jacobi-Matrix von β ist

$$\begin{pmatrix} v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel bekommen wir daher

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial(x,y)}\right] &= \begin{pmatrix} v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{u=x^2+e^y, v=x+y, w=y} \cdot \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+y & x^2+e^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x^2+2xy+e^y & e^y(x+y+1)+x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$