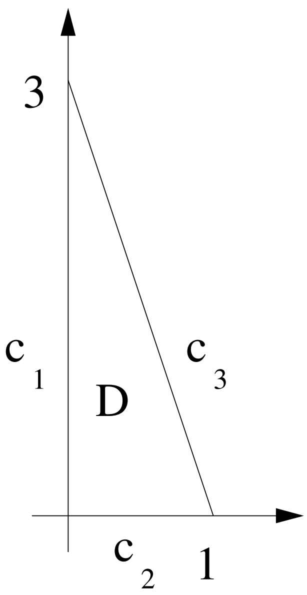
6.1. Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen

Die Menge D besteht aus den drei Eckpunkten $P_1 = (0,3)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (1,0)$, den Randkurven c_1, c_2, c_3 und dem Inneren $\tilde{D}$.



Die kritische Punkte von f im Inneren $\tilde{D}$ müssen die Gleichung

$$Df(x,y) = (2x+7, 2y-2) \stackrel{!}{=} (0,0)$$

erfüllen. Wir erhalten den Punkt $(-\frac{7}{2}, 1)$, der nicht in D liegt. Daher liegen die Extrema von $f|_D$ auf dem Rand von D.
Längs c_1 ist $x = 0$ und die bedingt kritischen Punkte von f auf c_1 sind kritische

Punkte der Funktion

$$y \to f(0,y) = y^2 - 2y.$$

Aus der Gleichung $0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dy}(f(0,y)) = 2y - 2$ folgt $y = 1$, d.h. wir erhalten den Punkt $P_4 = (0,1) \in D$ mit $f(P_4) = -1$ als "Kandidat“ für eine Extremalstelle von f.
Längs c_2 ist $y = 0$. Ableiten und nullsetzen der Funktion

$$x \to f(x,0) = x^2 + 7x$$

liefert $x = -\frac{7}{2}$. Aber der Punkt $(-\frac{7}{2}, 0)$ gehört nicht zu D.
Längs c_3 ist $y = 3 - 3x$. Es gilt daher die kritischen Punkte der Funktion

$$x \mapsto f(x, 3-3x) = x^2 + (3-3x)^2 + 7x - 2(3-3x) = 10x^2 - 5x + 3.$$

zu bestimmen. Die Gleichung $0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx}\Big(f(x,3-3x)\Big) = 20x - 5$ liefert $x = \frac{1}{4}$, d.h. wir erhalten den Punkt $P_5 = (\frac{1}{4}, 3 - \frac{3}{4}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4}) \in D$ mit

$$f(P_5) = 10\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 - 5\Big(\frac{1}{4}\Big) + 3 = \frac{19}{8}$$

als "Kandidat“ für eine Extremalstelle von f.
Wir haben also folgende "Kandidaten"

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(x,y)	$(0,3)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$
$f(x,y)$	3	0	8	-1	$\frac{19}{8}$

Es gilt somit

$$\min f|_D(x,y) = f(0,1) = -1 \quad \text{und} \quad \max f|_D(x,y) = f(1,0) = 8.$$

6.2. Parametrisierung einer Fläche I

ergibt einen Zylinder.

6.3. Parametrisierung einer Fläche II

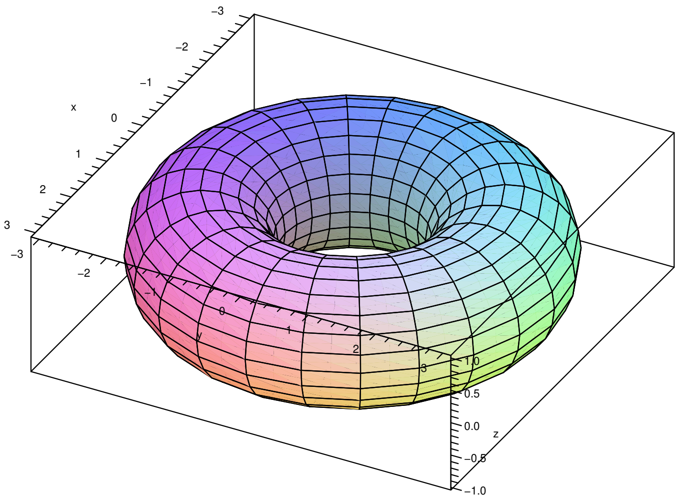
(a) Für $v = 0$ erhalten wir die Abbildung

$$(u, 0) \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(u) \\ 3\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Diese beschreibt einen Kreis mit Radius 3 in der x-y–Ebene um den Ursprung. Für $u = 0$ erhalten wir die Abbildung

$$(0, v) \mapsto \begin{pmatrix} 2 + \cos(v) \\ 0 \\ \sin(v) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Diese beschreibt einen Kreis mit Radius 1 in einer Ebene parallel zur x-z–Ebene um den Punkt $(2, 0, 0)$. Analoge Überlegungen für $v = -\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$ und $u = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ liefern weitere Kreise. Alle diese Kurven zusammen bilden einen Torus:



(b) Gesucht ist eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$g(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 1. \tag{3}$$

Nun gilt

$$(x(u,v))^2 + (y(u,v))^2 = (\cos^2(u) + \sin^2(u))(2+\cos(v))^2 = (2+\cos(v))^2, \tag{4}$$

also

$$\left(\sqrt{(x(u,v))^2 + (y(u,v))^2} - 2\right)^2 = \cos^2(v) = 1 - \sin^2(v) = 1 - (z(u,v))^2. \tag{5}$$

In anderen Worten ist

$$\left(\sqrt{(x(u,v))^2 + (y(u,v))^2} - 2\right)^2 + (z(u,v))^2 = 1, \tag{6}$$

unabhängig von (u,v). Also ist

$$g(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2. \tag{7}$$

ein Kandidat für die gesuchte Funktion. Um zu sehen, dass die so definierte Funktion g tatsächlich den Torus als Niveaufläche zum Niveau 1 hat, setzen wir rückwärts ein und bemerken, dass es für alle Punkte (x, y, z), welche $g(x, y, z) = 1$ erfüllen, ein Paar (u, v) gibt mit $\mathbf{x}(u, v) = (x, y, z)^T$.

6.4. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren I

Aus Symmetriegründen genügt es, das Problem im Quandranten $x, y > 0$ zu betrachten. Dies ergibt dann genau ein Viertel des gesuchten Rechtecks. Wir betrachten also ein Rechteck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$, (x,y) und verlangen, dass (x,y) auf der Ellipse liegt, dass also $g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Die Fläche dieses Rechtecks ist xy und damit ergibt sich die Lagrangefunktion

$$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Ableiten und Null setzen liefert die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
F_x &= y - 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0\\
F_y &= x - 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0\\
F_\lambda &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen kriegen wir zuerst $y = 2\lambda\frac{x}{a^2}$ und dann $x\left(1 - \frac{4\lambda^2}{a^2b^2}\right) = 0$. Da $x > 0$ folgt $\lambda = \pm\frac{ab}{2}$, also $y = \pm\frac{b}{a}x$. Da wir $x, y > 0$ betrachten, brauchen wir nur $y = \frac{b}{a}x$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt (nur positive Lösung betrachten)

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Die gesamte Fläche des Rechtecks ist also $4xy = 2ab$. Die Ellipsenfläche ist πab.

Alternative: Das Gleichungssystem lässt sich auch lösen, indem wir die ersten beiden Gleichungen nach 2λ auflösen (und dabei beachten, dass x und y nicht 0 sein dürfen):

$$\begin{aligned}
2\lambda &= \frac{y}{x}a^2\\
2\lambda &= \frac{x}{y}b^2\\
\Rightarrow \frac{y}{x}a^2 &= \frac{x}{y}b^2\\
\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} &= \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

wobei die allerletzte Gleichung folgt, wenn wir in die Nebenbedingung einsetzen.

6.5. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren II

Zuerst müssen wir sicher sein, dass f ein globales Maximum annimmt. Um die Existenz zu zeigen, beachte zuerst, dass f eine stetige Funktion ist. Sodann ist die durch $G = F = 0$ definierte Teilmenge abgeschlossen, da sie durch zwei Gleichungen in stetigen Funktionen beschrieben ist. Ausserdem ist sie beschränkt, denn die Gleichung $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ impliziert $|x|$, $|y|$, $|z| \leq 1$. Daher ist die Menge kompakt. Da jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, können wir sicher sein, dass es ein globales Maximum gibt.

Wir suchen das Maximum der Funktion $f(x,y,z) := x$ auf der durch die Gleichungen $F(x,y,z) = G(x,y,z) = 0$ definierten Kurve mit

$$F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{und} \quad G(x,y,z) := x^3 + y^3 + z^3. \tag{8}$$

Gemäss Vorlesung liegt dieses an einem Punkt, an welchem gilt

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \, \nabla F + \mu \, \nabla G \\ F &= 0 \\ G &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

was äquivalent ist zum Gleichunssystem

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 3x^2 &= 1 \\ \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 3y^2 &= 0 \\ \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 3z^2 &= 0 \\ F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ G(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Fall 1: $\boxed{y = 0}$ Die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ besagt dann $x^3 + z^3 = 0$, woraus $z = -x$ folgt. Aus der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ folgt dann weiter

$$2x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Fall 2: $\boxed{z=0}$ Analog zu Fall 1 folgt $y=-x$ und $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fall 3: $\boxed{y\neq 0 \text{ und } z\neq 0}$ Wäre dann $\mu=0$, so würde aus der Gleichung $\lambda\cdot 2z+\mu\cdot 3z^2=0$ folgen $\lambda=0$, was der Gleichung $\lambda\cdot 2x+\mu\cdot 3x^2=1$ widerspricht. Also ist $\mu\neq 0$. Die Gleichungen $\lambda\cdot 2y+\mu\cdot 3y^2=0$ und $\lambda\cdot 2z+\mu\cdot 3z^2=0$ liefern dann

$$y=z=-\frac{2\lambda}{3\mu}. \tag{12}$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, dann erhalten wir

$$x^3+2y^3=0 \;\Leftrightarrow\; y=z=-\frac{x}{\sqrt[3]{2}} \tag{13}$$

und durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt

$$x^2+2\cdot\frac{x^2}{2^{2/3}}=1 \;\Leftrightarrow\; x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}\,. \tag{14}$$

Um nun von diesen Kandidaten das Maximum von $f(x,y,z)=x$ zu finden, reicht es, nur jene x zu betrachten, welche positiv sind und davon das grösste zu finden, also

$$x=+\frac{1}{\sqrt{2}},\,+\frac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}\,. \tag{15}$$

Aus $1<2^{1/3}$ folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}\,. \tag{16}$$

Folglich hat das gesuchte Maximum den Wert

$$f_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

und wird genau an den beiden Punkten

$$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{18}$$

angenommen.

6.6. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren III

Gesucht sind die globalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x - y - z$ unter der Nebenbedingung, dass die Funktionen $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 1$ und $h(x,y,z) = 3x - 4z$ beide verschwinden. Zunächst suchen wir alle lokalen Extrema mittels der Lagrangemethode mit 2 Lagrangemultiplikatoren λ und μ. Zu lösen ist dafür die Gleichung

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \nu \nabla h \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit den Gleichungen $g = 0$ und $h = 0$ ergibt dies das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 1 &= 0 \\ 3x - 4z &= 0 \\ 2\lambda x + 3\nu &= 1 \\ 4\lambda y &= -1 \\ -4\nu &= -1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt $\nu = \frac{1}{4}$, woraus man durch Einsetzen in die dritte und vierte Gleichung die Relation $y = -2x$ ableiten kann. Einsetzen in die erste Gleichung liefert sodann $9x^2 - 1 = 0$, also $x = \pm\frac{1}{3}$. Daraus folgt $y = \mp\frac{2}{3}$, sowie durch Einsetzen in die zweite Gleichung $z = \frac{3x}{4} = \pm\frac{1}{4}$. Es gibt also genau die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}\right) = \pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right) =: \pm P.$$

Die dortigen Werte der Funktion f sind:

$$f(\pm P) = \pm\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \pm\frac{3}{4}.$$

Der einzige Kandidat für ein globales Maximum ist also P, der einzige Kandidat für ein globales Minimum $-P$. Es bleibt aber zu zeigen, dass dies wirklich globale Extrema sind. Dies folgt, sobald wir wissen, dass es überhaupt ein globales Maximum bzw. Minimum gibt.

Um die Existenz zu zeigen, beachte zuerst, dass f eine stetige Funktion ist. Sodann ist die durch $g = h = 0$ definierte Teilmenge abgeschlossen, da sie durch zwei Gleichungen in stetigen Funktionen beschrieben ist. Ausserdem ist sie beschränkt, denn die Gleichung $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ impliziert $|x|$, $|y| \leq 1$, und daraus folgt mit der Gleichung $h(x,y,z) = 3x - 4z = 0$ auch $|z| \leq 1$. Daher ist die Menge kompakt. Da jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, existieren die gesuchten Extrema und liegen nach obigem in $\pm P$.